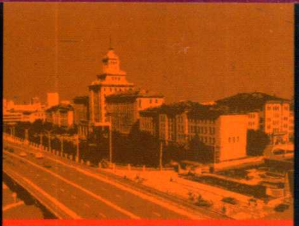


世界数学元典丛书

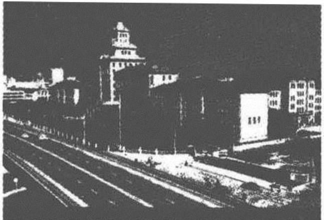
“十二五”国家重点图书

Set Theory

集论

[德] 豪斯道夫 著 张义良 颜家驹 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



世界数学元典丛书

“十二五”国家重点图书

集论

Set Theory

[德] 豪斯道夫 著

张义良 颜家驹 译

哈尔滨工业大学出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

全书共分十章.第一章至第四章讨论集及其结合,集的势、型及序数;第五章讲集系,内容包括环、体、Borel集及Suslin集;第六章和第七章为点集论,而Borel集及Suslin集在此获得进一步的阐述;第八章为空间的映象;第九章是实函数;第十章是比较近代的材料,内容包括Baire条件及半单叶映象.书末有一个附录,其中所列也是较新材料,但不加证明,作为正文中有关部分的参考.

本书对Borel集,Suslin集以及Baire函数有较完全的处理,对连续映象及同胚也讲得比较深入.本书适合大学师生及广大数学爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

集论/(德)豪斯道夫著;张义良,颜家驹译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.1

ISBN 978-7-5603-5480-4

Ⅰ.①集… Ⅱ.①豪…②张…③颜… Ⅲ.①集论 Ⅳ.①O144

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第288661号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 李 欣
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张18.75 字数355千字
版 次 2016年1月第1版 2016年1月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5480-4
定 价 48.00元

◎ 三版序言

集论的不断蓬勃发展，使著者很想把本书再重写一次；由于一些客观原因，不得不放弃此想. 因此前九章几乎是二版的无所更动的再版. 但为了使这期间获得的进展至少部分地在此得到应有的反映，著者在新添的第十章中详细阐述了两个题材(这些是著者觉得特别应该重视的)以及在附录中不加证明地介绍了另外三个内容；如果不是受篇幅的限制，所涉范围原是可以大大扩充的.

◎二版序言摘录

本书试图通过详尽地论证阐明集论中一些最重要的理论，使通篇不需另外的辅助材料，但却有由此进研广泛文献的可能. 对于读者，只假定具备微积分的初步基础，不必有更高深的数学知识，但应有一定的抽象思考敏锐力，大学二三年级学生读之可望获得成效. 个别章末的较难材料，初学时不妨略过；读者若只欲得知点集论的梗概，则在浏览前两章之后即可读第六章. 对于专家们，希望至少就形式方面，特别是通过定理的加强，证明的简化，以及多余假设的取消等方面向他们提供一些新东西.

对范围如此广博且尚在日益扩展中的本门学科，材料的选择不得不多少带有主观性，且许多愿望（包括著者的在内）都无法满足；教本固不能希冀专著的完备性. 再者，照本书目前的规模，较之第一版要求在取材范围上大加限制，以致就连最小的部分也得有所更动，结果著者就索性重新写过了. 在第一版的材料中，相信首先可删除的是比较独立的有序集理论（除一小部分仍予保留外），其次是 Lebesgue 测度与积分理论初阶，关于这些内容，都不乏别的著作. 此外的一些删节也许将被认为是可惜的，那是为了进一步节省篇幅，在点集论里舍弃了拓扑论点（原先的讲法，显然会使第一版博得多方好评）而限制在尺度空间的较简单的理论上，对此，第八章 §6 关于拓扑空间的概述是不足抵补的.

