高等学校教学参考书

《电磁学》习题选解

周岳明　史起凤
冯庆荣　曹树石　编

北京大学出版社

高等学校教学参考书

《电磁学》习题选解

周岳明　史凤起
冯庆荣　曹树石　编

北京大学出版社

《电磁学》习题选解

北京大学出版社出版
（地址：北京大学院内）
新华书店北京发行所发行
北京海淀印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 3.75印张 67,000字
1980年7月第一版 1981年7月第二次印刷
印数：110,001—160,000册

统一书号：13209·4 定价：0.40元

前　言

本书是赵凯华、陈熙谋编《电磁学》（人民教育出版社出版）一书中部分习题的解答。编写工作是受赵凯华、陈熙谋同志的委托，并在他们的指导下完成的。选题的原则有二：一是典型题，二是难题。我们从原书中各类重要的典型题中，选出一些作了解答或给出提示；另有部分难题，或解法有特殊技巧的题，其中有些虽超出了课程的基本要求，也列入本集。本集主要是为了供教师参考，因此解答不都给出详尽步骤。本集中章、节及所引公式都是原书的编号。原书中部分习题及答案凡与本集不符的，均以本集为准。由于编者水平有限错误在所难免，望读者批评指正。

编　者

1979年12月于北京大学

目　录

第一章　静　电　场

§2　电场　电场强度

（上册26—28页）

3.　在早期(1911年)的一连串实验中，密立根在不同时刻观察在单个油滴上呈现的电荷，共测量结果(绝对值)如下：

6.568×10^{-19}库仑	8.204×10^{-19}库仑
11.50×10^{-19}库仑	13.13×10^{-19}库仑
16.48×10^{-19}库仑	18.08×10^{-19}库仑
19.71×10^{-19}库仑	22.89×10^{-19}库仑
26.13×10^{-19}库仑	

根据这些数据，可以推得基本电荷 e 的数值为多少？

〔**解**〕　将相邻数据依次相减，所得差值中有数值彼此相近的两批，一批的数值刚好约为另一批的两倍。设较小的一批差值 $\simeq e$，较大的一批差值为 $2e$，然后将结果相加，共得

$$12e = 19.562\text{库仑},$$

因而平均值为$e=1.630$库仑。

6.　如附图所示，一电偶极子的电偶极矩 $\mathbf{p}=q\mathbf{l}$，P 点到偶极子中心O的距离为 r，$\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{l}$ 的夹角为 θ。在 $r\gg l$ 时，求 P 点的电场强度 $\mathbf{E}$ 在 $r=OP$ 方向的分量 E_r 和垂

直于 r 方向上的分量 E_θ。

〔解〕 设 P 点到 $\pm q$ 的距离分别为 r_+ 及 r_-（参看 夸大了比例的右图），

$$r_+ \simeq PB = r - \frac{1}{2} l \cos\theta,$$

$$r_- \simeq PA = r + \frac{1}{2} l \cos\theta.$$

（习题6）

则 $\pm q$ 单独存在时 P 点产生的场强大小分别为

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r_+^2},$$

$$E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r_-^2}.$$

（1） $E_r = E_+ \cos\alpha - E_- \cos\alpha \simeq E_+ - E_-$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2}\right),$$

注意上式中 $\cos\alpha = 1 + O(l^2/r^2) \simeq 1$．将 r_+、r_- 代入上式，在展开式中忽略 $O(l^2/r^2)$ 项，即

$$\frac{1}{r_\pm^2} = \frac{1}{r^2}\left(1 \mp \frac{l}{2r}\cos\theta\right)^{-2}$$

$$\simeq \frac{1}{r^2}\left(1 \pm \frac{l\cos\theta}{r}\right),$$

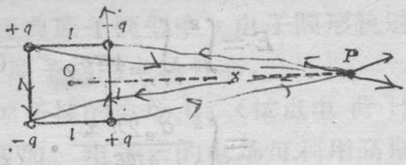
于是得 $$E_r=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2p\cos\theta}{r^3}.$$

$$（2）\ E_\theta=E_+\sin\alpha+E_-\sin\alpha,$$

而 $\sin\alpha\simeq\frac{l}{2r}\sin\theta$，$r_\pm\simeq r$ [因 $\sin\alpha\sim O(l/r)$，$r_\pm$ 中$O(l/r)$ 项可忽略]，最后得

$$E_\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p\sin\theta}{r^3}.$$

9. 附图中所示是另一种电四极子，设 q 和 l 都已知，图中 P 点到电四极子中心 O 的距离为 x，PO 与正方形的一对边平行，求 P 点的电场强度 **E**。当 $x\gg l$ 时，**E**＝？



