杜亚斌 著

高等院校经济学管理学系列教材

金融建模

Financial Modeling

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

杜亚斌　著

高等院校经济学管理学系列教材

金融建模

Financial Modeling

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

金融建模/杜亚斌著. —北京：北京大学出版社，2015.6
(高等院校经济学管理学系列教材)
ISBN 978-7-301-25708-1

Ⅰ.①金…　Ⅱ.①杜…　Ⅲ.①金融—经济模型—高等学校—教材　Ⅳ.①F830.49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 084311 号

书　　名	金融建模
著作责任者	杜亚斌　著
责 任 编 辑	杨丽明　王业龙
标 准 书 号	ISBN 978-7-301-25708-1
出 版 发 行	北京大学出版社
地　　址	北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址	http://www.pup.cn
电 子 信 箱	sdyy_2005@126.com
新 浪 微 博	@北京大学出版社
电　　话	邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 021-62071998
印 刷 者	北京鑫海金澳胶印有限公司
经 销 者	新华书店
	787 毫米×1092 毫米　16 开本　21.5 印张　537 千字
	2015 年 6 月第 1 版　2015 年 6 月第 1 次印刷
定　　价	49.00 元

前　言

金融学研究经济中的货币资金运动。经济活动一方面可以看作是产品的生产、流通和销售过程，另一方面可以看作是以投资为起点、以投资收回为终点的货币资金运动过程。

货币资金在运动中有现金和有价证券(债券和股票)两种基本形态。现金来自销售或融资，用于支付和投资。现金运动涉及流动性风险和市场风险。前者与现金不足和资产不能按买价转让有关，后者与资产市场价格变化有关。

有价证券是发行人的融资工具，投资者的金融资产。有价证券的发行和投资产生金融资产的定价和风险管理问题。资产价格是发行主体未来现金流的现值，因此，资产定价涉及对发行主体未来现金流的估计和贴现率的确定问题。而风险来自发行主体未来现金流和对应贴现率的不确定性，以及未来证券市场供求关系的变化，前者产生信用风险和利率风险，后者产生市场风险和流动性风险。

金融资产除了货币(外汇)、债券和股票之外，还包括以这些资产为基础的金融衍生证券，这些衍生证券又有自己独特的定价和风险问题。

因此，金融学作为研究经济主体的货币资金管理的学科，涉及金融资产定价、融资——投资方案设计(金融工程)和金融风险管理等领域。对这些领域的研究形成金融学的分支和各种具体的金融理论。

金融学是高度数量化的应用学科，其发展与概率论和数理统计的发展息息相关，因为资产定价和风险管理涉及估计证券发行主体的未来现金流的均值和波动性问题。而其应用学科的性质则要求所有的金融理论或模型都具备可在实践中应用的属性，这种可运用性在当代就是金融理论涉及的范畴可以数量化，范畴之间的关系可以表示为变量之间的关系，并通过计算机程序完成计算。

理论阐述范畴之间的因果关系，模型是因果关系的数量化。因为金融学的所有范畴都直接具有质和量两个方面的规定，所以，从某种意义上说，所有金融理论同时都是金融模型。金融理论的创立同时就是金融模型的创立。

但是，把理论中的金融模型转换为电子数据表模型和可以执行的计算机程序，还需要做更多和更深入的量化工作。这一工作是由金融建模来完成的。金融建模研究金融模型在计算机上的实现问题，是在计算机软件上构建实用金融模型的一门技术。

金融建模使用的计算机软件主要是电子数据表和计算机程序。其中，电子数据表主要是微软公司的 Excel，计算机语言主要使用 C＋＋、Matlab、S－plus 和 VBA 等。VBA 是微软公司主要为非专业程序员的 Excel 用户开发对象导向语言，用于增强 Excel 的功能，有内置于 Excel、不用支付额外费用和相对简单的优点，是一般金融建模中使用最广泛的计算机程序。本书的金融建模就是以 Excel 和 VBA 为工具的。

