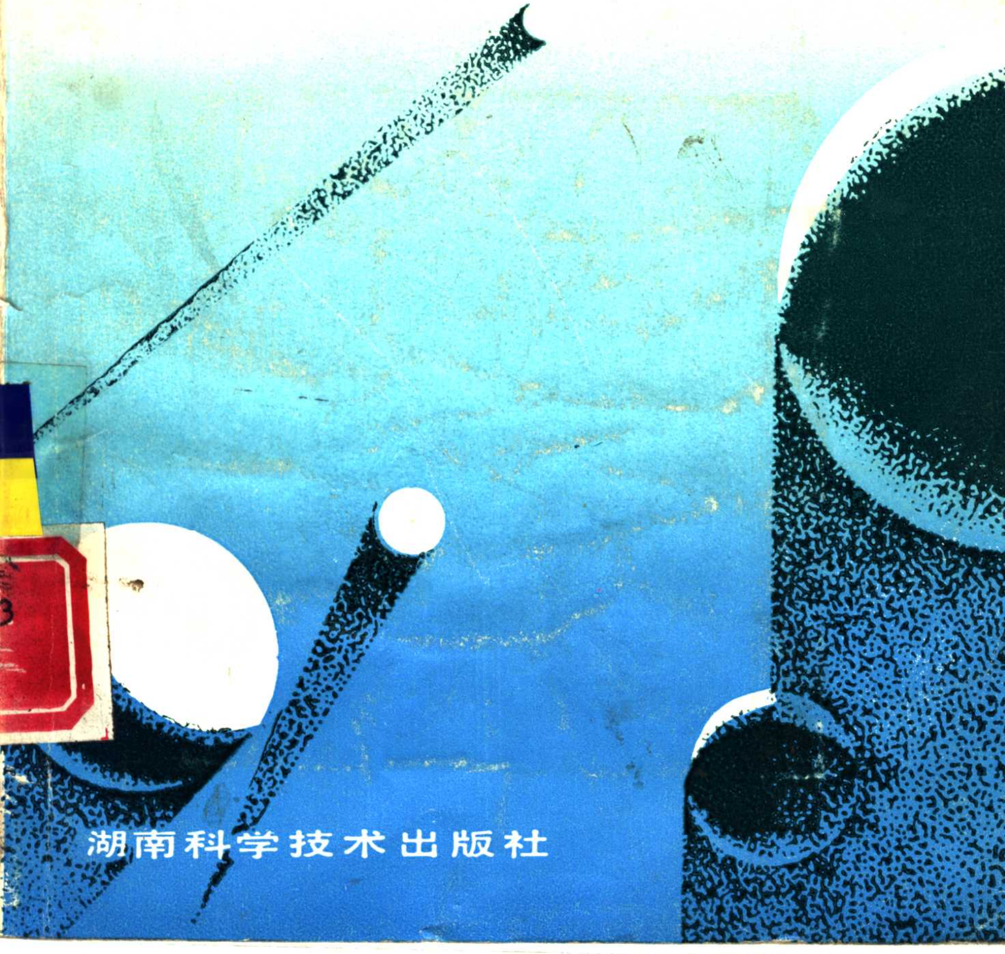
自由质点动力学

张健保 著



湖南科学技术出版社

自 由 质 点 动 力 学

张 健 保 著

湖 南 科 学 技 术 出 版 社

湘新登字004号

自 由 质 点 动 力 学

张健保　著

责任编辑：曾平安

✽

湖南科学技术出版社出版发行

（长沙市展览馆路 3 号）

湖南省新华书店经销　长沙政院印刷厂印刷

✽

1992年 5 月第 1 版第 1 次印刷

开本：787×1092毫米　1/32　印张：5.25　字数：117,000

印数：1—1,000

ISBN 7—5357—1030—1

O·99　定价：2.30元

地科101—019

出版说明

《自由质点动力学》是一本严格的科技书籍，它能帮助大学、中专的力学教师备课、讲课；也能帮助大学生学习物理和力学；同时，对弹道工作者，航天工作者的理论学习、设计计算，也有很大的参考价值。

