

# 自由质点 动力学

张健保 著

湖南科学技术出版社

# 自由质点动力学

张健保 著

湖南科学技术出版社

湘新登字004号

## 自由质点动力学

张健保 著

责任编辑：曾平安

\*

湖南科学技术出版社出版发行

(长沙市展览馆路3号)

湖南省新华书店经销 长沙政院印刷厂印刷

\*

1992年5月第1版第1次印刷

开本：787×1092毫米 1/32 印张：5.25 字数：117,000

印数：1—1,000

ISBN 7—5357—1030—1

0.99 定价：2.30元

地科101—019

## 出版说明

《自由质点动力学》是一本严格的科技书籍，它能帮助大学、中专的力学教师备课、讲课；也能帮助大学生学习物理和力学；同时，对弹道工作者，航天工作者的理论学习、设计计算，也有很大的参考价值。

过去，“自由质点动力学”没有专著，有关问题，只散见于各种力学文献内，或多或少，或深或浅，全凭著作需要或各家著者的取舍。参数的符号既不统一，论述演算，亦各有不同。尤其对近代的一些问题，更无统一的系统论述。《自由质点动力学》一方面统一了过去各家的论述、参数和运算，逻辑地归纳了它的经典内容；另一方面，也详细地阐述了近代内容，如变质量动力学，火箭列车的最佳计算、近光速时的齐奥尔科夫斯基公式——阿克莱公式、以及恒星际飞行理论……。这样，就使它成了一本近代的、综合的质点动力学专著。今特组织出版，以飨读者。

VAA/11/09

## 作者的话

本书始作于1962年春，约1970年秋成稿，之后，停停续续数次反复。虽几经改删，但错误缺点，仍在所难免。诚望各界同志同事，不吝指正，则不胜感激之至。

张健保 谨

1992. 5. 30

# 目 录

## 第一章 质点的直线运动 ..... ( 1 )

### 第一节 质点在受各种形式外力作用时的

#### 直线运动 ..... ( 1 )

##### 1. 当外力为常数时质点的直线运动 ..... ( 1 )

###### 例题1—1 ..... ( 8 )

##### 2. 当外力为时间的函数时质点的直线运动 ..... ( 4 )

##### 3. 当外力为位置的函数时质点的直线运动 ..... ( 5 )

###### 例题1—2 ..... ( 7 )

##### 4. 当外力为速度的函数时质点的直线运动 ..... ( 10 )

##### 5. 图解求积和数值求积 ..... ( 11 )

### 第二节 质点在阻尼介质中的直线运动 ..... ( 15 )

##### 1. 阻力和速度之一次方呈正比时质点的直线运动 ..... ( 18 )

###### 例题 1—3 ..... ( 22 )

##### 2. 阻力和速度之二次方呈正比时质点的直线运动 ..... ( 24 )

###### 例题 1—4 ..... ( 29 )

##### 3. 阻力和速度之三次方呈正比时质点的直线运动 ..... ( 32 )

##### 4. 阻力和速度之四次、五次方呈正比时质点的直线运动 ..... ( 34 )

## 第二章 质点的抛射运动 ..... ( 37 )

### 第一节 抛射运动的基本理论 ..... ( 37 )

### 第二节 质点在真空中之抛射运动 ..... ( 43 )

例题 2—1 .....	( 51 )
<b>第三节 质点在介质中的阻尼力和 <math>v</math> 呈正比时的</b>	
<b>抛射运动 .....</b>	<b>( 25 )</b>
<b>第四节 质点在介质中的阻尼力和 <math>v^2</math> 呈正比时的</b>	
<b>抛射运动 .....</b>	<b>( 57 )</b>
1. 二次阻尼介质中的抛射运动 .....	( 57 )
2. 伯努利方程 .....	( 60 )
例题 2—2 .....	( 64 )
3. 用图解法解二次阻尼时的抛射问题 .....	( 69 )
例题 2—3 .....	( 72 )
<b>第五节 在二次以上阻尼介质中之抛射运动 .....</b>	<b>( 74 )</b>
1. 三次阻尼介质中之抛射运动 .....	( 74 )
2. 四次、五次阻尼介质中之抛射运动 .....	( 76 )
3. $n$ 次阻尼介质中之抛射运动 .....	( 78 )
4. 质点在介质阻力与 $(1 + mv^n)$ 呈正比时的抛射运动 .....	( 79 )
<b>第六节 近似算法——龙盖法计算质点的</b>	
<b>抛射运动 .....</b>	<b>( 81 )</b>
例题 2—4 .....	( 85 )

### **第三章 中心力 .....** ( 89 )

#### **第一节 中心力场中质点运动的基本理论 .....** ( 89 )

  1. 在中心力场中, 质点的运动轨迹是一根平面曲线 .....

  2. 中心力微分方程的解 .....