这本书的目的是在对金融模型高度量化的基础上，展示使用 Excel 和 VBA 构建数字化金融模型的各种方法。通过本书的学习，读者可以同时实现三个目标：

(1) 在高度数量化基础上掌握现代金融学的一些基本模型；

(2) 掌握在计算机上构建数字化金融模型的技术和方法；

(3) 提高 Excel 和 VBA 的操作能力。

因为 Excel 和 VBA 是金融业使用最广泛的计算机软件,所以,本书可以帮助大学金融专业学生为未来的职业生涯作好准备,缩短从职场新手成长为熟练专业人员的时间。而对金融从业人员来说,则可以帮助他们提高工作效率,减少劳动强度,取得职场上的优势。

本书由 11 章正文和两个附录构成。本书各章的基本结构是:(1) 金融模型的数量化分析;(2) 使用 Excel 和 VBA 进行金融计算和构建数字化金融模型的方法。其中,第 1 章至第 3 章主要涉及固定收益证券的建模;第 4 章主要介绍金融资产的波动性建模问题;第 6 章至第 8 章讨论与组合投资有关的理论和建模问题;第 9 章至第 11 章主要解释与期权定价的理论和建模有关的问题。附录 A 和附录 B 分别对 Excel 和 VBA 作了简要介绍。

相较于笔者 2010 年出版的《金融建模》,本书的变化是:

(1) 几乎重写了所有章节的文字部分和公式推导部分。

(2) 新增了利率互换定价和金融资产波动性建模的内容。

(3) 将原来版本的关于二项式期权定价的第 7 章和第 8 章合并为一章,即第 9 章。

(4) 更新了几乎所有的 Excel 模型,并根据需要新增一些 Excel 模型。

(5) 新增了一些 VBA 代码。

(6) 重新编排了在书中展示 Excel 模型的方法,使其变得更简洁。

本书正文中提到的 Excel 模型都可以到北京大学出版社的网站上下载,地址为 www.pup.cn。

在此感谢所有选修我的金融建模课的学生,特别感谢在上课之余以各种方式对本书提出过修改意见的学生。北京大学出版社的姚文海编辑和杨丽明编辑为本书的出版付出了大量的艰辛劳动,我愿借此表示对他们的感谢之意。另外,我还要感谢我的家人邱鹭风和杜嫣在工作和生活中给予我的巨大帮助和鼓励。

目　录

第一章　利率和到期收益率

本章说明利息和到期收益率的计算方法及其如何在 Excel 和 VBA 中实现。其中，第一节讲解简单利息和复合利息的计算方法，第二节说明不同支付方式下到期收益率的计算方法；第三节讲解 Excel 中的利率和到期收益率的计算方法。

第一节　利　息　率

一、利息及其计算参数

货币具有两种使用价值：充当交易手段，用于商品和服务的交易；充当资本，用于实体或金融资产的投资。货币占有者在一定期限内将货币使用价值转让给他人使用的行为称为信用，前者为债权人或投资者，后者为债务人或融资者。利息是货币使用价值或简单地说是货币的转让价格，是以信用方式投资的收益，或以信用方式取得他人货币的费用。单位货币在单位时间内的转让价格即利率。信用的标准货币单位是 100 元，标准时间是 1 年，因此，利率 6%一般表示 100 元货币转让 1 年的价格。

利率作为融资费用率是债务凭证发行时货币的价格，作为投资收益率是债务凭证在发行和转让时货币的价格。融资费用率在债务期内是恒定不变的。尽管浮动利率债务在一个合同期内会定期对债务重新定价，但在各分期之内债务利率是固定不变的。投资收益率却会在到期前随货币市场供求而变化。当货币市场供大于求，凭证价格上升，凭证的投资收益率下降。反之，当货币市场供小于求，凭证价格下降，凭证的投资收益率上升。总之，融资费用率和投资收益率都是同一信用市场的市场利率，但是，前者是债权凭证发行时的市场利率，后者是债权凭证从发行至到期各时点上的市场利率。

由于存在以上差别，所以本节将分别从债务利率和投资收益率两个角度来考察利率的计算问题。首先说明作为融资费用的利率计量问题，然后再说明作为投资收益的利率计量问题。

债务利率的计算涉及面值、价格、计息期、期限、每期付款、支付频率和日数基准等要素。

面值(face value)是借据或债券等债权凭证所代表的货币。在债务到期时，债权人凭借据或债券向债务人索回与面值等额的资金，因此，借据或债券的面值又称为赎回价值(redemption)或清偿价值。

