现代数学基础丛书

丢番图逼近引论

朱尧辰 王连祥 著

科学出版社

现代数学基础丛书

丢番图逼近引论

朱尧辰　王连祥　著

科　学　出　版　社

1 9 9 3

(京)新登字 092 号

内 容 简 介

本书论述了丢番图逼近的基本理论和方法，主要内容包括：实数的有理逼近的各种问题、代数数有理逼近的 Schmidt 定理、度量理论、一致分布、p-adic 结果及数的几何基本定理．本书内容重点突出，论证计算详尽，是数学系高年级学生、研究生的一本入门书．本书也可供数论及数论应用方面的研究人员参考．

现代数学基础丛书

丢番图逼近引论

朱尧辰 王连祥 著

责任编辑 林 鹏

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1993年 4 月第 一 版　　开本：850×1168 1/32

1993年 4 月第一次印刷　　印张：12 3/8

印数：1—1 100　　字数：321 000

ISBN 7-03-003161-X/O·581

定 价：9.00 元

前　言

丢番图逼近 (Diophantine Approximation) 是数论的一个历史悠久的重要分支．最近数十年来，这一分支取得了不少引人注目的进展．例如，W. M. Schmidt 推广了 Roth 定理，证明了关于实代数数联立有理逼近定理．我国数学家华罗庚、王元教授以及国外学者 Н. М. Коробов 等人把丢番图逼近的成果成功地应用到高维数值积分的近似计算中，显示了数论方法的威力．自 70 年代初期起，我国一些学者在王元教授的倡导和组织下，对丢番图逼近和超越数论开展了研究，并且得到了一些有意义的结果，已陆续发表在国内外杂志上．近几年来，一些大学数学系在高年级学生及研究生中开设了丢番图逼近的专业课程．我们举办了几次专题讲座，它引起了更多人的兴趣．为了帮助人们系统地学习这个分支的理论，我们编写了这本丢番图逼近的入门书．

丢番图逼近的内容非常丰富，有关文献也相当浩繁．作为一本入门书，我们主要围绕实数的有理逼近来展开讨论．全书共分九章，各章内容大体如下：前四章介绍实数的有理逼近，包括单个实数的逼近与多个实数的联立逼近、齐次逼近与非齐次逼近，以及各种类型的逼近问题间的关系．这部分内容大多是线性丢番图逼近的古典结果．通过它们，我们可以大致领略到线性丢番图逼近的基本方法．第五、六两章是代数数的逼近问题，其中心是 W. M. Schmidt 关于实代数数的联立逼近定理．这是丢番图逼近论中一个非常重要的著名结果，我们给出了完整而详细的证明．此外，还给出用代数数逼近代数数的一些主要结果．第七章是丢番图逼近的度量性理论的导引，其主要内容是 Хинчин 定理，以及由此而发展产生的若干新问题，其中我们着重介绍了所谓 Duffin-Schaeffer 定理和猜想，以及 Schmidt 关于渐近丢番图逼近的结果．第八章

是一致分布（mod 1）理论的初步知识，重点介绍了一致分布的Weyl判别法及其应用. 在最后一章即第九章中，我们给出了 p-adic 分析的基本知识，以及本书前面几章中一些重要结果的 p-adic 类似. 我们可以从中了解 p-adic 丢番图逼近的基本方面. 各章间的关系大体如书末"各章关系图"所示. 此外，每章末还附有少量习题，以供读者熟悉丢番图逼近的某些方法.

本书是作者在近几年来对大学数学系高年级学生、研究生讲课及有关这一分支的专题讲座的讲稿基础上多次反复修改编写而成. 在成书过程中，得到了作者的老师王元教授的热情鼓舞和指导. 潘承彪教授非常关心本书的编写和出版，提供了讲课条件. 徐广善教授在共同教学中提出许多有益的建议. 在这里作者对他们一并表示衷心的感谢. 由于篇幅所限，本书没有系统、全面地介绍我国学者在丢番图逼近方面的工作，关于这些工作，请参见文献[1]和[107]. 由于作者水平有限，书中谬误和不妥在所难免，恳切地希望读者批评指正.