过去，“自由质点动力学”没有专著，有关问题，只散见于各种力学文献内，或多或少，或深或浅，全凭著作需要或各家著者的取舍。参数的符号既不统一，论述演算，亦各有不同。尤其对近代的一些问题，更无统一的系统论述。《自由质点动力学》一方面统一了过去各家的论述、参数和运算，逻辑地归纳了它的经典内容；另一方面，也详细地阐述了近代内容，如变质量动力学，火箭列车的最佳计算、近光速时的齐奥尔科夫斯基公式——阿克莱公式、以及恒星际飞行理论……。这样，就使它成了一本近代的、综合的质点动力学专著。今特组织出版，以飨读者。

作 者 的 话

本书始作于1962年春，约1970年秋成稿，之后，停停续续数次反复。虽几经改删，但错误缺点，仍在所难免。诚望各界同志同事，不吝指正，则不胜感激之至。

张健保 谨

1992. 5. 30

目 录

第一章　质点的直线运动

第一节　质点在受各种形式外力作用时的直线运动

1. 当外力为常数时质点的直线运动

设某质点的质量为 m，受到一个方向、大小都不变的外力 $m\boldsymbol{K}$ 的作用；并设外力之作用线与质点的运动轨迹相重合。

求质点之运动方程

根据公式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}$$

可得质点之矢量微分方程为

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=m\boldsymbol{K} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1—1)$$

将（1—1）式向笛卡儿座标投影，得到

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=K_x\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=K_y\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=K_z\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1—2)$$

将（1—2）式依次积分二次，可得

$$\left.\begin{aligned} v_x &= k_x t + c_{x1} \\ v_y &= k_y t + c_{y1} \\ v_z &= k_z t + c_{z1} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (1\text{—}3)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}k_x t^2 + c_{x1}t + c_{x2} \\ y &= \frac{1}{2}k_y t^2 + c_{y1}t + c_{y2} \\ z &= \frac{1}{2}k_z t^2 + c_{z1}t + c_{z2} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (1\text{—}4)$$

上两方程组中的c_{x1}、c_{y1}、c_{z1}；c_{x2}、c_{y2}、c_{z2}都是积分时出现的积分常数，其值决定于开始计算质点运动时的“起始条件”。

如设开始计算质点运动时，即$t=t_0$时，（一般 $t_0=0$）质点的运动参数为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$$

将此参数在各座标轴上的分量v_{0x}，v_{0y}，v_{0z}和r_{0x}，r_{0y}，r_{0z}代入方程式（1—3）（1—4），则很容易得到

$$\begin{aligned} c_{x1} &= v_{0x} \qquad & c_{x2} &= r_{0x} \\ c_{y1} &= v_{0y} & c_{y2} &= r_{0y} \\ c_{z1} &= v_{0z} & c_{z2} &= r_{0z} \end{aligned}$$

于是就可以得到完全确定了的质点运动的速度方程和运动方程：

$$\left.\begin{aligned} v_x &= k_x t + v_{0x} \\ v_y &= k_y t + v_{0y} \\ v_z &= k_z t + v_{0z} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (1\text{—}5)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= r_{0x} + v_{0x}t + \frac{1}{2}k_x t^2 \\ y &= r_{0y} + v_{0y}t + \frac{1}{2}k_y t^2 \\ z &= r_{0z} + v_{0z}t + \frac{1}{2}k_z t^2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1—6)$$

在实用上，座标轴x多取在常力的作用线上，这样，最后取得的方程组就可简化呈（1—5）中的第一式和（1—6）式中的第一式。

例题1—1

已知一物体重75公斤，自离地面20公里的高空处自由落下。如设重力加速度g_0不随高度变化，也不考虑空气阻力；

求此物体的落地的速度和时间。

解：由于物体下落时不考虑空气阻力和g_0设为常量，故物体上的作用力只有一个大小、方向皆不变的重力。另外，因物体是自由落体，故只取y轴为投影轴，又设向下的方向为正；并且，$y_0=0$，$v_{y0}=0$，这样，根据（1—5）、（1—6）式可得

$$\left.\begin{aligned} v_y &= g_0 t \\ y &= \frac{1}{2}g_0 t^2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