（习题9）

〔解〕将 P 点场强看作四个点电荷场的迭加，可求得

$$E=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\left[\left(x-\frac{l}{2}\right)^2+\frac{l^2}{4}\right]^{3/2}}-\frac{1}{\left[\left(x+\frac{l}{2}\right)^2+\frac{l^2}{4}\right]^{3/2}}\right\},$$

方向垂直OP向上。当 $x\gg l$ 时，括弧内因子按$\boxed{l/x}$幂次展开后，$O(l^2/x^2)$ 项可忽略，因而

$$E=\frac{3pl}{4\pi\varepsilon_0x^4}.$$

13. 半径为R的圆面上均匀带电，电荷的面密度为 σ_e。

（1）求轴线上离圆心的坐标为 x 处的场强；

（2）在保持 σ_e 不变的情况下，当 $R\to 0$ 和 $R\to\infty$ 时结果各如何？

（3）在保持总电荷 $Q=\pi R^2\sigma_e$ 不变的情况下，当 $R\to 0$ 和 $R\to\infty$ 时结果各如何？

〔**解**〕以圆心为坐标原点，垂直于圆面指向场点的方向为 x 轴正方向，取一电荷元 $dq=\sigma_e ds=\sigma_e dr\cdot dl$，该电荷元在 P 点产生的电场只有 x 轴分量对总场强有贡献，因而总场强为

$$E=\int_0^R\int_{(l)}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\sigma_e x}{(x^2+r^2)^{3/2}}dl\cdot dr$$

$$=\int_0^R\frac{\sigma_e 2\pi x}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{rdr}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\sigma_e}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right).$$

当 $Q=\pi R^2\sigma_e$ 不变，而 $R\to 0$ 时，将上式括号内第二项作泰勒展开，取一级近似 $O(R^2/x^2)$，即可得

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}.$$

§3 高 斯 定 理

（上册49--51页）

2. 均匀电场与半径为 a 的半球面的轴线平行，试计算

通过此半球面的电通量。

〔提示〕用球坐标计算，注意坐标极轴应选在半球轴线（即电场）方向。

4. 根据量子理论，氢原子中心是一个带正电 q_e 的原子核（可以看成是点电荷），外面是带负电的电子云。在正常状态（核外电子处在 s 态）下，电子云的电荷密度分布是球对称的：

$$\rho_e(r) = -\frac{q_e}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0},$$

式中 a_0 为一常数（它相当于经典原子模型中 s 电子圆形轨道的半径，称为玻尔半径）。求原子内的电场分布。

〔解〕原子内的电场是原子核的电场 $\mathbf{E}_+$（按点电荷计算）和电子云的电场 $\mathbf{E}_-$ 的迭加。电子云的电场可利用高斯定理的结果，

$$E_-(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\iiint \rho_e(r')\,dV,$$

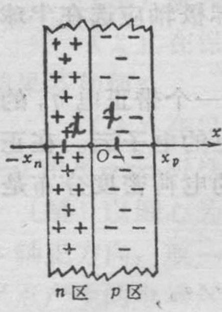
积分范围为 $0 \leqslant r' \leqslant r$，在球坐标中 $dV = r'^2 \sin\theta\, dr'\, d\theta\, d\varphi$，计算结果为

$$E_- = \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\left(\frac{2r^2}{a_0^2} + \frac{2r}{a_0} + 1\right)e^{-2r/a_0} - 1\right],$$

所以原子核内总电场为

$$E = \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{2r^2}{a_0^2} + \frac{2r}{a_0} + 1\right)e^{-2r/a_0}.$$

14．在半导体 $p—n$ 结附近总是堆积着正、负电荷，在 n 区内有正电荷，p 区内有负电荷，两区电荷的代数和为零。我们把 $p—n$ 结看成是一对带正、负电荷的无限大平板，它们相互接触（见附图）。取坐标 x 的原点在 p、n 区的交界面上，n 区的范围是 $-x_n \leqslant x \leqslant 0$，$p$ 区的范围是 $0 \leqslant x \leqslant x_p$。设两区内电荷体分布都是均匀的：



