第三篇 积 分 学

本篇将討論一种在理論上和实踐上极为重要的数学工具——积分。为了使讀者能够理解积分本质，掌握它和运用它，所以在处理材料时，不是形式地按照定积分、二重积分、三重积分、第一类曲綫积分、……等次序孤立地进行叙述，而是按照它們之間的內在联系，以統一的观点有重点地叙述。积分的本质是一个具有特殊結构的和式的极限，在各种积分中，这种和式的极限只是表現形式不同而已。因此在叙述时，我們首先把定积分概念讲深讲透，然后将二重积分、三重积分、第一类曲綫积分、第一类曲面积分抓住其本质統一叙述。这样，就可把格林公式，奥斯特洛格拉得斯基公式及斯托克司公式統一起来，加以比較，体現了一个基本思想：函数在区域上的积分值，可以用它的“原函数”在边界上的值或积分来表示。

在本篇中，每个重要概念引入时，都将指出它的实际背景，然后提高到理論上来分析它們的本质，同时插入大量实例，使得讀者能够比較好地掌握教材內容，学会解决实际問題的方法。

第一章 不定积分

§1 不定积分与它的簡单計算方法

在上一篇中討論了导数与微分，它是由給定的函数求出其导数或微分。但是，在科学、技术的許多問題中，常常需要解决相反的問題，就是要由一个函数的已知导数，求出这个函数。例如在上一篇中，我們假定已知物体的运动方程 $s=s(t)$，用微分法求得其速度 $v=\frac{ds}{dt}$，然后找出其加速度 $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$. 但是实际上，往往还需要解决反面的問題：已給定加速度 a 是时間 t 的函数，而要求确定速度 v 及其所經过的路程，这样就需要由已知的函数 $a=a(t)$ 还原出一个函数 $v=v(t)$，而它的导数就是 $a(t)$，然后从求得的 $v(t)$ 再求出函数 $s=s(t)$，而它的导数就是 $v(t)$.

一般地，我們給出如下的定义：

定义 若在某一区間上，$F'(x)=f(x)$，則在这个区間上，函数 $F(x)$ 叫做函数 $f(x)$ 的原函数。

显然，从定义可知，一个函数的原函数不是唯一的，因为 $[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$ （C 为任意常数），所以若函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的原函数，則 $F(x)+C$ （C 为任意常数）也是 $f(x)$ 的原函数。反过来，由第二篇第二章拉格朗日定理的推論可知，如果两个函数 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，那末它們至多相差一个常数項，所以 $F(x)-G(x)=C$，因此函数 $f(x)$ 的原函数的一般表达式为 $F(x)+C$.

称函数 $f(x)$ 的原函数的一般表达式为 $f(x)$ 的不定积分，記

为 $\int f(x)\,dx$。由上所述可見，求不定积分的运算就是求导数的逆运算。

回到一开始提出来的那个力学問題上，我們現在可以把它表示为

$$v=\int a(t)\,dt$$

及

$$s=\int v(t)\,dt.$$

如果討論的是等加速运动，在重力作用下，就有(g 为重力加速度)

$$v=\int g\,dt=gt+C_1$$

及

$$s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2,$$

其中 C_1 与 C_2 均为任意常数。我們不难通过求导数来驗証这些等式的正确性。但是，如果需要完全确定的解决，还需要知道在某一时刻的速度以及在此时刻的路程。例如，已知 $t=t_0$ 时

$$v=v_0,\ s=s_0,$$

那末就可以定出

$$C_1=v_0-gt_0$$

及

$$C_2=s_0+\frac{1}{2}gt_0^2-v_0t_0,$$

从而得到

$$v=g(t-t_0)+v_0$$

及

$$s=\frac{1}{2}g(t-t_0)^2+v_0(t-t_0)+s_0.$$

习惯上称 t_0, s_0 及 v_0 分别是 t, s 及 v 的初始值。

作为导数的逆运算，很容易求得初等函数的不定积分，下面是最簡单的不定积分表：

1. $\int 0\,dx=C$;

2. $\int k\,dx=kx+C$ (k 为常数)；

3. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$;

4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$;

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;

6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;

7. $\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C$;

8. $\int \csc^2 x\, dx = -\operatorname{ctg} x + C$;

9. $\int \sec x \operatorname{tg} x\, dx = \sec x + C$;

10. $\int e^x dx = e^x + C$;

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$;

13. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$;

14. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$;

15. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$;

16. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

借助于积分法则可以把上面得到的积分表所适用的范圍加以扩充。最簡单的积分法則有以下三个：

一、若 a 是常数 $(a \neq 0)$，$f(x)$ 和 $g(x)$ 的原函数存在，则

$$\int a f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx.$$

即常数因子可以提到积分号外面来。

二、 $$\int[f(x)\pm g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx.$$

即函数之和(差)的不定积分等于两者的不定积分之和(差)。

三、若 $$\int f(t)\,dt=F(t)+C,$$

则 $$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

它們都不难从不定积分的定义証得。亦就是将等号右端求导，証明求导后所得的函数等于左端积分号下的函数。

利用这些簡单的法則及簡单积分表可以求得一些函数的不定积分。

[例 1] $$\int(6x^2-3x+5)\,dx$$
$$=6\int x^2\,dx-3\int x\,dx+5\int dx=2x^3-\frac{3}{2}x^2+5x+C.$$

[例 2] $$\int\frac{dx}{2x-1}=\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C.$$

[例 3] $$\int\frac{(e^x-1)(e^{3x}+2)}{e^x}\,dx$$
$$=\int(e^{3x}-e^{2x}-2e^{-x}+2)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{2}e^{2x}+2e^{-x}+2x+C.$$

在不定积分中，皆含有一个任意常数 C，它的几何意义是：如果我們已經知道曲綫的斜率 $m(x)$，即曲綫在每一点 x 处的切綫的斜率 $m(x)$，現在要求这个曲綫 $y=F(x)$，也就是說，这个曲綫应满足 $F'(x)=m(x)$. 由不定积分的定义，此曲綫的方程可求得，設 $F(x)$ 为 $m(x)$ 的一个原函数，有

$$y=\int m(x)\,dx=F(x)+C,$$

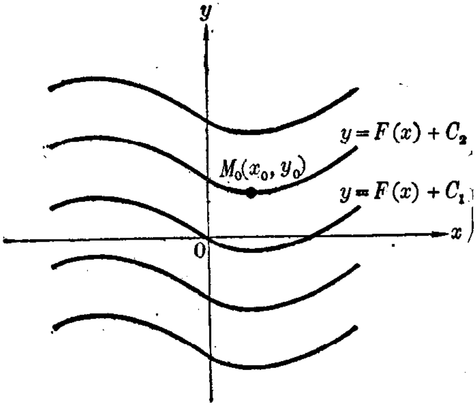

图 3-1-1

于是所得到的曲綫不是一条，而是相平行的一簇曲綫（图 3-1-1）。如果加上条件：要求此曲綫經过某一固定点 $M_0(x_0, y_0)$，那么即可定出此常数 C：

$$C=y_0-F(x_0),$$

于是曲綫便被唯一确定了。

§2 不定积分的計算

从上一节看到，虽然利用积分法則及簡单的积分表可以求出不少函数的原函数，但是实际上遇到的积分仅凭这一些方法还不能完全解决。例如

$$\int \cos^2 x \sin x \, dx$$

就无法求出。为了求得更一般的不定积分的計算，还需要引进更多的方法和技巧，下面我們先介紹不定积分的換元法和分部积分法，然后討論有理分式的部分分式法以及可有理化的积分等等。这样，就可以解决更多的不定积分的計算問題。

一、換元法

实际上，上节所讲的法則三是将要証明的換元法的很特殊的

情况，这里将推广到一般的情形。

例如要計算积分

$$\int \cos^2 x \sin x\, dx,$$

可以設想，由于

$$\sin x\, dx = -d\cos x,$$

那么上面的积分就可化为

$$\int \cos^2 x \sin x\, dx = -\int \cos^2 x\, d\cos x,$$

作代换 $t=\cos x$，上式右端即为 $-\int t^2\, dt$，可直接利用簡单积分表求得其原函数为 $-\frac{t^3}{3}$，再代回变量 x，即得原函数为 $-\frac{1}{3}\cos^3 x$。

下面对一般情形給以理論上的証明。

定理 1 設 $f(x)$，$\varphi(t)$ 及 $\varphi'(t)$ 都是連續函数，且

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C,$$

則

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = F(\varphi(t)) + C.$$

【証明】 我們所要証明的就是

$$F(\varphi(t)) + C$$

的导数即为

$$f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

現証明如下：

由假設

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C,$$

所以

$$F'(x) = f(x),$$

于是把 $F(\varphi(t))$ 視为复合函数

$$u = F(x),\ x = \varphi(t).$$

再利用复合函数求导法則可得

$$\frac{d}{dt}[F(\varphi(t))]=\frac{dF(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$
$$=F'(x)\cdot\varphi'(t)=F'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

