数学物理方程与特殊函数

杨奇林　编著

清华大学出版社

数学物理方程与特殊函数

杨奇林　编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书主要介绍了三类基本二阶线性偏微分方程——波动方程、热传导方程和位势方程的各种求解方法以及特殊函数的基础知识. 全书分8章,分别是:一些典型方程和定解条件的推导、偏微分方程的基本概念和分类、特征线法、分离变量法、特殊函数、积分变换法、Green函数法、偏微分方程数值解初步.

本书比较全面地介绍了偏微分方程基本解理论,随后介绍了求解波动方程的特征线法,作为特殊函数理论基础的Sturm-Liouville理论,三种类型边值问题Green函数的求法,特别介绍了用Rieman映射定理求Green函数的方法. 本书例题丰富,习题选取少而精;讲解推理自然,深入浅出.

本书可作为理科非数学专业和工程科学各专业本科的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程与特殊函数/杨奇林编著. —北京:清华大学出版社,2004.11
ISBN 7-302-09340-7

Ⅰ.数…　Ⅱ.杨…　Ⅲ.①数学物理方程 ②特殊函数　Ⅳ.①O175.24 ②O174.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第088040号

出 版 者:清华大学出版社　　**地　　址**:北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**:100084
社 总 机:010-62770175　　**客户服务**:010-62776969
责任编辑:刘　颖
封面设计:常雪影
印 装 者:北京鑫海金澳胶印有限公司
发 行 者:新华书店总店北京发行所
开　　本:185×230　**印张**:12.5　**字数**:254千字
版　　次:2004年11月第1版　2004年11月第1次印刷
书　　号:ISBN 7-302-09340-7/O·397
印　　数:1～3000
定　　价:18.00元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换. 联系电话:(010)62770175-3103或(010)62795704

序

20 世纪 80 年代以来，我国大学的一些工科专业相继开设了“数学物理方程”这门课程，其内容基本上是数学专业同名课程内容的简介。以三种古典方程的定解问题为对象，以两种解法(傅里叶级数和格林函数)为主要内容，而且只讲基本技巧，不谈理论。这种框架至今没有什么变化。

由于许多实际问题的数学模型往往可以表示为偏微分方程，所以一般的理解是：通过这门课程，学生主要是学习解线性偏微分方程定解问题的基本技巧(迭加原理，具体说就是傅里叶级数)。这一点固然不错，但如果过于强调技巧的一面，可能会使学者感到内容单薄而且有点繁琐。事实上，在学生掌握了迭加原理基本思想的基础上，适当介绍这些技巧的原始思想以及它们对数学发展所起的推动作用，可能会使学者能更好地领会这些技巧的实质以及学习的兴趣。例如，学生往往对如何确定定解条件感到为难。这里有物理的概念问题，更有数学上的合理性问题。作为一门数学课，对后者不应该完全回避。

本书的作者花了不少功夫在这方面作了一些尝试：在本书中作者在现有课时的框架下，适度地介绍了 Sturm-Liouville 问题以及广义函数。这种“适度”的讲法是否适合于我国的工科大学生还有待于进一步通过实验来检验，但如果教师讲课得法，应该会引发一部分学者的兴趣的。

作者还比较年轻，教学经验不能算很丰富，但他在教学上勤于实践，通于探索的精神是极为可贵的。

萧树铁

2004 年 9 月

序 言

17～18 世纪，Newton-Leibniz 创立的微积分在经典力学上得以广泛运用并取得了辉煌的成就. 二体问题的解决、海王星的发现，都是常微分方程成功应用于质点动力学的壮丽篇章. 随着分析力学的发展，人们开始研究连续变化的介质，如弦振动、弹性固体变形、流体流动等复杂力学现象的规律，得到了一系列偏微分方程. 古典力学的 Hamilton-Jacobi 理论和计算变分的 Euler-Lagrange 方程都会导出偏微分方程. 1864 年 J. Maxwell 用以其命名的偏微分方程组预言了光是一种电磁波，这个预言 20 年后被 H. Hertz 的试验证实；广义相对论中 Einstein 引力场方程的球对称解，准确解释了水星近日运动，并预言了太阳引力场中光线的偏折，成为广义相对论正确性的有力论证. 在量子力学中偏微分方程的应用更是随处可见. 在过去的两个多世纪里，偏微分方程不仅成功地应用于物理学和其他自然科学，预见和揭示了小到夸克、大到天体的物质运动普遍规律. 也为纯粹数学积累了丰富的素材，成为近代抽象数学发展的重要推动力量.