朱尧辰　王连祥

1991 年 1 月于北京

目　录

第一章　用有理数逼近实数

我们经常遇到无理数的近似计算问题，由此产生了用有理数逼近无理数的误差估计问题，这就是丢番图逼近论的一个最基本的课题。本章介绍抽屉原理和 Farey 序列、连分数的一些基本知识，并以此为工具证明了 Dirichlet 定理等几个逼近定理。最后两节还介绍了有关条件有理逼近和逼近阶的概念和定理。

§1.1　抽屉原理与 Dirichlet 定理

丢番图逼近的很多重要定理都是借助于抽屉原理来证明的。这个原理的主要内容是说，$n+1$ 个物体放入 n 个抽屉里，至少有一个抽屉里有两个或两个以上的物体。它可分为以下三种形式：

1°　$n+1$ 个元素分成 n 组，必有一组至少包含两个元素。

2°　m 个元素分成 n 组（$m>n$ 为正整数），必有一组至少包含 $\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$ 个元素，这里[ ]表示整数部分。

3°　无限多个元素分成有限组，必有一组包含无限多个元素。

应用这个原理，我们可以证明某些存在性定理。

首先，我们考虑如何用有理数来逼近实数。设 ϑ 是实数，如果考虑具有固定分母 q（这里 q 是正整数）的所有有理数，那么实数 ϑ 必位于两个有理数之间，即存在整数 a，使得

$$\frac{a}{q}\leqslant\vartheta<\frac{a+1}{q}.$$

我们取 $\frac{p}{q}$ 是这两个分数 $\frac{a}{q}$ 和 $\frac{a+1}{q}$ 中距离 ϑ 最近的一个，则

有

$$\left|\vartheta-\frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{2q}. \tag{1}$$

用抽屉原理可以改进不等式(1)右边的常数 $\frac{1}{2}$. 这就是

定理 1 (Dirichlet, 1842)[33] 设 ϑ 和 Q 是任意实数,且 $Q>1$,则存在整数 p 和 q 满足

$$1 \leqslant q < Q, \tag{2}$$

$$\left|\vartheta-\frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{Qq}. \tag{3}$$

证明 首先假定 Q 是整数. 考虑下面 $Q+1$ 个实数:

$$0, \{\vartheta\}, \{2\vartheta\}, \cdots, \{(Q-1)\vartheta\}, 1, \tag{4}$$

这里{ }表示分数部分. 显然,这些数都位于单位区间[0,1]上.我们把单位区间分成 Q 个长度相同的子区间:

$$\left[\frac{u}{Q}, \frac{u+1}{Q}\right), \ u=0,1,\cdots,Q-2, \left[1-\frac{1}{Q}, 1\right]. \tag{5}$$

根据抽屉原理 1°, (4) 的 $Q+1$ 个点中至少有两个落在(5)中 Q 个子区间中的一个. 因此存在整数 r_1, r_2, s_1, s_2, 其中 $0 \leqslant r_i \leqslant Q-1$, $i=1,2$, 并且 $r_1 \neq r_2$, 使得

$$|(r_1\vartheta-s_1)-(r_2\vartheta-s_2)| \leqslant \frac{1}{Q}.$$

不失一般性,可以假定 $r_1 > r_2$. 因此,设 $q=r_1-r_2$, $p=s_1-s_2$, 便证明了不等式(2)和(3)对于整数 Q 成立.

如果 Q 不是整数,设 $Q'=[Q]+1$, 则由上述证明可知,不等式(2)和(3)对于整数 Q' 成立. 但是由不等式 $1 \leqslant q < Q'$, 并注意 q 是整数, 可推出 $1 \leqslant q \leqslant [Q] < Q$. 显然还有 $\frac{1}{Q'} < \frac{1}{Q}$.因此不等式(2)和(3)对于非整数 Q 也成立. 于是定理得证.

推论 1 如果 ϑ 是无理数, 则有无穷多对互素整数 p 和 q 满

足

$$\left|\vartheta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}. \tag{6}$$

证明 根据定理 1，对任意 $Q>1$，存在整数 p' 和 q'，满足 $1\leqslant q'<Q$，$|q'\vartheta-p'|\leqslant Q^{-1}$. 假定 $(p',q')=d$，$d\geqslant 1$，又设 $p'=dp$，$q'=dq$，则 $(p,q)=1$，并且 $|q\vartheta-p|\leqslant(dQ)^{-1}\leqslant Q^{-1}$. 当 $Q\to\infty$ 时，必有无穷多个不同的整数 q 满足(2)和(3). 如果不然，根据抽屉原理 3°，则存在一个正整数 q_0 与一个趋于无穷的无穷序列 $\{Q_n\}$ 相对应，使得

$$|q_0\vartheta-p_0|\leqslant(Q_n)^{-1}\to 0\quad(\text{当 } n\to\infty).$$

因此得到 $|q_0\vartheta-p_0|=0$，即 ϑ 是有理数，这与假设矛盾. 最后由(2)和(3)可直接推出(6)，故得推论.