（习题14）

$$\begin{cases} n\text{ 区：}\rho_e(x)=N_D e, \\ p\text{ 区：}\rho_e(x)=-N_A e. \end{cases} \quad \text{（突变结模型）}$$

这里 N_D、N_A 是常数，且 $N_A x_p = N_D x_n$（两区电荷数量相等）。试证明电场的分布为

$$\begin{cases} n\text{ 区：}E(x)=\dfrac{N_D e}{\varepsilon_0}(x_n+x), \\ p\text{ 区：}E(x)=\dfrac{N_A e}{\varepsilon_0}(x_p-x). \end{cases}$$

并画出 $\rho_e(x)$ 和 $E(x)$ 随 x 变化的曲线来。

〔**解**〕用高斯定理分别求出 p 区及 n 区单独存在时的场强分布，然后迭加。考虑到 $p—n$ 结外总场强为零，因而只写出结区的场强。p 区单独存在时的场强分布为

$$E_p=\frac{N_A e}{2\varepsilon_0}x_p \quad (x\text{ 在 }n\text{ 区}),$$

$$E_p = \frac{N_A e}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2}x_p - x\right) \quad (x\text{ 在 }p\text{ 区});$$

n 区单独存在时的场强分布为

$$E_n = \frac{N_D e}{\varepsilon_0}\left(x + \frac{1}{2}x_n\right) \quad (x\text{ 在 }n\text{ 区}),$$

$$E_n = \frac{N_D e}{2\varepsilon_0}x_n \quad (x\text{ 在 }p\text{ 区}).$$

迭加后即可求得总场强分布。

15．如果在上题中电荷的体分布为

$$\begin{cases} p-n\text{ 结外：}\rho(x)=0, \\ -x_n \leqslant x \leqslant x_p\text{：}\rho(x) = -eax. \end{cases} \quad \text{(线性缓变结模型)}$$

这里 a 是常数，$x_n = x_p$（为什么？），统一用 $\frac{x_m}{2}$ 表示。试证明电场的分布为

$$E(x) = \frac{ae}{8\varepsilon_0}(x_m^2 - 4x^2),$$

并画出 $\rho_e(x)$ 和 $E(x)$ 随 x 变化的曲线来。

〔解〕分割成许多无限薄层迭加。在 x' 处厚度为 dx' 的一层上面电荷密度为 $\sigma_e = \rho_e(x')dx'$，它在场点 x 处产生的场强为 $dE = \pm\frac{\rho_e(x')dx'}{2\varepsilon_0}$（$x' < x$ 时取正号，$x' > x$ 时取负号），在 x 处的总场强为

$$E=\frac{1}{2\varepsilon_0}\left[\int_{-x_m/2}^{x}\rho_e(x')\,dx'-\int_{x}^{x_m/2}\rho_e(x')\,dx'\right.$$

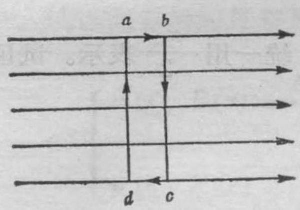
$$=\frac{ae}{8\varepsilon_0}(x_m^2-4x^2).$$

§4 电位及其梯度

(上册71——76页)

3. 证明：在静电场中凡是电力线都是平行直线的地方，电场强度的大小必定处处相等；或者换句话说，凡是电场强度的方向处处相同的地方，电场强度的大小必定处处相等。

〔解〕 当电力线是平行直线时，以某一电力线为柱轴作一只包括该电力线的柱状高斯面，通过端面的电通量和场强相等，从而证明，同一电力线上任意两点场强相等。



(习题3)

对于不在同一电力线上的两点，取如图矩形环路，矩形长边垂直于电力线。当 ab、cd 均很小时，可认为 b 点与 a 点场强相等，c 点与 d 点场强相等，用环路定理即可证明

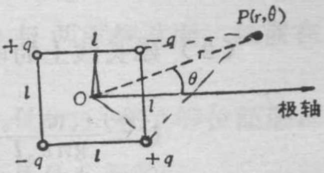
$$E_a=E_d.$$

这就说明了凡电力线为平行直线处，电场强度大小必定处处相等。

13. 一电四极子如附图所示。证明：当 $r \gg l$ 时，它在 $P(r,\theta)$ 点产生的电位为

$$U=-\frac{3ql^2\sin\theta\mathrm{co}\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\quad(r\gg l),$$