债券价格是交易时用债券市场利率对债券未来现金流贴现所得的现值，是债权的市场价值或货币占有者取得该债权的费用。债券发行价格涉及融资者和投资者之间的关系，债券流通价格涉及债券投资者之间的关系，与债务人无关。

计息期(interest period)是从开始计息到利息支付的时间，也就是货币出售一次的时间。现代社会货币出售的标准单位时间即利率的标准单位时间是年，因此行情表上的利率均为年利率。例如，“当前 3 月期借款利率为 4%”，表示当前借款 3 个月的利率按年计算为 4%。

计息期始于起息日(value date),终于结算日(settlement date)或结息日。固定利率债务只有一个结算日,而浮动利率债务在其生命期有两个以上的结算日。

期限(term)是债务合同从生效到失效的时间,即债务的生命期。生效日(effective date)是债权人将货币交付给债务人的时间,失效日(expiry date)是最后一次偿还债务本息的时间。债券的期限始于首个起息日,终于到期日(maturity date)。首个起息日常常也是发行日(issue date),但我国的首个起息日通常在发行日之后的两天。到期日是债券最后一次付息和债权人用债券赎回债务本金的时间。

期限小于等于1年的债务为短期债务,否则为长期债务。同一货币可以在一个期限内反复出售,因此,一个期限可以包括多个计息期。1年付息4次的1年期债务有4个计息期。因为计息期最长为1年,所以1年付息1次的债务的计息期数等于到期年数。

每期付款是计息期结束时债务人应支付给债权人的利息。在计息期结束债务人未对债权人支付利息的情况下,应付利息转化为债权人的追加放款或债务人的新增借款。

支付频率(frequency)是1年内的利息支付周期。长期国债一般1年支付2次,企业债券或工商业贷款一般1年支付1次。在借款人信用较差时,贷款的支付频率常常会增加到1年2次甚至4次。

日数基准(day count basis)指不同地区金融市场确定1个月和1年日数的惯例。日数基准主要有4类,见表1-1。举例来说,8月有31天,2016年为闰年,有366天,该月天数除以2016年全年天数所得年分数,在不同的日数基准下有不同的值。在贷款市场上,常常采取"实际/实际"的日数基准,在货币市场上,一般采取"实际/360"的基准。

表1-1　日数基准

序号	每月天数	1年天数	表示法	闰年8月的年分数
1	实际天数	实际天数	ACT/ACT	31/366=0.0847
2	实际天数	360	ACT/360	31/360=0.0861
3	实际天数	365	ACT/365	31/365=0.0849
4	30	360	30/360	30/360=0.0833

二、简单利率和复合利率

(一) 简单利率

将计息期小于1年的利率转化为年利率的公式是:

$$r_y = \frac{R_t}{100}\frac{B}{E} = r_t\frac{B}{E} \tag{1.1}$$

式中 r_y 是年利率,R_t 和 r_t 分别是计息期利息和利率,B 为全年天数,E 为计息期天数。

假如我们规定不论实际如何每月都是30天,每年都是360天,则

$$\text{隔夜利率} = \frac{1\text{日利息额} \times 360}{100}$$

$$3\text{月期利率} = \frac{90\text{日利息额}}{100} \times \frac{360}{90} = \frac{90\text{日利息} \times 4}{100}$$

$$6\text{月期利率} = \frac{180\text{日利息额}}{100} \times \frac{360}{180} = \frac{180\text{日利息} \times 2}{100}$$

债务期限大于等于1年的贷款则被看作多个1年期限贷款的重复,因此,

$$n\text{ 年期利率}=\frac{n\text{ 年利息额}}{100\times n}$$

把多期债务看作单期债务的简单重复时所计算的利率称为简单利率或单利。单利是在各计息期本金不变的条件下的利率，其一般公式是：

$$r_s=\frac{R}{P\times T}=\frac{R}{P\times D/B} \tag{1.2}$$

其中，r_s 是简单利率，P 代表本金，R 代表债务到期前的付息总额，T 代表期限年数，D 为到期天数，B 为 1 年的天数。因为在简单利率下债务的到期付款 F 的公式可以写为：

$$F=P+R=P(1+r_sT)=P\left(1+r_s\frac{D}{B}\right)$$

所以，简单利率的计算公式还可以写为：

$$r_s=\left(\frac{F}{P}-1\right)\frac{1}{T}=\left(\frac{F}{P}-1\right)\frac{B}{D} \tag{1.3}$$