偏微分方程不仅仅是古典多元微积分的副产品，它的无可置疑的有效性和高度的复杂性，使得它成为一门独立的学科和我们理解自然科学、提高科学文化素质的必需营养. 在气象、机械、电信、化工、生态、经济、人口和其他社会科学的各个领域中都会遇到表现为偏微分方程的数学模型，解释这些模型的合理性和寻求它们的解成为科学工作者的重要课题并不只是数学家们的责任. 随着科学研究分工的专业化和科学计算的飞速发展，偏微分方程理论将逐渐走出数学家们的殿堂，成为自然科技工作者们的重要工具.

数学物理方程(法)作为微积分和常微分方程课程的继续来介绍偏微分方程的基础知识，它虽然有鲜明的个性特点，但绝不是孤立的无可捉摸地难学. 国内早在 20 世纪六七十年代就出现了很多优秀的数学物理方程教材，但这些教材的不足是讲解、例题和习题都过于烦琐，既不利于教，也不利于学，以致于很多人对这门课望而生畏. 近年来，出现了一些简写改编的教材，但又似乎过于简略，把许多基本的重要内容都省掉了. 在为清华大学电子系学生授课的过程中，本人结合前辈教材的优点，萌生了编写本教材的念头，希望为同学们提供一本更加适合他们的教材，来弥补前述教材的不足. 编写此教材的基本精神是：数学介绍要严格，教材篇幅要适当，能介绍完主要的传统教学内容，同时又有利于同学们的进一步学习.

本着上述精神，本人对教材作了细致深入的设计．第1、2章，用不太长的篇幅介绍了偏微分方程的分类，强调了线性偏微分方程和非线性偏微分方程的区别，通过与线性常微分方程类比介绍了线性偏微分方程的叠加原理和齐次化原理，并指出本课程只研究线性偏微分方程的求解，为同学们今后学习了解非线性科学作点准备．第3章介绍了解波动方程的特征线法．这个方法不仅可以解决传统行波法没法求解的一些波动方程，而且可以用于求解一些非线性偏微分方程，它思想较为简单，技术上也不困难，而且在双曲型方程的研究中被广泛应用，所以我们通过它来引入一维波动方程的 D'Alembert 公式．第4章详细准确地介绍了 Sturm-Liouville 问题的一般理论．这方面的内容在以前的教材中要么介绍得不够详细，要么介绍得不够准确．这些不足导致的直接结果是影响了特殊函数的理解．然而同学们又很难找到系统介绍 Sturm-Liouville 理论的参考书．为了用较短的篇幅来介绍这方面的浩瀚内容，我们用与 Hermitian 矩阵类比的办法，介绍了 Sturm-Liouville 问题的抽象数学理论，这样有利于同学们系统理解分离变量法的一般理论．对于这部分内容所涉及的一些泛函分析(数学系大三专业课)的理论，初学者只需记住一些重要结论．第5章特殊函数的介绍强调了特殊函数的幂级数性质，尽量用幂级数的特点证明许多公式和命题，避免以前教材中的一些复杂技巧．本书将 Bessel 函数及(连带)Legendre 函数的正交关系和模长作为特殊的 Sturm-Liouville 问题来处理，有利于同学们理解 Sturm-Liouville 问题的一般理论和分离变量法的一般步骤．避免了一些额外的数学技巧，也有利于他们学习课本没有涉及的其他类型的特殊函数．第6章介绍积分变换法，选材侧重于用分离变量法不能求解的无界区域上的定解问题，避免了同一问题的重复讲解．传统教材中介绍的保角变换法处理的问题很有限，第7章用很短的篇幅介绍了怎样用单复变函数论的 Riemann 映射定理，来求平面上一般单连通区域的 Green 函数，从而可以完全求解平面上一般单连通区域上的第一边值问题，在此基础上介绍了怎样用分离变量法求第二、第三边值问题的 Green 函数．鉴于微分方程数值解越来越为广大科技工作者所运用，第8章简单地介绍了差分法、变分法以及有限元法的入门知识，为同学们进一步学习相关课程或阅读相关课外书籍做准备．