图中极轴通过正方形中心 O 点，且与一对边平行。



（习题13）

〔解〕 将 P 点电位看作四个点电荷电位的迭加。先将四个点电荷的电位在直角坐标系（以图中极轴为 x 轴）中表示出来，然后分别作泰勒展开后相加，l/r 的零级和一级项全部抵消，取二级近似，求得

$$U=-\frac{3ql^2\sin\theta\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

注意不能用两个偶极子的近似场强公式迭加，因这里要求正确给出 $O(l^2/r^2)$ 的系数，而在偶极子场强公式中对 $O(l^2/r^2)$ 量级的项已作某种忽略。

24. 电量 q 均匀地分布在长为 $2l$ 的细直线上，求下列各处的电位 U：

（1）中垂面上离带电线段中心 O 为 r 处，并利用梯度求 E_r；

（2）延长线上离中心 O 为 z 处，并利用梯度求 E_z。

〔解〕 （1）以细直线中心 O 为原点，延长线为 z 轴建立柱坐标系，中垂面上电位和场强分别为

$$U=\int_{-l}^{l}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{2l}\frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{l+\sqrt{r^2+l^2}}{r},$$

$$E_r=-\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+l^2}}.$$

（2）延长线上的电位，当 $z>l$ 时为

$$U=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{z+l}{z-l},$$

当 $z<-l$ 时，

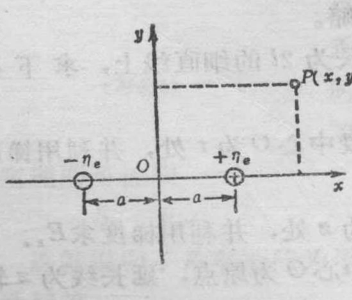
$$U=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{z-l}{z+l},$$

两式可统一表示为

$$U=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 l}\left|\ln\frac{z+l}{z-l}\right|.$$

而 $$E_z=-\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{\pm q}{4\pi\varepsilon_0(z^2-l^2)},$$

当 $z>l$ 时为正，$z<-l$ 时为负。



（习题27）

27．如附图所示，两条均匀带电的无穷长平行直线（与图纸垂直），电荷的线密度分别为 $\pm\eta_e$，相距为$2a$，求空间任一点 $P(x,y)$ 的电位。

〔提示〕可利用一根无限长带电线的电位分布公式，然后迭加。但应注意，此时不能选无穷远点为电位参考点，可对两导线选一共同参考点，譬如O点。最后可看出O点电位与无穷远处相等。

28. 证明在上题中电位为U的等位面是半径为$r=\dfrac{2ka}{k^2-1}$的圆筒面，筒的轴线与两直线共面，位置在$x=\dfrac{k^2+1}{k^2-1}a$处，其中$k=\exp(2\pi\varepsilon_0 U/\eta_e)$（有关等位面图，参见上册 图1－46）。$U=0$的等位面是什么形状？

〔解〕 上题中电位相等的点满足方程

$$\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}=e^{4\pi\varepsilon_0 U/\eta_e}=\text{常数},$$

这是一圆柱面方程。将上式中的常数称作k^2，即

$$k=e^{2\pi\varepsilon_0 U/\eta_e}.$$

将上述圆柱面方程化为标准形式，利用解析几何知识可找出圆柱面的柱轴位置和半径。当$k^2=1$时，即求得$U=0$的等位面是$x=0$的平面。

§5 带电体系的静电能

（上册85—86页）

4. 利用虚功原理重新解§2习题7.

〔解〕 先求出偶极子$\mathbf{p}$在Q的电场中的电位能$W=-\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}=-pE\cos\theta$，然后根据上册(1.55)、(1.56)式分

别求 **p** 受的力及力矩。

（1）当 **p** 与 **E** 平行，**p** 只受到 **E** 方向的力 F_E，

$$F_r=-\frac{\partial W}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{pQ\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)$$

$$=-\frac{2Qp\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

此时 $\theta=0$，$\cos\theta=1$，因而

$$F_r=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2Qp}{r^3},$$

负号表示 **F** 的方向与 **E** 相反。

（2）当 **p** 与 **E** 垂直，**p** 受到力矩为

$$L_\theta=-\frac{\partial W}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{pQ\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)$$

$$=-\frac{Qp\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

这时 $\sin\theta=1$，因而

$$L_\theta=-\frac{Qp}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

负号表示 **L** 的方向与 **E**×**p** 的方向相反。

运算时，应先写出 W 的普遍表达式，取偏微商后再代入 r 或 θ 的特殊值。