移项后，即得

$$\left.\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2y}{g_0}} \\ v_y &= \sqrt{2g_0 y} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (B)$$

将 $g_0 = 9.8$米/秒^2

$y = 20000$米

代入（B）式，就可得到

$$t=\sqrt{\frac{40000}{9.8}}=64(\text{秒})$$

$$v_y=+\sqrt{2\times 9.8\times 20000}=625(\text{米/秒})$$

v_y 所以取正号的意思是由于它方向朝下。

这就是落体在简单条件下的下落情况。

2. 当外力为时间的函数时质点的直线运动

设某一质量为 m的质点，受到某一外力的作用；此外力方向虽不变，即其作用线一直与质点之运动轨迹相重合，而其大小则为时间的函数；即

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{r}f(t)$$

求质点之运动方程。

根据公式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}$$

得微分方程

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=m\boldsymbol{r}f(t) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1—7)$$

今将方程（1—7）向笛卡儿座标轴投影，得

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=f_x(t)\\\frac{d^2y}{dt^2}&=f_y(t)\\\frac{d^2z}{dt^2}&=f_z(t)\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1—8)$$

将（1—8）方程组依次积分两次，得到：

$$\left.\begin{aligned}v_x&=\int_{t_0}^{t} f_x(t)\,dt+v_{0x}\\ v_y&=\int_{t_0}^{t} f_g(t)\,dt+v_{0y}\\ v_z&=\int_{t_0}^{t} f_z(t)\,dt+v_{0z}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(1\text{—}9)$$

和

$$\left.\begin{aligned}x&=\int_{t_0}^{t}dt\int_{t_0}^{t} f_x(t)\,dt+v_{0x}(t-t_0)+x_0\\ y&=\int_{t_0}^{t}dt\int_{t_0}^{t} f_y(t)\,dt+v_{0y}(t-t_0)+y_0\\ z&=\int_{t_0}^{t}dt\int_{t_0}^{t} f_z(t)\,di+v_{0z}(t-t_0)+z_0\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(1\text{—}10)$$

方程组（1—9）和(1—10）就是质点从t_0开始至某一时间t的速度方程和位移方程（运动方程）。式中v_{0x}，v_{0y}，v_{0z}和x_0，y_0，z_0都是已知的初始条件，即在开始时（$t=t_0$时）质点的速度和位移。

3．当外力为位置的函数时，质点的直线运动

设质量为m的某一质点M，受到某一外力$\boldsymbol{F}$作用，此外力的方向不变，并且其作用线一直与质点的运动轨迹相重合，而外力的大小为质点本身位置的函数，即

$$\boldsymbol{F}=mrf(r)$$

求质点之运动方程

根据公式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{F}}{dt} = \boldsymbol{F}$$

得
$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = m\boldsymbol{r}f(r)$$

由于质点之运动为直线，为简便起见，不妨将座标轴 x 取在质点的轨迹上，于是上式只要向x轴投影，逐得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1—11)$$

为了解（1—11）微分方程方便，今在它的两端各乘

$2\frac{dx}{dt}$，即

$$2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = f(x)\cdot 2\frac{dx}{dt}$$

因为 $2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = \frac{d}{dt}(v^2)$

所以 $\frac{d}{dt}(v^2) = 2\frac{dx}{dt}\cdot f(x)$

将上式自x_0至x；自v_0至v积分，移项整理后，得质点之速度方程为

$$v = \sqrt{2\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + {v_0}^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1—12)$$

因为$v = \frac{dx}{dt}$，故代入上式并变数分离后，上式就变为

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + {v_0}^2}}$$

将上式自$x_0 \longrightarrow x$，$t_0 \longrightarrow t$再积分一次，逐得

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{2\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + v_0^2}} \cdots\cdots\cdots (1-13)$$