书中的重要结论以定理或命题的形式准确叙述，便于复习和记忆；精心选择了例题和习题，例题强调典型性和覆盖性；对于复杂的例题，用标题标明解题步骤，以利于初学者掌握各类典型题目的基本程序．习题密切联系课程内容，难度适当，有些习题不仅可以加深教材内容的理解，也是课本内容的补充．一些较难的习题给出了比较详细的提示，但无一偏题．我的原则是以求解和理解偏微分方程的性质为核心，将一些与其他课程重复的练习去掉．认真完成习题足以理解本课程的所有核心内容．

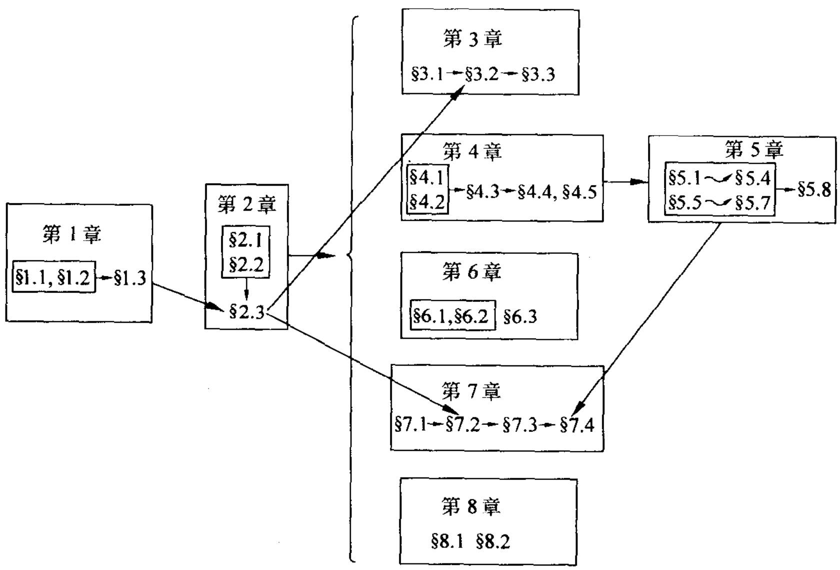
根据作者的经验，完成本书教学内容大约需要34～46学时．如果周学时2学时，只要2.2节、4.3节、4.5节、6.3节适当略讲，并选择性地讲解4.4节、5.4节、5.7节、7.2节、7.4节的例题，可以一学期完成本教材的内容；如果周学时3学时，一学期完成本教材的

全部内容是没有问题的.此外,特殊函数也可以只介绍 Bessel 函数,(连带)Legendre 函数方面的内容可以作为自学内容处理;教材中加 * 号的内容,可供感兴趣的同学课外阅读.下表给出了各章学时的分配数,可供参考.

章数	1	2	3	4	5	6	7	8
课时数	2～3	3～4	4～5	6～8	8～11	4～5	5～7	2～3

除了按教材本身安排的顺序学习和教学外,读者也可以根据自己的兴趣选取其他顺序.下图给出了教材各个章节的逻辑顺序关系,其中箭头方向表明了教材安排的时间先后关系;方框里小方框内的内容要么并列顺序,要么可以同一教学时间内灵活处理.第 2 章 2.1 节、2.2 节可以放在第 3 章或课本最后讲解.除了第 7 章外,右边第 3 章、第 4 章和第 5 章、第 6 章、第 8 章的顺序是并列的.读者可以根据这个结构图选择顺序学习或教学.

各章节的逻辑关系图



作者感谢曾云波、简怀玉教授所给予的建议与帮助,特别感谢萧树铁先生对本书多方面的指导、建议和帮助,他还应本人的邀请为本书作序.感谢清华大学数学科学系许多老师和朋友的热心帮助.

作　者

2004 年夏于清华园

目 录

第1章 一些典型方程和定解条件的推导

本章将通过微元法和物理上的一些普遍定律，从力学、热学、电磁学中引入波动方程、热传导方程和位势方程及其相应的定解条件.