#### **第二节 为一次正比时的质点运动 .....** ( 94 )

#### **第三节 中心力为二次反比时质点的运动 .....** ( 99 )

  1. 中心力为二次反比时的解法和曲线的性质 .....

    例题 3—1 .....

    例题 3—2 .....

2.二次反比时质点的运动方程.....	( 110 )
例题 3—3 .....	( 114 )
3.椭圆轨道最小矢径的限制.....	( 115 )
例题 3—4 .....	( 117 )
4.在二次反比中心力场中,质点在轨道上位置的确定.....	( 118 )
第四节 中心力为二次反比斥力时,质点的运动	
情形 .....	( 126 )
例题 3—5 .....	( 128 )

## 第四章 变质量质点的运动.....( 134 )

第一节 火箭运动.....	( 134 )
1.齐奥尔科夫斯基第一问题.....	( 136 )
2.齐奥尔科夫斯基第二问题.....	( 138 )
第二节 火箭列车各部分质量的确定.....	( 139 )
1.火箭列车的齐奥尔科夫斯基公式.....	( 139 )
2.火箭列车各部分质量的确定.....	( 141 )
3.火箭列车各部分重量的具体设计.....	( 147 )
第三节 火箭列车的最佳设计.....	( 151 )
1.齐氏数的最佳值.....	( 151 )
2.齐氏数最佳值的逼近.....	( 155 )
第四节 近光速时的齐氏公式——阿克莱公式.....	( 157 )



# 第一章 质点的直线运动

## 第一节 质点在受各种形式外力作用时的直线运动

### 1. 当外力为常数时质点的直线运动

设某质点的质量为  $m$ ，受到一个方向、大小都不变的外力  $m\mathbf{K}$  的作用；并设外力之作用线与质点的运动轨迹相重合。

求质点之运动方程

根据公式

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

可得质点之矢量微分方程为

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{K} \dots\dots\dots (1-1)$$

将 (1-1) 式向笛卡儿坐标投影，得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= K_x \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= K_y \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= K_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1-2)$$

将 (1-2) 式依次积分二次，可得

$$\left. \begin{aligned} v_x &= k_x t + c_{x1} \\ v_y &= k_y t + c_{y1} \\ v_z &= k_z t + c_{z1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1-3)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} k_x t^2 + c_{x1} t + c_{x2} \\ y &= \frac{1}{2} k_y t^2 + c_{y1} t + c_{y2} \\ z &= \frac{1}{2} k_z t^2 + c_{z1} t + c_{z2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1-4)$$

上两方程组中的  $c_{x1}$ 、 $c_{y1}$ 、 $c_{z1}$ ； $c_{x2}$ 、 $c_{y2}$ 、 $c_{z2}$  都是积分时出现的积分常数，其值决定于开始计算质点运动时的“起始条件”。

如设开始计算质点运动时，即  $t = t_0$  时，（一般  $t_0 = 0$ ）质点的运动参数为

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$$

将此参数在各座标轴上的分量  $v_{0x}$ 、 $v_{0y}$ 、 $v_{0z}$  和  $r_{0x}$ 、 $r_{0y}$ 、 $r_{0z}$  代入方程式 (1-3) (1-4)，则很容易得到

$$c_{x1} = v_{0x}$$

$$c_{x2} = r_{0x}$$

$$c_{y1} = v_{0y}$$

$$c_{y2} = r_{0y}$$

$$c_{z1} = v_{0z}$$

$$c_{z2} = r_{0z}$$

于是就可以得到完全确定了了的质点运动的速度方程和运动方程：

$$\left. \begin{aligned} v_x &= k_x t + v_{0x} \\ v_y &= k_y t + v_{0y} \\ v_z &= k_z t + v_{0z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1-5)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= r_{0x} + v_{0x}t + \frac{1}{2}k_x t^2 \\ y &= r_{0y} + v_{0y}t + \frac{1}{2}k_y t^2 \\ z &= r_{0z} + v_{0z}t + \frac{1}{2}k_z t^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1-6)$$

在实用上，座标轴 $x$ 多取在常力的作用线上，这样，最后取得的方程组就可简化呈(1-5)中的第一式和(1-6)式中的第一式。

### 例题1-1

已知一物体重75公斤，自离地面20公里的高空处自由落下。如设重力加速度 $g_0$ 不随高度变化，也不考虑空气阻力，

求此物体的落地的速度和时间。

**解：**由于物体下落时不考虑空气阻力和 $g_0$ 设为常量，故物体上的作用力只有一个大小、方向皆不变的重力。另外，因物体是自由落体，故只取 $y$ 轴为投影轴，又设向下的方向为正；并且， $y_0 = 0$ ， $v_{y0} = 0$ ，这样，根据(1-5)、(1-6)式可得

$$\left. \begin{aligned} v_y &= g_0 t \\ y &= \frac{1}{2} g_0 t^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A)$$

移项后，即得

$$\left. \begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2y}{g_0}} \\ v_y &= \sqrt{2g_0 y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (B)$$