注 1 (3)式中的不等号"$\leqslant$"不能用"$<$"来代替. 这是因为，当 Q 是整数时，如果取 $\vartheta=\frac{1}{Q}$，那么对于 $1\leqslant q<Q$，有

$$\left|\vartheta-\frac{1}{q}\right|\geqslant\frac{1}{Qq}.$$

注 2 推论 1 对于有理数 ϑ 不成立. 这是因为，假如

$$\vartheta=\frac{a}{b}\neq\frac{p}{q},$$

则有

$$\frac{1}{q^2}>\left|\vartheta-\frac{p}{q}\right|=\left|\frac{a}{b}-\frac{p}{q}\right|=\left|\frac{qa-pb}{bq}\right|\geqslant\frac{1}{bq}.$$

由此推出 $1\leqslant q<b$，因而不可能有无穷多对互素整数 p 和 q 满足(6).

注 3 不等式(6)中的 $\frac{1}{q^2}$ 不是最好的. 下面将会看到，它可以用 $\frac{1}{\sqrt{5}\,q^2}$ 来代替.

§ 1.2　和内插、Farey 序列与 Hurwitz 定理

定义 1　两个既约分数 p/q 和 p'/q'，如果满足

$$qp' - pq' = \pm 1,$$

则称它们为一对共轭分数。

定义 2　任意两个既约分数 $\frac{p}{q}$ 和 $\frac{p'}{q'}$，称

$$\frac{p+p'}{q+q'}$$

为其和内插。

例如，0 和 1，即 $\frac{0}{1}$ 和 $\frac{1}{1}$，是共轭分数，这两个分数的和内插是 $\frac{1}{2}$。

定理 1　共轭分数的和内插为既约分数，并与原分数共轭。进一步，由 0,1 出发相继进行和内插，可产生 0,1 之间的一切既约分数。

证明　首先证明结论的第一部分。设 $\frac{p}{q}$ 和 $\frac{p'}{q'}$ 为共轭分数，不妨假定 $0 \leqslant \frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$，即满足

$$qp' - pq' = 1.$$

由此不难验证，它们的和内插位于它们之间，即

$$\frac{p}{q} < \frac{p+p'}{q+q'} < \frac{p'}{q'},$$

并且

$$p'(q+q') - (p+p')q' = (p+p')q - p(q+q')$$
$$= p'q - pq' = 1.$$

所以 $\frac{p+p'}{q+q'}$ 为既约分数，并且 $\frac{p}{q}$ 和 $\frac{p+p'}{q+q'}$，$\frac{p'}{q'}$ 和 $\frac{p+p'}{q+q'}$ 分

别都是共轭分数。

下面我们用反证法来证明结论的第二部分. 假定既约分数 $\frac{p}{q}\in(0,1)$ 不能由和内插产生,也就是说,必有由和内插产生的一对共轭分数 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 适合

$$\frac{a}{b}<\frac{p}{q}<\frac{c}{d}, \tag{1}$$

即不可能有等式出现. 显然有

$$b\leqslant q \quad 并且 \quad d\leqslant q. \tag{2}$$

如果不然,当 $b>q$ 时,有

$$\frac{c}{d}-\frac{p}{q}=\frac{cq-dp}{dq}\geqslant\frac{1}{dq}>\frac{1}{db}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b},$$

推出 $\frac{p}{q}<\frac{a}{b}$, 这与(1)矛盾. 当 $d>q$ 时,有

$$\frac{p}{q}-\frac{a}{b}=\frac{pb-qa}{qb}\geqslant\frac{1}{qb}>\frac{1}{db}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b},$$

则 $\frac{p}{q}>\frac{c}{d}$, 同样与(1)式矛盾. 这时我们在 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 之间进行和内插, 其分母将逐次增大, 因新的和内插必然或落在 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{p}{q}$ 之间,或落在 $\frac{p}{q}$ 和 $\frac{c}{d}$ 之间, 故必存在一对共轭分数满足不等式(1),而不满足(2)式. 因此 $\frac{p}{q}$ 必是某一对共轭分数的和内插. 定理证完.