1.1 三类典型方程的推导

1 弦振动方程

一根长度为 l 的均匀细弦，拉紧后让它离开平衡位置，在垂直于弦线的外力作用下作微小横振动，求不同时刻弦线的形状.

(1) 这里的“弦”，是指宽度和厚度忽略不计，可以任意弯曲的弹性曲线，它只抗伸展不抗弯曲. 所谓“均匀”是指弦的线密度 ρ 为常数. 所谓“细”是指弦的长度远远大于它的直径，使得在数学上可以把弦看作一条光滑的曲线；并且弦的重力可以忽略不计.

(2) 所谓“横振动”是指振动发生在一个平面内，且弦上各点的运动方向垂直于平衡位置. 取弦的平衡位置为 x 轴，于是弦上 x 点在 t 时刻的位移可用可微函数 $u(x,t)$ 表示.

(3) 所谓“微小”是指弦上各点的位移与弦长相比很小，且振动平稳，即弦在任意位置的倾角都很小：$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$. 也就是说，在 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 高阶无穷小忽略不计的精度范围内研究问题，于是

$$\Delta s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_x^2}\,\mathrm{d}x \approx \int_x^{x+\Delta x} \mathrm{d}x = \Delta x,$$

即在振动过程中弦长不发生变化. 由 Hooke 定律知，弦上各点的张力与时间无关，记作 $\boldsymbol{T}(x)$，其大小记为 $T(x)$.

我们用微元法和隔离法，应用牛顿运动定律来建立方程. 在弦上任取一小弧段 $\overset{\frown}{MM'}$ 对其隔离，沿水平 x 轴及其垂直方向分别应用牛顿第二定律. 弧段 $\overset{\frown}{MM'}$ 受到在两端 M 和 M' 处的张力 $\boldsymbol{T}(x)$ 和 $\boldsymbol{T}(x+\Delta x)$ 以及垂直于 x 轴的外力的作用. 我们用 $f_0(x,t)$ 表示时刻 t 的强迫外力密度.

分别记 $\boldsymbol{T}(x)$ 和 $\boldsymbol{T}(x+\Delta x)$ 与 x 轴的夹角为 α 和 α'（见图 1.1.1）. 弧段 $\widehat{MM'}$ 在水平方向没有运动，故水平方向合力为零，即

$$T(x)\cos\alpha - T(x+\Delta x)\cos\alpha' = 0.$$

由于

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}} \approx 1,$$

同理 $\cos\alpha' \approx 1$. 于是

$$T(x) = T(x+\Delta x),$$

由此知弦上各点的张力大小相等，用常数 T 表示之.

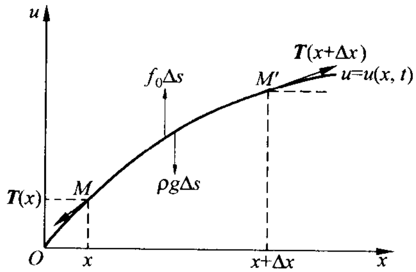


图　1.1.1

在垂直方向弧段 $\widehat{MM'}$ 受力总和为 $-T\sin\alpha + T\sin\alpha' + f_0(x,t)\Delta s - \rho g\Delta s$，其中 $-\rho g\Delta s$ 是弧段 $\widehat{MM'}$ 的重力. 由于

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \approx \tan\alpha = u_x(x,t),$$

$$\sin\alpha' \approx \tan\alpha' = u_x(x+\Delta x,t),$$

$$\Delta s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_x^2(x,t)}\,\mathrm{d}x \approx \Delta x,$$

小弧段在 t 时刻的沿垂直方向的加速度近似为 $u_{tt}(x,t)$，由牛顿第二定律得

$$T[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)] - \rho g\Delta s + f_0(x,t)\Delta s = \rho u_{tt}(x,t)\Delta s,$$

注意到 $\Delta s \approx \Delta x$，此即

$$T\frac{u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x} - \rho g + f_0(x,t) = \rho u_{tt}(x,t),$$

令 $\Delta x \to 0$，得

$$Tu_{xx}(x,t) - \rho g + f_0(x,t) = \rho u_{tt}(x,t).$$

根据前面的假定，我们可以忽略重力的作用，这样我们最后得到弦的强迫振动方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f. \tag{1.1.1}$$