本金 100 元，期限分别为 0.25 年、0.5 年、1 年和 3 年，每期付息分别为 1.5 元、3 元、6 元和 18 元，各笔贷款的简单利率见表 1-2：

表 1-2　简单年利率

T	P	R	$P\times T$	r_s
0.25	100	1.5	25	6%
0.5	100	3	50	6%
1	100	6	100	6%
3	100	18	300	6%

（二）复合利率

把两个对象合二为一称为复合。复合利息法是把上期利息并入当期本金来计算当期利息的一种方法，用这种方法计算的利息称为复合利息(compound interest)。

如果债务人在到期前各个结息日已经支付了各计息期利息，则简单利率准确地反映了资金的价格，因为在这种情况下债务人和债权人之间没有新的借贷关系发生。但是，如果债务人只是在到期时才一次性支付到期前的各计息期利息，即采取“到期前不支付利息，到期时一次还本付息”的方式支付利息，则复合利息就是唯一正确的利息计算方法，因为在这种支付方法中，到期前的应付未付利息都是债务人对债权人的追加借款。

但是，即使利息在各计息期结束时已经支付，按惯例利率还是要以复合方式来计算。这时，复合利率只是“货币具有时间价值”这种观念的产物，不涉及实际的债务债权关系。按照这种观念，货币是自我增值的价值，债务到期前的各分期利息都会自动加入到下一期本金中，债权人会自行将所得利息按原利率再投资，债务人会按原利率借款来支付到期前的利息，结果是债权或债务在观念上的不断膨胀。

用 T 代表债务到期年数，P 代表初始本金，F 代表到期本息，则债务按复合利率计算的到期本息为：

$$F=P\,(1+r)^T$$

由此得到到期一次还本付息债务的年复利公式：

$$r=\left(\frac{F}{P}\right)^{1/T}-1 \tag{1.4}$$

用复利公式计算表 1-2 中债务的利率，所得结果见表 1-3：

表 1-3 债务年复合利率

T	P	F	$1/T$	r_c
0.25	100	101.5	4	6.136%
0.5	100	103	2	6.090%
1	100	106	1	6.000%
3	100	118	1/3	5.672%

(三) 浮动利率下的单利和复利

浮动利率债务的利率定期按市场指数或市场利率调整，各计息期利率不同。按简单利率法计算，到期利息总额为：

$$R = P\left(r_1 \frac{E_1}{B} + \cdots + r_n \frac{E_n}{B}\right) = P\sum_{i=1}^{n}\left(r_i \frac{E_i}{B}\right) \tag{1.5}$$

其中，P 是债务本金，在计息期内保持不变，E_i是第 i 计息期的天数，B 为全年天数，n 为计息期数。浮动利率债务的期限为：

$$T = \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} E_i/B$$

各期利率之和除以期限为浮动利率债务的简单年利率：

$$r_s = \frac{R}{PT} = \frac{\left(r_1 \frac{E_1}{B} + \cdots + r_n \frac{E_n}{B}\right)}{\sum_{i=1}^{n} E_i/B} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i E_i/B}{\sum_{i=1}^{n} E_i/B} \tag{1.6}$$

在浮动利率债务按复利计息时，债务到期前的各期本金 P 为上期本息 F：

$$P_{t-1}\left(1 + r_{t-1} \frac{E_{t-1}}{B}\right) = F_{1-1} = P_t$$

计息期数为 $i=1, 2, \cdots, n$ 的浮动利率债务的终值为：

$$F_{t_1} = P_{t_1}\left(1 + r_1 \frac{E_1}{B}\right)$$

$$F_{t_2} = P_{t_2}\left(1 + r_2 \frac{E_2}{B}\right) = P_{t_1}\left(1 + r_1 \frac{E_1}{B}\right)\left(1 + r_2 \frac{E_2}{B}\right)$$

$$\cdots$$

$$F_{t_n} = P_{t_n}\left(1 + r_n \frac{E_n}{B}\right) = P_{t_1}\left(1 + r_1 \frac{E_1}{B}\right)\cdots\left(1 + r_{n-1} \frac{E_{n-1}}{B}\right)\left(1 + r_n \frac{E_n}{B}\right)$$