最后，在专门性的理论方面，著者也做了如上的同样限制而删去了欧氏空间的特殊理论（例如关于平面曲线的 Jordan 定理），即几乎所有建立在迫近多边形及多面形上的理论都删掉了；读者虽还能遇到大量关于欧氏空间的定理，但都只是以欧氏空间为可离空间或完全空间或局部连通空间等的特殊情况而对之成立的．——这些删节，使我们有可能对 Borel 集，Suslin 集（1917 年发现）以及 Baire 函数做比较全面的处理；连续映照及同胚亦较以往讲得深入些．至于有关矛盾及基础评论方面的讨论，和以往一样，现在仍不打算列入．

目录

前　注

实数区间,按各端点是否也算在内,分别用方括弧或圆括弧记之.故若 $a<b$,则

$$[a,b],[a,b),(a,b],(a,b)$$

分别表示满足下列条件

$$a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant x<b,a<x\leqslant b,a<x<b$$

的数 x 所成的集.$[a,b]$ 称为闭区间,(a,b) 称为开区间,其余两个称为半闭的或半开的.对于单侧无限区间(闭的及开的半直线)我们采用不属于区间的非固有端点 $+\infty$, $-\infty$,则有

$$[a,+\infty),(a,+\infty),(-\infty,b],(-\infty,b)$$

分别是满足下列条件

$$x\geqslant a,x>a,x\leqslant b,x<b$$

的数 x 所成的集.$(-\infty,+\infty)$ 是由所有实数(整个直线)所成的集.

有限多个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的最大者和最小者分别称为极大和极小,记作

$$\max[x_1,x_2,\cdots,x_n],\min[x_1,x_2,\cdots,x_n]$$

例如 $\max[2,-3]=2$, $\min[2,-3]=-3$, $\max[2,2]=\min[2,2]=2$.同理,若无限多个数中有最大者及最小者存在,则仿此记之.

若一实数列 $x_1,x_2,\cdots$ 是向上有界的,就是说,如果有这样的数 v 存在,对于任一 n 总有 $v\geqslant x_n$ 成立,则这种数 v 中必有一最小的 v_1,此数一般称为数列 x_n 的上限(Weierstrass;也有称为上界的);我们把它译作上确界(Supremum)并写成

$$v_1=\sup[x_1,x_2,\cdots]=\sup x_n$$

例如 $\sup\left[0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\cdots\right]=\sup\frac{n-1}{n}=1$. 若数列有极大，则上限与极大合一. 同样可以定义向下有界数列的下限或下确界(Infimum)

$$u_1=\inf[x_1,x_2,\cdots]=\inf x_n$$

相应的记法适用于非数列形式的数集，如

$$\sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$$

对于一个向上有界的数列，所有下列上限

$$v_n=\sup[x_n,x_{n+1},x_{n+2},\cdots]$$

都存在，且 $v_1\geqslant x_2\geqslant\cdots$；如果这些 v_n 是向下有界的，且 v 为其下限之值，则称此值为数列 x_n 的上极限或上限的极限(limes superior)，记作

$$v=\lim\sup x_n=\overline{\lim}\, x_n$$

仿此可以定义下极限或下限的极限(limes inferior)

$$u=\lim\inf x_n=\underline{\lim}\, x_n$$

当有界性的假定不成立时，则采用记号 $\pm\infty$. 例如对于一个向上无界的数列 x_n，则令 $\sup x_n=+\infty$，$\overline{\lim}\, x_n=+\infty$；对于一个向上有界但其上述上限 v_n 向下无界的数列 x_n，令 $\overline{\lim}\, x_n=-\infty$.

对于数列及函数的收敛我们照例沿用箭头符号，例如以

$$x_n\to x \text{ 表示 } \lim x_n=x$$

同样对于本义发散亦沿用此记号($x_n\to+\infty$，$x_n\to-\infty$).