其中 $a^2=\dfrac{T}{\rho}$，$f=\dfrac{f_0}{\rho}$. 若弦不受外力，即 $f=0$，则得弦的自由振动方程

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}.$$

方程(1.1.1)是一个很基本的一维偏微分方程，各种弹性振动，如建筑物的剪振动、潮汐波、地震波等都可以用这个方程来描述. 这些物理现象的共同特征是振动产生波的传播. 因此方程(1.1.1)又叫一维波动方程. 1752 年，d'Alembert 首先建立了弦振动方程. 后来，Euler(1759 年)和 D'Bernoulli(1762 年)分别推广建立了二维和三维波动方程用于研究声波的传播.

2 热传导方程

在三维空间中，考虑一均匀、各向同性的物体，假定它的内部有热源，并且与周围没有热交换，求物体内部的温度分布和变化.

用 $u(x,y,z,t)$ 表示物体在点 $M(x,y,z)$ 处 t 时刻的温度. 用微元法，取微小的体积元 Ω，对它考察热平衡关系，建立方程.

根据热传导的 Fourier 定律①，物体在无穷小时间 $\mathrm{d}t$ 内，流过一个无穷小面积元 $\mathrm{d}S$ 的热量 $\mathrm{d}Q$ 与时间 $\mathrm{d}t$、热流通过的面积 $\mathrm{d}S$ 及 u 沿 $\mathrm{d}S$ 的法向的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 成正比(见图 1.1.2)，即

$$\mathrm{d}Q = -k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S\mathrm{d}t.$$

其中 $k=k(x,y,z)$ 称为物体的热传导系数. 上式的负号表示热流流向是温度梯度的相反方向.

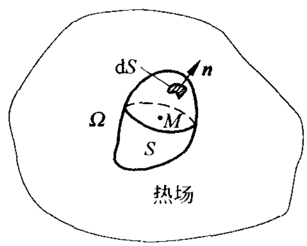


图 1.1.2

由 Fourier 定律知，在任意时间区间 $[t_1,t_2]$ 内，流进 $\partial\Omega$ 的热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2}\left[\oint_{\partial\Omega} k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t.$$

由 Остроградский-Gauß 公式得

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2}\left[\oint_{\partial\Omega} k\nabla u\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\left[\iint_{\Omega}\nabla\cdot(k\nabla u)\mathrm{d}V\right]\mathrm{d}t.$$

设热源的强度为 $f_0(x,y,z,t)$，则在时间区间 $[t_1,t_2]$ 内热源散发的热量为

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2}\left[\iint_{\Omega}\rho f_0\mathrm{d}V\right]\mathrm{d}t.$$

Ω 内各点由 t_1 时刻的温度 $u(x,y,z,t_1)$ 变化到 t_2 时刻的温度 $u(x,y,z,t_2)$，需要吸收热量

① 热传导的 Fourier 定律：单位时间内通过的热流量与温度梯度和横截面积成正比. 详见文献[3].

$$Q_3 = \int_\Omega c\rho[u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1)]\mathrm{d}V = \int_{t_1}^{t_2}\left[\int_\Omega c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V\right]\mathrm{d}t.$$

根据热量守恒定律 $Q_1+Q_2=Q_3$，故有

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_\Omega[\nabla\cdot(k\,\nabla u)+\rho f_0]\mathrm{d}V = \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_\Omega c\rho u_t\mathrm{d}V.$$

设 $u(x,y,z,t)$对空间有二阶连续偏导数，对时间有一阶连续偏导数，据假定物体均匀且各向同性，c,ρ,k 均为常数. 由时间段$[t_1,t_2]$和区域 Ω 的任意性立即得

$$u_t - a^2\Delta u = f, \tag{1.1.2}$$

其中 $a^2=\dfrac{k}{c\rho}$，$f=\dfrac{f_0}{c}$. Δ 是三维 Laplace 算子. 当 $f\geqslant 0$ 时表示热源，当 $f\leqslant 0$ 时表示热汇.