因为 $t_n=T$，所以，期限为 T 的债务年增值率或年复利为：

$$r_c = \left(\frac{F_{t_n}}{P_{t_1}}\right)^{1/T} - 1 = \sqrt[T]{\left(1 + r_1 \frac{E_1}{B}\right)\left(1 + r_2 \frac{E_2}{B}\right)\cdots\left(1 + r_n \frac{E_n}{B}\right)} - 1 \tag{1.7}$$

以上是实际复利，相关的等效复利是各分期利率的几何平均数，公式是：

$$\overline{r_i} = \sqrt[n]{\left(1 + r_1 \frac{E_1}{B}\right)\left(1 + r_2 \frac{E_2}{B}\right)\cdots\left(1 + r_n \frac{E_n}{B}\right)} - 1 \tag{1.8}$$

计息期平均复利 $\overline{r_i}$ 再乘以 1 年的计息期数 m 为年度复利。

三、等额分期偿还债务的利率

债务人在借款期内定期以等额方式偿还利息和部分本金的债务称为等额分期偿还债务。在等额分期偿还债务中，各个计息期不管实际天数是否相等，都被看作相同长度的时段，每期还款额包括本金和利息两部分。随着还款的进行和借款余额的不断减少，等额付款中的本金部分会越来越大，利息部分会越来越小。付款日可以在期初，也可以在期末，但一般在期末。

从现金流看，等额分期偿还债务等同于一个年金。年金是未来一定时期内一系列固定支付的现金流。支付发生在期初的是先付年金，发生在期末的是普通年金或后付年金，后者是一般形式。普通年金 A 和先付年金 A_b 的现值公式分别为：

$$A=\frac{C}{(1+r)^1}+\frac{C}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{C}{(1+r)^n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{C}{(1+r)^i} \tag{1.9}$$

$$A_b=C+\frac{C}{(1+r)^1}+\cdots+\frac{C}{(1+r)^{n-1}}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{C}{(1+r)^i} \tag{1.10}$$

其中，C 为每期付款，r 为利率，n 为总付款次数。因为 $(1+r)^0=1$，所以，先付年金现值公式中的第一项为 C。以下除了特别提及外，所说的年金都是普通年金。

年金现值还可表示为：

$$A=C\left[\frac{1-\dfrac{1}{(1+r)^n}}{r}\right] \tag{1.11}$$

式中等号右边方括号内的分式称为年金现值系数。式(1.11)的推导稍后给出。

在计息期数大于 4 时，年金利率没有解析解，只能用数值方法如牛顿迭代法计算。牛顿法的迭代公式为：

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{1.12}$$

这是因为函数 $f(x)=0$ 的泰勒级数展开式为：

$$f(x)\approx f(x_i)+(x-x_i)f'(x_i)$$

所以，由直线方程：

$$f(x)-f(x_i)\approx(x-x_i)f'(x_i)$$

可得：

$$x\approx x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

计算年金利率 r 的迭代公式为：

$$r_{i+1}=r_i+\frac{A(r_{i+1})-A(r_{i+1})}{A'(r_i)} \tag{1.13}$$

式中，$A(r)$ 为年金现值函数，$A'(r)$ 为该函数对 r 的一阶导数，公式为：

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}=\frac{-C}{(1+r)^2}+\frac{-2C}{(1+r)^3}+\cdots+\frac{-nC}{(1+r)^{n+1}} \tag{1.14}$$

公式的推导见第二章。下面我们用一个离散条件下的近似例子来说明迭代过程。

假定一个金额 10 万元的住宅抵押贷款，借款人每月还款额 1110.205 元，120 个月或 10 年后还清。现在借款人想知道该贷款的实际年利率，这意味着要发现下面等式的解：

$$\frac{1070.4579}{(1+r/12)^{1}}+\frac{1070.4579}{(1+r/12)^{2}}+\cdots+\frac{1070.4579}{(1+r/12)^{120}}-100000=0$$