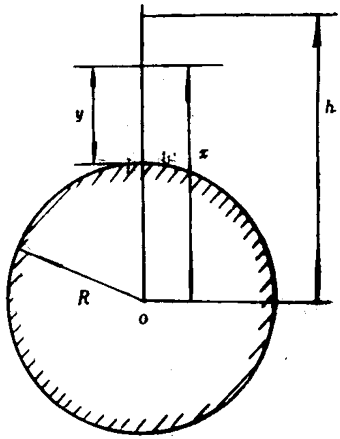
例题1—2

已知一物体重75公斤，自离地面20公里的高空自由落下，如设不考虑空气的阻力；

求物体下落至地面时的速度、时间。

解：根据牛顿万有引力，物体在地球高空的重量为

$$F = -\frac{GMm}{x^2} = mg \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$



例1—2图

式中：F 为万有引力

G 为引力常数

M 为地球的质量

m 为物体的质量

x 为物体至地球中心之距离

g 为离地心为x距离时的重力加速度

当物体在海平面时其重量为

$$mg_0 = \frac{-GMm}{R^2} \quad \cdots\cdots (B)$$

式中：R为地球半径（约$R = 6400$公里）

g_0为海平面上，亦即离地心为R时之重力加速度。

如（例1—2图）

今将（B）式移项：

$$-GM = g_0 R^2$$

将此代入（A）式，则得

$$g = g_0 \frac{R^2}{x^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (C)$$

（C）式说明了这样一个情况：即重力加速度g不是常数，是随高度而变化的。当一物体自高空自由下落时，其所受到的重力，不是恒力、而是随高度而变化的一个变力。

现在，将（C）式代入（1—12）式，得到

$$v_y = \pm\sqrt{2\int_h^x \left(g_0 \frac{R^2}{x^2}\right) dx}$$

积分后，$v_y = \pm\sqrt{2g_0 R^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{h}\right)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (D)$

如果　$h \longrightarrow \infty$；$x = R$　则

$$v_y = \pm\sqrt{2g_0 R} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (E)$$

这就是物体自无穷远落至地面时之落地速度。

如果离地面高y的物体，落向地面，这时（D）式就变成

$$v_y = \pm\sqrt{2g_0 R^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+y}\right)}$$

整理后，成为

$$v_y = \pm\sqrt{2g_0 y \left(\frac{R}{R+y}\right)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (F)$$

比较（F）和例1—1中的（B）式，就可发现，（F）式比（B）式多了一个“修正项”$\sqrt{\frac{R}{R+y}}$

如果y和R比不很大，那末修整项将近似于1而可看成1，这时（F）式就变成了例1—1的（B）式。但如果y有足够大，

大到修整项不可忽略，这时，（B）式将不能反映正确的 v_y，而一定要用（F）式了。这就是离地高度y足够大时必须用（F）式的道理。

现在，回过来看例题1—2。

今将题中之数据

$g_0 = 9.8$（米/秒）

$R = 6.4 \times 10^6$（米）

$y = 20 \times 10^3$（米）

代入（F）式，得

$$v_y = 625 \times 0.998$$

$$= 624 \text{（米/秒）}$$

由于20公里和地球半径比，相对很小，所以算出之答案和例题1—1的很相近，几乎一样。

从这里可推知，物体下落的时间 t 和例1—1的也相近，用例1—1的已足够准确，所以在此不予计算了。但是他的计算方法大致如下：

将（C）式代入（1—13）式，得到

$$t - t_0 = \int_h^x \frac{dx}{\sqrt{2\int_h^x \left(g_0 \frac{R^2}{x^2}\right)dx + v_0{}^2}}$$

因$t_0 = 0$，$v_0 = 0$　故上式积分后为

$$t = -\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2gR^2}} \int_h^x \sqrt{\frac{x}{h-x}}\, dx,$$

这个积分必须作下列变换方可进行。

令　$x = h\cos\theta$

$dx = -2h\sin\theta\cos\theta$

代入整理后为