一个关于自然数 $n(n=1,2,3,\cdots)$ 的命题，如果它从某一确定的 n 开始 $(n\geqslant n_0)$ 始终成立，或至多除了有限多个例外以外对所有 n 都成立，则称此命题为最后成立或对于几乎一切 n 成立(G. Kowalewski)；如果它对于无限多个 n 成立(例如对于 $n=2,4,6,8,\cdots$ 成立)，则称此命题为无限次成立. 当我们说到某数列 x_n 的几乎一切项或无限多项时，意思是指该数列中隶属于几乎一切 n 或无限多个 n 的那些项 x_n 而言，不管这些项相异与否.

第一章 集及其结合

§1 集

把一个个的东西集合起来成一整体，这样便形成一个集. 把许多东西一起当作一个单体考虑，这便是一个集. 这样的或类似的说法若欲当作集的定义，则我们有理由不同意，因为这是一种自相定义，甚至可说是以莫名定义莫名. 但是我们可以把它当作一种说明，当作是对原始的、人所公认的思维过程的指证，这种思维过程之演解为原始的过程也许是既不可能亦不必要. 我们将以此为满足，而把下面所说的当作基本事实：一事物 M 以特有的但不可定义的方式确定了某些别的事物 $a,b,c,\cdots$ 而这些事物又反过来确定了 M；这一关系用文字来表述便是：集 M 由事物 $a,b,c,\cdots$ 所组成.

一个集可以由某个自然数所表示的那么多个（即有限多个 —— 译者）事物组成，也可以由无限多个事物组成；我们分别称之为有限集或无限集. 某一城市的居民组成的集，太阳上氢原子的集，从 1 到 1 000 的自然数的集，这些都是有限集的例；另一方面，由所有自然数组成的集，直线上所有点组成的集，平面上所有圆组成的集，这些都是无限集的例. 从有限集推进到无限集是 Georg Cantor(1845—1918) 的不朽功绩，这是通过一系列内心的和外界的斗争而后完成的：对表面上显现的矛盾，对因袭的成见、哲学的武断（无限不存在），以及对普遍存在着的怀疑，而这就连当代的大数学家也不例外. Cantor 由此成为一门崭新科学 —— 集论 —— 的缔造者（因有限集的探讨固不出初等算术与组合论的范围），于今，集论已构成全部数学

的基础了. 就 Cantor 思想的这一胜利来说，据我们的看法，并未改变这一事实，即由于造集时的高度任意性而产生的一桩矛盾还需加以圆满的解释与消除.

一个事物 a 与它所属的集 A 之间的基本关系，依 G. Peano，我们用下面的文字和式子来表示

$$a \text{ 是 } A \text{ 的元：} a \in A$$

这断言的反面是

$$a \text{ 不是 } A \text{ 的元：} a \overline{\in} A$$

当且仅当两集中任一集的每一元都是另一集的元时(即当二者含有相同的元时)，方定义此二集相等，记作

$$A = B$$

据此，知一集是由它的元所单义确定的；此事可如此表出，即以写在花括弧里的元来表示这些元所组成的集，此时，凡未给出的元统以省略号示之，例如

$$A = \{a\}, A = \{a,b\}, A = \{a,b,c\}$$

分别是由一个元 a，两个元 a,b，三个元 a,b,c 所组成的集；而

$$A = \{a,b,c,\cdots\}$$

则是由元 a,b,c 以及(可能有的)其他元所组成的集. 这些由省略号表示的其他元到底应是什么，自然必须用某种方式加以给出，例如

自然数的集$\{1,2,3,\cdots\}$

偶自然数的集$\{2,4,6,\cdots\}$

平方数的集$\{1,4,9,\cdots\}$

2 的幂的集$\{1,2,4,8,\cdots\}$

质数的集$\{2,3,5,7,\cdots\}$

事物 a 与仅仅含此事物的集$\{a\}$，二者间的区分在概念上无论如何是必要的(即使实用上往往不要求)，因为单拿下述事实来说，已见有此必要：我们也容许有这样的集，这种集的元本身即是集(所谓集系). 集 $a = \{1,2\}$ 由两个元 1,2 所组成，而集$\{a\}$ 是由一个元 $a = \{1,2\}$ 组成的.