该债务在不同利率下的现值与真实现值的差，见图 1-1：

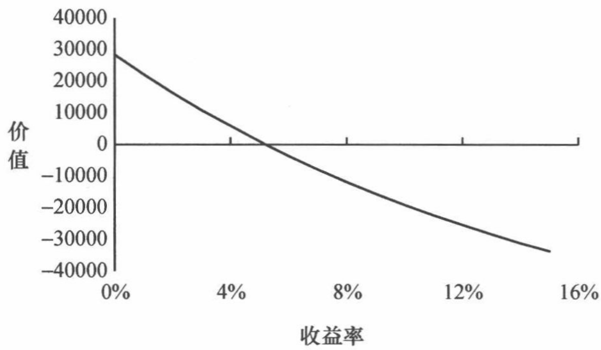

图 1-1 不同利率对应的债务现值与真实债务现值的差额(债务真实现值=100,000 元)

我们知道真实利率为图 1-1 中曲线与 x 轴的焦点上的利率，由图可知真实利率在 4%—8%之间。在没有图表帮助的情况下，我们可以随意假定一个猜测利率，然后用牛顿法快速地逼近真实利率。首先，我们做如下设置：

$$y=A(r_i)-A$$

$$x=r$$

$$\Delta y_i=A(r_{i+1})-A(r_i)$$

$$\Delta x_{i+1}=r_{i+1}-r_i$$

$$y'=\Delta y/\Delta x$$

其中，r_i为近似利率，$A(r_i)$是用 r_i计算的年金近似现值，A 为年金的真实现值，这里假定为 100,000。然后，我们用牛顿法来寻找最接近真实利率的近似利率。结果见表 1-4：

表 1-4 用牛顿法计算分期等额偿还债务的近似利率

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
	x_i	y	Δx	Δy	$\Delta x/\Delta y$	$y(\Delta x/\Delta y)$	x_{i+1}
1	2.00%	16337	0.0100	−5479	−0.0000018	−2.982%	4.982%
2	4.98%	1017	0.0022	−1017	−0.0000021	−0.220%	5.200%
3	5.20%	0	0.0080	−3580	−0.0000022	0.000%	5.200%

表 1-4 中的 $r_0=2\%$，y 为 16，337，由此得 $r_1=4.98\%$。将 4.98%代入牛顿法公式再次计算，y 为 1,017，由此得 $r_2=5.20\%$。再将 r_2代入牛顿法公式，y 为 0，这表明 5.20%即与真实利率最接近的利率。

现给出年金系数的推导。首先，我们来推导无限期债券的收益率公式：

$$P=\frac{C}{y} \tag{1.15}$$

其中，P 是债券价格，C 是每期付款，y 是到期收益率。无限期债券的现值公式为：

$$P=\frac{C}{(1+y)}+\frac{C}{(1+y)^{2}}+\cdots+\frac{C}{(1+y)^{k}}+\cdots \tag{1.16}$$

设

$$x=\frac{1}{1+y}$$

则式(1.16)变为

$$P=Cx+Cx^2+Cx^3+\cdots+Cx^k+\cdots$$

因为上式中的每一项 C 都相等，所以式(1.42)还可写为：

$$P=C(1+x+x^2+x^3+\cdots)-C \tag{1.17}$$

在等式(1.17)中，圆括号内几何级数的部分和为：

$$S_n=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}x^{i-1} \tag{1.18}$$

将上式两边同乘以 x，得：

$$xS_n=x+x+x^2+\cdots+x^n=\sum_{i=1}^{n}x^i \tag{1.19}$$

用式(1.18)减(1.19)，得到：

$$S_n-xS_n=1-x^n$$
$$S_n(1-x)=1-x^n$$
$$S_n=\frac{1-x^n}{1-x}$$

因为 $x<1$，故当 n 趋于无穷大时，部分和 S_n 的极限为：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1-x} \tag{1.20}$$

将其代入式(1.17)，我们得到：

$$P=C\left(\frac{1}{1-x}-1\right)=C\left[\frac{1}{1-\frac{1}{1+y}}-1\right]=C\left[\frac{1}{\frac{y}{1+y}}-1\right]=\frac{C}{y} \tag{1.21}$$