这就証明了我們的定理。

[例 1] $$\int\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}dx=\int\operatorname{arc\,tg} x\,d(\operatorname{arc\,tg} x)$$
$$=\frac{1}{2}[\operatorname{arc\,tg} x]^2+C.$$

[例 2] $$\int\sin^3 x\,dx=\int(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$
$$=\int(\cos^2 x-1)\,d\cos x$$
$$=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C.$$

[例 3] $$\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln|\ln x|+C.$$

[例 4] $$\int\operatorname{tg} x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}$$
$$=-\ln|\cos x|+C=\ln|\sec x|+C.$$

[例 5] $$\int\sec t\,dt=\int\frac{dt}{\cos t}=\int\frac{\cos t\,dt}{\cos^2 t}=\int\frac{d\sin t}{1-\sin^2 t}$$
$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\sin t}+\frac{1}{1-\sin t}\right)d\sin t$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin t)^2}{\cos^2 t}+C$$
$$=\ln|\sec t+\operatorname{tg} t|+C.$$

它也可以由下法得出，即

$$\int\sec t\,dt=\int\frac{d(\sec t+\operatorname{tg} t)}{\sec t+\operatorname{tg} t}=\ln|\sec t+\operatorname{tg} t|+C.$$

看来虽然簡明，但不及上法自然。

定理2 設 $f(x)$ 連續，$x=\varphi(t)$ 及 $\varphi'(t)$ 均为連續，$x=\varphi(t)$ 的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 存在且可导，并且

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(t)+C, \tag{1}$$

則

$$\int f(x)dx=F(\varphi^{-1}(x))+C, \tag{2}$$

式中 $\varphi^{-1}(x)$ 为 $x=\varphi(t)$ 的反函数。

【証明】 将第(2)式右端求导同时注意到第(1)式，得：

$$\frac{d}{dx}[F(\varphi^{-1}(x))+C]=F'(t)\cdot[\varphi^{-1}(x)]'$$
$$=f[\varphi(t)]\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=f(x).$$

这样便証明了(2)式。

[例 6] 求

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

作代换 $x=a\sin t$，于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a\cos t}{a\cos t}dt=\int dt=t+C=\sin^{-1}\frac{x}{a}+C.$$

[例 7] 求

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

作代换 $x=a\operatorname{tg}t$，于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{a\sec^2 t\,dt}{a\sec t}=\int\sec t\,dt$$
$$=\ln|\sec t+\operatorname{tg}t|+C_1$$
$$=\ln\left[\operatorname{tg}t+\frac{1}{a}\sqrt{a^2+a^2\operatorname{tg}^2 t}\right]+C_1$$
$$=\ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}+C_1$$
$$=\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+C,$$

其中 $C=C_1-\ln a$。

[例 8] 求

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

作代换 $x=a\sec t$，于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{a\sec t\,\mathrm{tg}\,t}{a\,\mathrm{tg}\,t}dt$$
$$=\ln|\mathrm{tg}\,t+\sec t|+C_1$$
$$=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C,$$

其中 $C=C_1-\ln a$。

[例 9] 求

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$$

作代换 $x=\dfrac{1}{t}$，于是

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{-\dfrac{1}{t^2}dt}{\dfrac{1}{t^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}}=-\int\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}}$$
$$=-\sqrt{t^2+1}+C=-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+C$$
$$=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$$

[例 10] 求

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$$

作代换 $x=t^6$，于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3}{t+1}dt$$
$$=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C$$
$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C.$$

二、分部积分法

試討論可微函数 $u(x)$ 及 $v(x)$，利用已知的等式

$$(uv)'=u'v+uv',$$

或

$$uv'=(uv)'-u'v,$$

設 $u'v$ 或 uv' 中至少有一个具有原函数，则两边作不定积分的运算，卽得

$$\int uv'\,dx=\int (uv)'\,dx-\int vu'\,dx,$$

卽

$$\int uv'\,dx=uv-\int vu'\,dx$$

或

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

最后这个等式就称为分部积分公式。也称部分积分公式。一般說，适当的选擇 u, v 可使等式右边的积分要容易計算些。

[例 11] 求

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx.$$

利用分部积分法，有

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx&=x\cdot\operatorname{arc\,tg} x-\int x\,d(\operatorname{arc\,tg} x)\\&=x\cdot\operatorname{arc\,tg} x-\int\frac{x}{1+x^2}\,dx\\&=x\cdot\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.\end{aligned}$$