为方便计，也容许有集 0，所谓零集或空集，这是不含任何元的集[①]. 据集的相等定义知只有一个零集. $A = 0$ 的意义是，集 A 没有元，是空的，“消失了”. 要是不把零集当作集，则势将在无数情况中，只要我们讲到一集，就得添上一个附注：“如果此集是存在的”. 事实上，因为单凭一集的元的定义，往往还全不知道这样的元到底是否存在；例如，到现在还不知道能使方程

$$x^{n+2} + y^{n+2} = z^{n+2}$$

对自然数 x,y,z 可解的自然数 n 的集是否空集(即著名的 Fermat 定理是否真

① 记号 0 究竟表示零集还是数零，由出现处行文的上下联系，不致发生疑义.

确),故断言 $A=0$ 能表达一项实在的认识. 自然,在别的一些情况中也可能是件显见的事实;许多数学断言,甚至一切数学断言,若不惮烦琐,都可转化成 $A=0$ 的形式. 因此,零集的引入正如数零的引入一样,系出于方便合用的理由;另一方面,这也常常是为了要能明确地指说某集在一定理的假设下的不消失(正如某数的不消失).

设 A,B 为两集,则产生这样的问题,即其中一集的元是否也属于另一集. 若 a,b 分别表示 A,B 的元,则我们可先作出下列二交替,即:

每个 $a\in B$,并非每个 $a\in A$;

每个 $b\in A$,并非每个 $b\in B$.

经组合,由此得四种可能情况,其中前三种并用一附带的式子记之:

(1) 每个 $a\in B$,每个 $b\in A$:$A=B$;

(2) 每个 $a\in B$,并非每个 $b\in A$:$A\subsetneqq B$;

(3) 并非每个 $a\in B$,每个 $b\in A$:$A\supsetneqq B$;

(4) 并非每个 $a\in B$,并非每个 $b\in A$.

在情况(1) 中,据两集相等的定义知此二集确实相等. 在情况(2) 中,A 只包含 B 的元但并未包尽 B 的一切元,因此,A 有作为较小的集,B 有作为较大的集的特征;我们用记号 $A\subsetneqq B$ 记之,这里可回忆数值关系 $\alpha<\beta$. 在情况(3) 中,一切与(2) 相反,故为 $A\supsetneqq B$,也就是 $B\subsetneqq A$. 一般情况下出现的不是以上所说的任一种,而是情况(4),对此不需特别的记号.

"小于"这一关系是传递的,即由 $A\subsetneqq B$,$B\subsetneqq C$ 可得 $A\subsetneqq C$("大于""等于"两关系自然也一样).

若每个 $a\in B$,则情况(1) 和(2) 之一出现,合并[①]记之为

$$A\subseteq B,A\text{ 是 }B\text{ 的子集}$$

(亦称 B 的部分或部分集);若较强的关系 $A\subsetneqq B$ 成立,则有时称 A 为 B 的真子集,故在 B 的诸子集中,B 本身及零集都算在内;当 $A=0$ 时,则因事实上根本不存在 a,故关系

$$\text{每个 } a\in B$$

当然满足[②]. 此时,$0\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq 0$ 表示集 B 不空. 做这样的约定,其便利性例如在计数一有限集的诸子集时即可见到. $\{1,2,3\}$ 的子集为

$$0,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}$$

---

① 对此,许多著者并不保留等号,也有不用圆形不等号而用各种尖形符号的.

② 记得清楚些:断言"若 $a\in A$,则 a 亦 $\in B$"是真确的,因为 $a\in A$ 这一假定根本不成立. 若 p,q 是两判断,而 p 是错误的,则断言"若 p 是对的,则 q 也对"(由 p 得 q)一定真确. 从一错误判断可得任何判断;若 $2\times2=5$,则妖精存在.