然后，我们再利用上面的结果来推导年金系数即式：

$$P=C\left[\frac{1-\frac{1}{(1+y)^n}}{y}\right] \tag{1.22}$$

右边方括号内的分式。该系数可以用两个无限期债券收益率公式来推导。假定当前购买的无限期债券 1 有收益率，即：

$$P_1=\frac{C}{y}$$

其中，C 为无限期债券的每期付款，y 为收益率。一个在 n 期时购买的无限期债券 2，在 n 期时的现值为 C/y，在当前的现值为：

$$P_2=\frac{C/y}{(1+y)^n}$$

从 P_1 中减去 P_2，即年金现值公式：

$$\frac{C}{y}-\frac{C/y}{(1+y)^n}=\frac{C}{y}\left[1-\frac{1}{(1+y)^n}\right]=C\left[\frac{1-\frac{1}{(1+y)^n}}{y}\right]$$

四、名义利率、有效利率和连续复利

(一) 名义利率和有效利率

利率按是否考虑了年计息频率而分为名义利率和有效利率。假定有一笔金额 100 元、期限 1 年、到期还本付息的债务,每半年付息 3 元,1 年付息 6 元。因为标准计息期是 1 年,因此,这时产生了按标准计息期计算这一债务的利率是多少的问题。按简单利率法计算该债务的年利率为 6/100=6%,但是按复利法计算该债务的年利率为 6.09%。在复利法下,该债务前后 6 个月的本息分别为:

$$F_{0.5} = 100 \times (1 + 6\%/2)^{0.5\times 2} = 103$$
$$F_{1.0} = 103 \times (1 + 6\%/2)^{0.5\times 2} = 106.09$$

或

$$F = 100 \times (1 + 6\%/2)^{0.5\times 2} (1 + 6\%/2)^{0.5\times 2} = 100 \times (1 + 6\%/2)^2 = 106.09$$

将上面的计算一般化,在年付息频率大于 1 时,债务的到期本息为:

$$F = P(1 + r_n/m)^{tm}$$

其中,m 为付息频率,t 为年数,r_n 为名义利率。在 $t=1$,R 为全年付息总额时,有:

$$F = P\,(1 + r_n/m)^m$$
$$P + R = P\,(1 + r_n/m)^m$$
$$R = P\,(1 + r_n/m)^m - P$$

上式等号两边同除以初始本金 P,得有效利率公式:

$$r_e = \left(1 + \frac{r_n}{m}\right)^m - 1 \tag{1.23}$$

可见,有效利率是按复利计算的各期利息之和与债务初始本金之比,其理论基础仍是货币的时间价值论。按照这一理论,不论实际情况如何,半年末支付的 3 元钱到年末的时间价值必定为 3.09(3+3×3%)元。另外,有效利率的计算也可说是基于这样一种假定:债务人始终是按固定利率借款来支付年内各期利息,而债权人则始终是按固定利率来实现到期前利息的再投资。

通过下面的步骤可将式(1.23)转化为名义利率公式:

$$r_e + 1 = \left(1 + \frac{r_n}{m}\right)^m$$

$$\sqrt[m]{r_e + 1} = 1 + \frac{r_n}{m}$$

$$r_n = m(\sqrt[m]{r_e + 1} - 1) \tag{1.24}$$

(二) 连续复利

当一年内的结息次数 m 趋于无穷大时,有效利率转化为连续复合利率:

$$r_e = \mathrm{e}^r - 1 \tag{1.25}$$

其中 r_e为按连续复利法计算的有效利率,是年利息之和与债务初始本金之比,e^r为连续复利系数。连续复利系数的推导如下:设 $m=nr$,代入式(1.23),得:

$$r_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{r}{nr}\right)^{nr} - 1 = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^r - 1$$

因为

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

所以

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{r}=\mathrm{e}^{r} \tag{1.26}$$

式中，r 为名义利率，$r_e=\mathrm{e}^r-1$ 为年计息频率趋于无穷大时的有效年利率。

连续复利系数也可以从微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=rP \tag{1.27}$$

中导出。式中 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 是本金 P 相对于时间 t 的增值率，$\mathrm{d}t$ 是时间增量，$\mathrm{d}P$ 是本金增量，r 为常数，是本金增值率与初始本金 P 的比率，即 $r=(\mathrm{d}P/\mathrm{d}t)/P$，也就是上面所说的名义年利率。对方程(1.27)分离变量，两边积分，得到方程的解：