在某个区域内，若液体或气体物质的浓度不均匀，就会发生物质由高浓度向低浓度扩散的现象，类似地推导知扩散过程也满足热传导相同的方程. 通常把方程(1.1.2)称为*热传导方程*. 历史上 Fourier 在其经典名著《热的解析理论》(1810—1822 年)中首先引入和研究了热传导方程.

3 电磁场方程

三维空间的电磁场可以用电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 两个矢量来描述. 它们满足 Maxwell 方程组(1864 年建立)：

$$\text{(Gauß)}\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}; \tag{1.1.3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H} = 0; \tag{1.1.4}$$

$$\text{(Ampère)}\qquad \nabla\times\boldsymbol{H} = \sigma\boldsymbol{E} + \varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}; \tag{1.1.5}$$

$$\text{(Farady)}\qquad \nabla\times\boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}. \tag{1.1.6}$$

其中，ρ 为电荷的体密度，ε 是介质的电介常数，σ 为导电率，μ 为导磁率.

在(1.1.5)式两端求旋度得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{E}) + \sigma\nabla\times\boldsymbol{E},$$

将(1.1.6)式代入上式得

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H} = -\varepsilon\mu\boldsymbol{H}_{tt} - \sigma\mu\boldsymbol{H}_t,$$

利用场论公式$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{H})-\Delta\boldsymbol{H}$，我们可以得到 $\boldsymbol{H}$ 满足的方程为

$$\Delta\boldsymbol{H} = \varepsilon\mu\boldsymbol{H}_{tt} + \sigma\mu\boldsymbol{H}_t. \tag{1.1.7}$$

同理可得 $\boldsymbol{E}$ 满足的方程

$$\Delta\boldsymbol{E} = \varepsilon\mu\boldsymbol{E}_{tt} + \sigma\mu\boldsymbol{E}_t. \tag{1.1.8}$$

如果介质不导电，即 $\sigma=0$，则方程(1.1.7)与方程(1.1.8)简化为

$$H_{tt} = \frac{1}{\varepsilon\mu}\Delta H; \tag{1.1.9}$$

$$E_{tt} = \frac{1}{\varepsilon\mu}\Delta E. \tag{1.1.10}$$

方程(1.1.9)和方程(1.1.10)都称为三维波动方程. 容易看出 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的任意分量 u 都满足波动方程

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0,$$

其中 $a=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

如果我们考虑静电场,即电场不随时间变化,显然有

$$\Delta \boldsymbol{E} = 0. \tag{1.1.11}$$

可见 $\boldsymbol{E}$ 的任意分量 u 都满足

$$\Delta u = 0,$$

这个方程称为 Laplace 方程. Laplace 方程的解习惯上称为调和函数. 由方程(1.1.3)还可以推出静电场的电位满足的方程. 由(1.1.6)式知,静电场的电场强度是无旋的,因而存在电位函数 u,使得 $\boldsymbol{E}=-\nabla u$,将它代入(1.1.3)式得

$$\Delta u = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{1.1.12}$$

这个非齐次方程称为 Poisson 方程. 显然如果静电场是无源的,则它的电位函数满足 Laplace 方程.

1.2 定解条件和定解问题

我们常常将某些物质运动或社会现象变化的普遍规律用微分方程描述出来. 然而特定条件下这些自然和社会现象的精确表达依赖于具体的条件. 例如气象预报除了知道大气运动的普遍规律,还需知道预报前的气象观测数据如温度、湿度等. 我们把微分方程满足的这些条件叫做*定解条件*. 常见的定解条件有*初始条件*(initial condition)和*边界条件*(boundary condition). 一个偏微分方程(组)和相应的定解条件合在一起就构成了一个*定解问题*. 不在一般意义下解偏微分方程的通解而在定解条件下解偏微分方程,一方面因为大多数情况下寻找方程的通解非常困难,另一方面,实际的物理、力学、工程、生态、社会等应用问题需要的不是方程式的任何解而是适合某些补充条件的解. 此外,对偏微分方程来说,除去极个别特别情况外,即使知道方程的通解,从通解选取适合定解条件的特解往往也很困难.

根据实际情况,常见的定解问题有以下 3 种. 只有初始条件,没有边界条件的定解问题称为*初始问题*(或柯西(Cauchy)问题);而只有边界条件没有初始条件的定解问题称为

边值问题.既有初始条件,又有边界条件的定解问题称为混合问题.