共计 $8=2^3$ 个，n 个元的集，其含有 m 个元的子集计有 $\binom{n}{m}$ 个，这里，$\binom{n}{m}=\frac{n!}{n!\ (n-m)!}$ 为二项系数且 $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$；子集的总数共计

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

只此简单结果，已足说明上述子集概念的意义了.

若 $A\subseteq B$，则

$$B-A$$

表示 B 的元不属于 A 者的集；这个差也称 A 在 B 中的余集. 显有

$$B-0=B, B-B=0$$

$$B-(B-A)=A$$

这里应加申明，因为别的著者不是这样，即在构成差时，我们总假定减集是被减集的子集. 例如 $C-(B-A)$，当先假定 $A\subseteq B$，然后假定 $B-A\subseteq C$. 例：设 $A=\{5,6,7,\cdots\}$ 为 5 以上的自然数集，$B=\{1,2,3,\cdots\}$ 为一切自然数的集，$C=\{1,2,3,4,5,6\}$ 为前 6 个自然数的集，则 $B-A=\{1,2,3,4\}$，$C-(B-A)=\{5,6\}$.

§2 函 数

函数概念差不多同集概念一样基本和原始，函数关系之由元偶构成正如集由单个的元构成一样.

替代单个的元，我们考虑按一定次序并立的两个元（或称有序元偶）(a,b)，其中 a 是第一元，b 是第二元. 两个这样的有序元偶，当且仅当它们具有相同的第一元和相同的第二元时，方为相等

$$(a^*,b^*)=(a,b)\quad（当且仅当\ a^*=a, b^*=b\ 时）$$

据此，则当 $a\neq b$ 时，元偶 (a,b) 与 (b,a) 不等；另一方面，并不妨碍用两个相同的元作成有序元偶 (a,a). 例如组合自然数，得下列有序元偶

$$(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(2,2),(3,1),\cdots$$

这类元偶乃矩阵或行列式中元的双指标. 组合实数则得有序数偶 (x,y)；以此作为笛卡儿坐标（横坐标 x 与纵坐标 y 不得交换），则可表示平面上的点.

有序元偶 (a,b) 是一个与集 $\{a,b\}$ 不同的概念；后者的 a,b 乃假定相异，且与次序无关.

有了有序元偶，就可引入函数概念，且在引入集的相乘（本章 §4）与集的

序(第三章 §1)诸概念时亦将用到. 设 P 是一个由有序元偶 $p=(a,b)$ 组成的集;对于 P 中出现的每一个元偶 $p(p\in P)$,我们将称 b 为 a 的映象,a 为 b 的原象,并设 A 为所有原象 a(即所有元偶 $p\in P$ 的第一元)组成的集,B 为所有映象 b(即所有元偶 $p\in P$ 的第二元)组成的集. 据此则每个 a 决定其映象(一般不止一个),每个 b 决定其原象(一般不止一个);这是一个由元偶集 P 造成的介于集 A 与集 B 之间的联系:我们说,这里发生了一集在另一集上的映射.

在特殊情况下,每个 a 只有唯一的映象 b,则此被 a 决定且与 a 相关的元 b 我们以

$$b=f(a)$$

记之,并称它是一个定义在集 A 中的 a 的单义函数. 例如由元偶(1,2),(2,1),(3,2)组成的集定义了集 $A=\{1,2,3\}$ 在集 $B=\{1,2\}$ 上的一个映射,且在集 A 中是一单义函数,即

$$f(1)=2,f(2)=1,f(3)=2$$

此外,若每个 b 也只有唯一的原象 a,则此被 b 决定的元 a 我们以

$$a=g(b)$$

记之,并从而得到一个定义在 B 中的 b 的单义函数. 此二函数的任一个称为另一个的逆或反;二者称为单义可逆或一一对应;处于 A 与 B 间的映射称为一一对应的或单叶的,并称具有如此关系的两集 A,B 是对等的,记作

$$A\sim B,B\sim A$$

这个对等的基本概念将构成第二章的基础;这里仅举自然数集 A 与正偶数集 B 间的对等为例. 由有序元偶

$$(1,2),(2,4),(3,6),\cdots$$

组成的集造成如此的一一对应关系,即每个自然数 a 对应其映象 $b=2a$,每个偶数 b 对应其原象 $a=\frac{1}{2}b$.