从 0,1 出发相继进行六次和内插, 我们可以得到如下既约分数(第 k 次和内插简记作 I_k, $k=0,1,2,\cdots,6$):

$I_0 \quad 0 \qquad\qquad 1$

$I_1 \quad \frac{1}{2}$

$I_2 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}$

$I_3 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{3}{4}$

$I_4 \quad \frac{1}{5} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{4}{5}$

$I_5 \quad \frac{1}{6} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{3}{11} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{5}{13} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{5}{9} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{8}{13} \quad \frac{7}{11} \quad \frac{7}{10} \quad \frac{8}{11} \quad \frac{7}{9} \quad \frac{5}{6}$

$I_6 \quad \frac{1}{7} \quad \frac{2}{11} \; \frac{3}{14} \; \frac{3}{13} \; \frac{4}{15} \; \frac{5}{18} \; \frac{5}{17} \; \frac{4}{13} \; \frac{5}{14} \; \frac{7}{19} \; \frac{8}{21} \; \frac{7}{18} \; \frac{7}{17} \; \frac{8}{19} \; \frac{7}{16} \; \frac{5}{11} \; \frac{6}{11} \; \frac{9}{16} \; \frac{11}{19} \; \frac{10}{17} \; \frac{11}{18} \; \frac{13}{21} \; \frac{12}{19} \; \frac{9}{14} \; \frac{9}{13} \; \frac{12}{17} \; \frac{13}{18} \; \frac{11}{15} \; \frac{10}{13} \; \frac{11}{14} \; \frac{9}{11} \quad \frac{6}{7}$

定义 3 在 0, 1 之间的既约分数中，把分母不超过 n 的分数按大小排成一序列称为 n 级 Farey 序列 ($n \geq 1$)，记作 $\mathscr{F}_n$。例如

$$\mathscr{F}_7: 0, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, 1.$$

n 级 Farey 序列具有如下性质：

定理 2 Farey 序列中任意相邻二数为共轭分数。

证明 假定 $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$ 为 $\mathscr{F}_n$ 中相邻二数。由于 $(a, b)=1$，所以同余方程

$$ay \equiv 1 \pmod{b}$$

有唯一解 (mod b)。我们选择解 y 和相应的 x 满足

$$bx - ay = 1, \quad n - b + 1 \leqslant y \leqslant n. \tag{3}$$

因此

$$y > 0, \quad (x, y) = 1, \quad \frac{x}{y} = \frac{a}{b} + \frac{1}{by} > \frac{a}{b}. \tag{4}$$

如果我们能证明 $\frac{x}{y} = \frac{a'}{b'}$，则有 $x = a'$，$y = b'$，于是由(3)式便得定理。事实上，如果不然，假定 $\frac{x}{y} \neq \frac{a'}{b'}$，则必有 $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} < \frac{x}{y}$。由(3)中右式不难看出

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \left(\frac{x}{y} - \frac{a'}{b'}\right) + \left(\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b}\right) \geqslant \frac{b}{b'y} + \frac{1}{b'b}$$

$$= \frac{b + y}{b'by} \geqslant \frac{n+1}{b'by} > \frac{1}{by},$$

这与(3)中左边等式相矛盾。定理证完。

由此定理直接得到

推论 1 如果 $n \geqslant 2$，则 $\mathscr{F}_n$ 中任意相邻二数的分母不相等。

推论 2 Farey 序列中任意一数是左右相邻二数的和内插。

这里只给出推论 2 的证明。设 $\frac{a}{b} < \frac{a''}{b''} < \frac{a'}{b'}$ 是 $\mathscr{F}_n$ 中相邻三数，则由定理 2 可知

$$ba'' - ab'' = 1, \quad b''a' - a''b' = 1,$$

将两式相减得到 $a''(b + b') - b''(a + a') = 0$，因此

$$\frac{a''}{b''} = \frac{a + a'}{b + b'}.$$

于是推论得证。

定理 3 (Hurwitz, 1891)[48] 对每个无理数 ϑ，存在无穷多个不同的有理数 $\frac{p}{q}$ 满足

$$\left|\vartheta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, q^2}. \tag{5}$$

这里的常数$\sqrt{5}$是最好的，换句话说，若常数 $A > \sqrt{5}$，则必有无理数 ϑ，使不等式

$$\left|\vartheta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Aq^2} \tag{6}$$

只有有限多个有理解 $\frac{p}{q}$。

证明 不失一般性，可以假定 $0 < \vartheta < 1$，又设 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{a'}{b'}$ 是 $\mathscr{F}_n$ 中适合 $\frac{a}{b} < \vartheta < \frac{a'}{b'}$ 的相邻二数。令 $a^* = a + a'$，$b^* = b + b'$，根据定理 1，则 $\frac{a}{b} < \frac{a^*}{b^*} < \frac{a'}{b'}$，并且 $\frac{a^*}{b^*}$ 不在 $\mathscr{F}_n$ 中。

首先，我们来证明下面三个不等式中至少有一个成立：

$$\left|\vartheta - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, b^2}, \quad \left|\vartheta - \frac{a^*}{b^*}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, b^{*2}},$$