(1) 初始条件及 Cauchy 问题.

如果偏微分方程是描述随时间发展变化的发展方程,相应系统或过程初始时刻的状况称为初始条件.以弦振动方程为例,其初始条件就是开始时刻的位移和速度.若以 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 分别表示初始位置和初始速度,则对应的 Cauchy 问题表达为

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t), & x\in\mathbb{R}^1, t>0, \\ u|_{t=0}=\phi(x), & x\in\mathbb{R}^1, \\ u_t|_{t=0}=\psi(x), & x\in\mathbb{R}^1. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

同理,热传导方程的 Cauchy 问题表达为

$$\begin{cases} u_t-a^2\Delta u=f(x,y,z,t), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, t>0, \\ u|_{t=0}=\phi(x,y,z), & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{1.2.2}$$

其中 $\phi(x,y,z)$ 是初始时刻的温度分布.一般地,与常微分方程的初值问题一样,一个发展方程如果其关于时间的最高阶导数阶数为 n,则对应的 Cauchy 问题我们需给出未知函数关于时间直到 $n-1$ 阶导数的所有初始时刻的值.

(2) 边界条件和边值问题、混合问题.

描述某系统或过程边界状况的约束条件称为边界条件.边界条件有三类.第一类边界条件是直接给出未知函数在边界上的值.如弦振动问题,若弦的两端固定(称为固定端),则边界条件为

$$u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=l}=0.$$

若弦的两端不固定,而是按照规律 $\mu_1(t)$,$\mu_2(t)$ 运动,则边界条件为

$$u|_{x=0}=\mu_1(t), \quad u|_{x=l}=\mu_2(t).$$

又如在热传导问题中,若物体与外界接触的表面温度在时刻 t 为 $\mu(x,y,z,t)$,则其边界条件为

$$u|_{\partial\Omega}=\mu(x,y,z,t).$$

第二类边界条件是给出未知函数 u 沿边界 $\partial\Omega$ 的外法向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数,即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega}=\mu.$$

如弦振动问题,设弦的长度为 l.若弦的一端,不妨设为 $x=l$ 一端可以在垂直于 x 轴的方向上作自由上下滑动,且不受垂直方向的外力,我们称这样的端点为自由端.由于垂直方向的张力为 $T\sin\alpha=T\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 且 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\dfrac{\partial u}{\partial x}$,因此,自由端条件表示为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0.$$

而如果端点 $x=l$ 所受合外力在时刻 t 为 $\mu(t)$,则可以表示为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=\mu(t).$$

对热传导问题，由 Fourier 定律可知，$k\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega}=-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S\mathrm{d}t}$. 故第二类边界条件表示单位时间、单位面积内沿边界外法向流出的热量. 若边界是绝热的，边界条件为$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=0$.

(3) 第三类边界条件是给出未知函数及其沿边界的外法向方向导数的线性组合在边界上的值，即

$$\left[u+h\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right]_{\partial\Omega}=\mu.$$

如弦振动问题，若弦的 $x=l$ 一端是受弹性支撑. 若用 k 表示弹性系数，由 Hooke 定律，该端点受到的弹性力是 $ku|_{x=l}$，又该端点受到的张力为 $T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}$，这两个力应互相平衡，即 $ku|_{x=l}=-T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}$，可以简单表示为

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma u\right)\right|_{x=l}=0,$$

其中 $\sigma=\frac{k}{T}$.

在热传导问题中，如果物体与边界外部有热交换，设外部介质的温度 u_1 比物体温度 u 低. 由热传导的 Newton 冷却定律①，单位时间、单位面积内散失的热量与温度差成正比，即 $\mathrm{d}Q=h(u-u_1)\mathrm{d}S\mathrm{d}t$，又由 Fourier 定律，传出热量 $\mathrm{d}Q=-k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S\mathrm{d}t$，这两个热量相等，即 $-k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=h(u-u_1)$，也即

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+\sigma u\right)\right|_{\partial\Omega}=\mu(x,y,z,t),$$

其中 $\sigma=\frac{h}{k}$，$\mu=(\sigma u_1)|_{\partial\Omega}$.