[例 12] 求

$$\int x^2\sin x\,dx.$$

利用分部积分法，有

$$\begin{aligned}\int x^2\sin x\,dx&=\int x^2d(-\cos x)\\&=-x^2\cos x-\int(-\cos x)\,dx^2\\&=-x^2\cos x+\int 2x\cos x\,dx.\end{aligned}$$

对等式右边的积分再施行分部积分法，即得

$$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2\cos x + 2\int x d\sin x$$

$$= -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C.$$

[例 13] 求

$$\int xe^{ax}dx.$$

利用分部积分法，有

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\int x\,de^{ax} = \frac{x}{a}e^{ax} - \frac{1}{a}\int e^{ax}\,dx$$

$$= \frac{x}{a}e^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax} + C = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C.$$

分部积分法还有另一种作用，对某些积分利用若干次分部积分法后，常常会重又出現原来要求的那个积分，从而成为所求积分的一个方程式，解出这个方程（把原来要求的那个积分作为未知量），就得到所要求出的积分。我們下面举一些例来說明分部积分法的这一作用。

[例 14] 求

$$I = \int\sqrt{x^2+a^2}\,dx.$$

利用分部积分法，有

$$I = \int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int\frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx + \int\frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - I + a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C_1.$$

此时在等式右边重又出現了我們原来要求的那个积分 I，由此方程解出 I，把它移到等式的左边，有

$$2I = 2\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C_1,$$

从而得到

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C,$$

其中 $C=\frac{1}{2}C_1$.

[例 15] 求

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx \text{ 及 } \int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

在这两个不定积分中，我們分别令

$$u=\cos bx,\ dv=e^{ax}\,dx$$

及

$$u=a\sin bx,\ dv=e^{ax}\,dx,$$

然后分别利用分部积分法得:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

这样一来，两个积分中的每一个积分都能用另一个积分来表达，由这两个式子解出，即得

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}+C.$$

同理可以証明:

$$\int\sec^3 x\,dx=\frac{1}{2}[\sec x\operatorname{tg} x+\ln|\sec x+\operatorname{tg} x|]+C.$$

总結以上数例，可知凡属于以下类型的不定积分，利用分部积分法，常可求得:

$$\int x^k\ln^m x\,dx; \qquad \int x^k\sin bx\,dx;$$

$$\int x^k\cos bx\,dx; \qquad \int x^k e^{ax}\,dx;$$

$$\int P(x)e^{ax}dx; \qquad \int P(\sin x)e^{ax}dx;$$

$$\int P(x)\ln x\,dx; \qquad \int P(x)\sin mx\,dx;$$

$$\int P(x)\cos mx\,dx;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

这里 k, m 表示正整数, a, b 表示常数, $P(t)$ 表示多項式。

以上給出了一些求不定积分的方法，这些方法必須通过大量的练习才能牢固掌握。不定积分和求导数不一样，对于給定的一个初等函数，我們总可循着一定的方法去求得它的导数，但求不定积分就不是那末簡单，它并无一定的步驟可循，甚至有些函数根本不能用初等函数去表示它們的不定积分，最簡单的如

$$\int e^{-x^2}dx; \quad \int\frac{dx}{\ln x}; \quad \int\frac{\sin x}{x}dx$$

就是这样。

不过，对于某些特殊类型的积分，还是可以找出一般的积分步驟，下面将分段列出一些常見的不定积分法。

三、有理函数积分法

設 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是两个多項式，凡形如

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

的函数称为有理函数。以下考慮有理函数的积分

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx.$$

不妨設 $P(x)$ 的次数低于 $Q(x)$ 的次数，否則以 $Q(x)$ 除 $P(x)$，即可分解为多項式 $R(x)$ 与 $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ 之和。其中 $P_1(x)$ 的次数为低于 $Q(x)$ 的次数，而 $R(x)$ 的积分是毫无困难的，所以我們只要考慮眞分式的积分就够了。

我們先討論眞分式中的部分分式的积分，这就是下列四种类型的分式的积分：

1. $\int \frac{A}{x-a}dx$;　　2. $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx \quad (n=2, 3, \cdots)$;

3. $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx$;　4. $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx \quad (n=2, 3, \cdots)$;

其中 A, B, C, a, p, q 都是常数，并設二次三項式 x^2+px+q 沒有实根，于是 $\frac{p^2}{4}-q<0$。

1, 2 两种类型的积分我們早已会求，它們分别为

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C$$

及

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = -\frac{A}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C \quad (n=2, 3, \cdots).$$