$$\frac{\mathrm{d}P}{P}=r\mathrm{d}t$$

$$\int\frac{\mathrm{d}P}{P}=\int r\mathrm{d}t$$

$$\ln P=rt+c$$

令任意常数 $c=\ln(P_0)$，两边取指数，即得连续复利系数：

$$\mathrm{e}^{\ln P}=\mathrm{e}^{rt}\ \mathrm{e}^{\ln P_0}$$

$$P=P_0\ \mathrm{e}^{rt}$$

$$\frac{P_t}{P_0}=\mathrm{e}^{rt}$$

因此连续复合下的有效利率为：

$$\frac{P_t}{P_0}-1=\mathrm{e}^{rt}-1=r_e \tag{1.28}$$

名义利率为：

$$\ln\frac{P_t}{P_0}=\ln\mathrm{e}^{r}=r \tag{1.29}$$

上式表明，如果名义年利率为 r，则只有在连续复合下，P_0才可能在 1 年内增值为 P_t。

第二节　到期收益率

从投资者角度看，利息是投资收益，利率是投资信用资产的收益率。“收益率”一词有多种含义，例如，按投资时债券的当期收益与购买价格计算的当前收益率；在到期前出售债券所得的持有期收益率，等等。但是，只有投资者将所购债务工具持有到期所得的收益率，即到期收益率(yield to maturity，YTM)，才是投资金额的年平均增值率或年利率。

本节所说的收益率，除非特别指出，都仅指到期收益率，包括从附息债券的到期收益率中导出的零息债券收益率。

一、不同支付方式下的债券到期收益率

(一) 贴现债券

贴现债务是期限不超过 1 年的短期债务工具，因其价格等于票面值减去一定贴现额，故

称贴现债券，主要包括短期国债、短期票据、银行承兑汇票和贴现贷款等。

贴现债券的利息等于其面值与市场价格的差额。年度化利息与债券面值之比称为银行贴现率 y_{DIS}，其公式是：

$$y_{\mathrm{DIS}}=\frac{F-P}{F}\frac{B}{D} \tag{1.30}$$

其中，F 是债券面值，P 是债券的发行价或市场价，B 是由日数基准决定的全年天数，D 是结算日与到期日之间的天数，即剩余天数。这里的结算日是指债券买方付款给卖方从而取得债券所有权的时间，而不是计息期结束时的利息结算时间。

贴现债券的到期收益率公式是：

$$y=\frac{F-P}{P}\frac{B}{D} \tag{1.31}$$

这是贴现债务投资资金的年增值率或年利率。式(1.31)计算的是简单到期收益率。复利条件下的贴现债务终值公式为：

$$F=P\,(1+y_C)^t=P\,(1+y_C)^{D/B} \tag{1.32}$$

解得：

$$y_C=\left(\frac{F}{P}\right)^{B/D}-1 \tag{1.33}$$

贴现债务的连续复利终值公式为：

$$F=P\,\mathrm{e}^{yD/B} \tag{1.34}$$

连续复利下投资金额的年增长率为：

$$y_c=\frac{F}{P}-1=\mathrm{e}^{yD/B}-1 \tag{1.35}$$

按连续复利计算的年投资收益额为：

$$R=P\,\mathrm{e}^{yD/B}-P$$

对上式两边同除以债券价格，同样可以得到按连续复利计算的到期收益率：

$$y_c=\mathrm{e}^{yD/B}-1$$

而贴现债务在连续复利下的简单利率为：

$$\ln(y_c+1)=\ln\left(\frac{F}{P}\right)=ln\ \mathrm{e}^{yD/B}=y\frac{D}{B}$$

$$y=\ln\left(\frac{F}{P}\right)\frac{B}{D} \tag{1.36}$$

（二）零息债券

零息债券是到期一次还本付息债券，如我国货币市场的短期融资券。如前所述，债券发行人到期应付本息为：

$$F+R_T=F\left(1+r\frac{T}{B}\right)$$

其中，r 是债券票面利率，R_T 是到期所得利息，T 为剩余付息期天数，B 为 1 年天数。而在结算日(债券购买日)投资人按全价计算的本金和总收益为：

$$(P+a)+Y_T=(P+a)\left(1+y\frac{D}{B}\right)$$

其中 P 是债券净价，a 是应计利息，即利息中归债券出售者的部分，P 加 a 等于债券全价，y