若元 a 有好多个映象,则记号 $b=f(a)$ 在下述意义下仍可保留,即 $f(a)$ 不是表示唯一的一个而是许多个(也许无限多个)元 b;于是我们得一多义函数 $f(a)$. 相应的解释适用于 $g(b)$;二者(一般是多义函数)现在还是称作互逆. 一个常遇的情况是:$f(a)$ 虽是单义的,但反函数 $g(b)$ 则是多义的. 例如当 a 走遍所有实数时,有序元偶$(a,\sin a)$所成的集定义了集 A(由所有实数组成)在集 B(由数 $-1\leqslant b\leqslant 1$ 组成)上的这样一个映射:$b=\sin a$ 虽是单义的,但 $a=\arcsin b$ 则大家知道是多义的,就是说 $\arcsin b$ 不仅表示一个数 $a_0(b=\sin a_0)$,而是同时表示了所有的数 $2k\pi+a_0$ 及$(2k+1)\pi-a_0$(k 为整数). 若将 a 限制在区间 $-\frac{\pi}{2}\leqslant a\leqslant\frac{\pi}{2}$ 上,则两集间的关系就成为单义可逆的了.

这里所给函数概念的定义,对迄今还局限于初等函数(且总是连续的)的

初学者似觉有些抽象，但为了使这一基本概念不受任何约束并赋以应有的普遍性，这样的定义是必要的. 在单义函数方面只有一点是主要的，即 $f(a)$ 是一个按照某一规则（这里是借元偶集 P 给出的）由 a 完全决定的元，至于此规则能否用“解析式”或其他方法加以确定，都不是主要的，而且我们的知识和工具是否容许我们即使仅仅对于一个 a 把 $f(a)$ 的实际确定作出来，同样不是主要的. 这里关于普遍函数概念（Dirichlet 建立的）所作的说明，也正是对 Cantor 的集概念所要说的. 有理数集是完全定义了的，虽然我们并不知道 π^π 是否属于这个集，而函数 $f(a)$ 当 a 为有理数时等于 1，a 为无理数时等于 0，也是完全定义了的，虽然我们并不知道 $f(\pi^\pi)$ 的值.

§3　和与交

设 A,B 为两集，则它们的和

$$S=A\dotplus B$$

是指由所有不属于 A 即属于 B（或同时属于二者）的元所组成的集，它们的交

$$D=AB$$

是指由所有同时属于 A 与 B 的元所组成的集. 当 $D=0$ 时，亦即 A,B 两集无公共元时，称此两集为彼此互外或互不相交；在这种情况下，我们也用

$$S=A+B$$

来记它们的和，并注意此时显然成立：$S-A=B,S-B=A$①.

例 1　设 A 为区间②$[1,3]$，即满足 $1\leqslant x\leqslant 3$ 的实数 x 的集，同样，B 为区间$[2,4]$. 则 S 为区间$[1,4]$，D 为区间$[2,3]$.

若 A,B 为有限集且互不相交，又 A 由 m 个元，B 由 n 个元组成，则 $A+B$ 由 $m+n$ 个元组成.

今有

$$S-A=B-D,S-B=A-D$$

第一式的集即是一切只属于 B 而不属于 A 的元所组成的集，第二式反之，故有

$$D=B-(S-A)=A-(S-B)$$

即交可借和与差来构成.

和、交两个构成，可直接推广到任意多个（有限多或无限多）集上去. 作为

---

① 也有把和称为联合或联合集的；又即使加项并非互不相交，也有仍用简单加号的（没有帽点）. 符号“$\dotplus$”系 C. Carathéodory 所引入.

② 关于区间的记法，可参阅“前注”.