对于 3, 4 两种类型的积分也可利用代换求出，我們先討論 3。

由 x^2+px+q 分出完全平方項，从而有

$$x^2+px+q = x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left[q-\frac{p^2}{4}\right]$$
$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

最后一个括号中的表达式为一正数，不妨記为 a^2，現在作代換

$$x+\frac{p}{2}=t,\ dx=dt,$$

于是

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Bt+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)}{t^2+a^2}dt$$
$$= B\int \frac{tdt}{t^2+a^2}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2}$$
$$=\frac{B}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{1}{a}\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\operatorname{tg}^{-1}\frac{t}{a}+\bar{C}.$$

其中 $\bar{C}$ 为任意常数，代回变量 x，就有

$$\begin{aligned}&\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,dx\\&=\frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2C-Bp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+\bar{C}.\end{aligned}$$

利用同样的代换可将 4 型的积分化为

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\,dx=\frac{B}{2}\int\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^n}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

右边的第一个积分是容易算出的，它为

$$\int\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^n}=-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}+C.$$

对于第二个积分，可求得如下的递推公式：

$$\begin{aligned}I_n&=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^n}\,dt\\&=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{2a^2(n-1)}\int t\,d\left[\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}\right]\\&=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{1}{2a^2(n-1)}\int t\,d\left[\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}\right]\\&=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}}\\&\quad-\frac{1}{2a^2(n-1)}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}\\&=\frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2(n-1)-1}{2a^2(n-1)}I_{n-1}.\end{aligned}$$

我們已經算出过

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a}+C_1;$$

于是依照上面这个递推公式，由已知的 I_1 可推出 I_2，为：

$$I_2=\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{t}{t^2+a^2}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{tg}^{-1}\frac{t}{a}+C_1;$$

$n=3$ 时，就可得到 I_3 为：

$$I_3=\frac{1}{4a^2}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^2}+\frac{3}{8a^4}\cdot\frac{t}{t^2+a^2}+\frac{3}{8a^5}\operatorname{tg}^{-1}\frac{t}{a}+C_1;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

依次类推，就可得出我們所要求的积分。

有了以上这四种类型的积分，我們就可求得任何有理函数的积分，因为从代数学上知道，把眞分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 分解成部分分式后，积分 $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ 就不外是这四种类型积分之組合。

事实上，由于 $Q(x)$ 为实系数的多項式，所以

$$Q(x)=(x-a_1)^{\lambda_1}\cdots(x-a_k)^{\lambda_k}[x^2+p_1x+q_1]^{\nu_1}\cdots[x^2+p_nx+q_n]^{\nu_n}.$$

于是，从代数学中可以知道，每一个有理分式总可分解成簡单的部分分式之和：

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}=&\left[\frac{A_1^{(1)}}{x-a_1}+\frac{A_2^{(1)}}{(x-a_1)^2}+\cdots+\frac{A_{\lambda_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{\lambda_1}}\right]+\cdots\\&+\left[\frac{A_1^{(k)}}{x-a_k}+\frac{A_2^{(k)}}{(x-a_k)^2}+\cdots+\frac{A_{\lambda_k}^{(k)}}{(x-a_k)^{\lambda_k}}\right]\\&+\left[\frac{B_1^{(1)}x+C_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1}+\cdots+\frac{B_{\nu_1}^{(1)}x+C_{\nu_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\nu_1}}\right]+\cdots\\&+\left[\frac{B_1^{(n)}x+C_1^{(n)}}{x^2+p_nx+q_n}+\cdots+\frac{B_{\nu_n}^{(n)}x+C_{\nu_n}^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)^{\nu_n}}\right],\end{aligned}$$

其中常数 $A_i^{(j)}$, $B_i^{(j)}$, $C_i^{(j)}$ 称为待定系数，它們可以用下面的方法来确定：

我們将上边等式的右端通分，即得恒等式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\equiv\frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

从而

$$P(x)=P_1(x).$$

而 $P_1(x)$ 为含有待定系数 $A_i^{(j)}$, $B_i^{(j)}$, $C_i^{(j)}$ 的 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k+2\nu_1+2\nu_2+\cdots+2\nu_n-1$ 次多項式。比較多項式 $P(x)$ 和 $P_1(x)$ 的同次幂的系数，可得到 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k+2\nu_1+2\nu_2+\cdots+2\nu_n$ 个綫性