前面给出的边界条件中，μ 是定义在边界上的已知函数，如果 $\mu=0$，则称相应的边界条件为齐次(homogeneous)边界条件，否则称为非齐次边界条件.

研究有界弦的振动和有限范围内的热传导等问题，它们不仅受初始条件的影响，而且受边界条件的约束. 因此有限区域内的发展方程，可以提混合问题. 如一维波动方程的混合问题

① Newton 冷却定律：单位时间内固体热源向周围媒质传递的热量与热源和周围的温度差以及热源表面积成正比. 详见文献[3].

$$
\begin{cases}
u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l, t > 0, \\
u|_{t=0} = \phi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x), & 0 < x < l, \\
u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0, & t \geqslant 0.
\end{cases}
\tag{1.2.3}
$$

同理,有热传导方程混合问题

$$
\begin{cases}
u_t - a^2 \Delta u = f(x,y,z,t), & (x,y,z) \in \Omega, t > 0, \\
u|_{t=0} = \phi(x,y,z), & (x,y,z) \in \Omega, \\
\left(\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + \sigma u \right) \Big|_{\partial\Omega} = \mu(x,y,z,t).
\end{cases}
\tag{1.2.4}
$$

对于不含时间变量的方程,通常不能附加初值条件而只附加边界条件,这样的问题叫边值问题.附加第一、二、三类边界条件的偏微分方程的边值问题分别称为第一、二、三类边值问题.对于 Laplace 方程,人们习惯上把对应的第一、二、三类边值问题分别称为 Dirichlet 问题,Neumann 问题和 Robin 问题.假设 Ω 是有界闭域,在 Ω 内讨论的边值问题称为内问题,在 Ω 外讨论的边值问题称为外问题.如流体力学中研究的圆柱绕流问题,要求围绕柱体的水流的速度场 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x,y,t)$.若流场无漩,则速度有势函数,即有函数 u 使得 $\boldsymbol{v} = \nabla u$.进一步,假定流体是不可压的,即 $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$,则势函数 u 满足 Laplace 方程.由于沿着柱体表面的水流速度是零,故这是一个 Neumann 外问题

$$
\begin{cases}
\Delta u = 0, & (x,y,z) \in \Omega^c, \\
\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0,
\end{cases}
\tag{1.2.5}
$$

其中 Ω^c 表示柱体 Ω 的外部.还可以提其他类型的外问题或更一般无界区域上的边值问题.

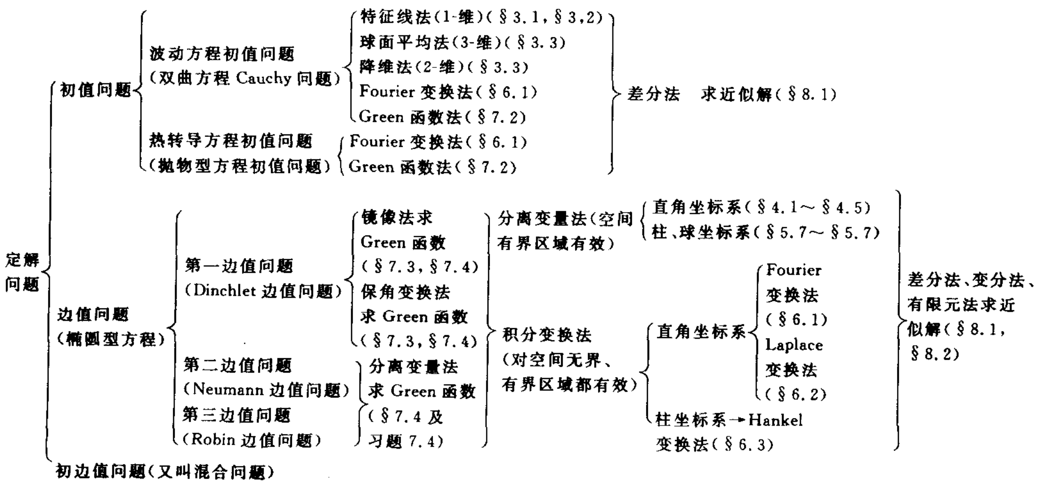


图 1.2.1