将  $g_0 = 9.8$ 米/秒<sup>2</sup>

$y = 20000$ 米

代入(B)式，就可得到

$$t = \sqrt{\frac{40000}{9.8}} = 64 \text{ (秒)}$$

$$v_y = +\sqrt{2 \times 9.8 \times 20000} = 625 \text{ (米/秒)}$$

$v_y$  所以取正号的意思是由于它方向朝下。

这就是落体在简单条件下的下落情况。

## 2. 当外力为时间的函数时质点的直线运动

设某一质量为  $m$  的质点，受到某一外力的作用；此外力方向虽不变，即其作用线一直与质点之运动轨迹相重合，而其大小则为时间的函数；即

$$\mathbf{F} = m\mathbf{r}f(t)$$

求质点之运动方程。

根据公式

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

得微分方程

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{r}f(t) \dots\dots\dots (1-7)$$

今将方程 (1-7) 向笛卡儿坐标轴投影，得

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= f_x(t) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= f_y(t) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= f_z(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1-8)$$

将 (1-8) 方程组依次积分两次，得到：

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \int_{t_0}^t f_x(t) dt + v_{0x} \\ v_y &= \int_{t_0}^t f_y(t) dt + v_{0y} \\ v_z &= \int_{t_0}^t f_z(t) dt + v_{0z} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1-9)$$

和

$$\left. \begin{aligned} x &= \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t f_x(t) dt + v_{0x}(t-t_0) + x_0 \\ y &= \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t f_y(t) dt + v_{0y}(t-t_0) + y_0 \\ z &= \int_{t_0}^t dt \int_{t_0}^t f_z(t) dt + v_{0z}(t-t_0) + z_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1-10)$$

方程组 (1-9) 和 (1-10) 就是质点从  $t_0$  开始至某一时间  $t$  的速度方程和位移方程 (运动方程)。式中  $v_{0x}$ ,  $v_{0y}$ ,  $v_{0z}$  和  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  都是已知的初始条件, 即在开始时 ( $t=t_0$  时) 质点的速度和位移。

### 3. 当外力为位置的函数时, 质点的直线运动

设质量为  $m$  的某一质点  $M$ , 受到某一外力  $F$  作用, 此外力的方向不变, 并且其作用线一直与质点的运动轨迹相重合, 而外力的大小为质点本身位置的函数, 即

$$F = mr f(r)$$

求质点之运动方程

根据公式

$$m \frac{d^2 F}{dt^2} = F$$

得 
$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = m r f(r)$$

由于质点之运动为直线，为简便起见，不妨将座标轴  $x$  取在质点的轨迹上，于是上式只要向  $x$  轴投影，逐得

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(x) \dots\dots\dots (1-11)$$

为了解 (1-11) 微分方程方便，今在它的两端各乘

$$2 \frac{dx}{dt}, \text{ 即}$$

$$2 \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = f(x) \cdot 2 \frac{dx}{dt}$$

因为 
$$2 \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right] = \frac{d}{dt} (v^2)$$

所以 
$$\frac{d}{dt} (v^2) = 2 \frac{dx}{dt} \cdot f(x)$$

将上式自  $x_0$  至  $x$ ，自  $v_0$  至  $v$  积分，移项整理后，得质点之速度方程为

$$v = \sqrt{2 \int_{x_0}^x f(x) dx + v_0^2} \dots\dots\dots (1-12)$$

因为  $v = \frac{dx}{dt}$ ，故代入上式并变数分离后，上式就变为

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2 \int_{x_0}^x f(x) dx + v_0^2}}$$

将上式自  $x_0 \rightarrow x$ ,  $t_0 \rightarrow t$  再积分一次, 逐得

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{2 \int_{x_0}^x f(x) dx + v_0^2}} \dots\dots (1-13)$$

### 例题1-2

已知一物体重75公斤, 自离地面20公里的高空自由落下, 如设不考虑空气的阻力;

求物体下落至地面时的速度、时间。

解: 根据牛顿万有引力, 物体在地球高空的重量为

$$F = -\frac{GMm}{x^2} = mg \dots\dots (A)$$

式中:  $F$  为万有引力

$G$  为引力常数

$M$  为地球的质量

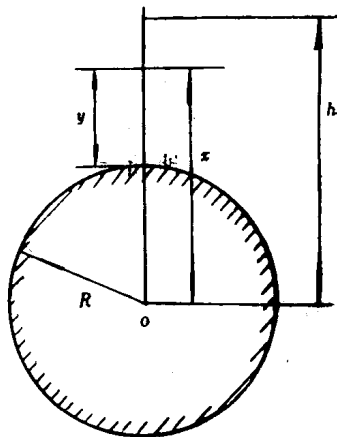
$m$  为物体的质量

$x$  为物体至地球中心之距离

$g$  为离地心为  $x$  距离时的重力加速度

当物体在海平面时其重量为

$$mg_0 = \frac{-GMm}{R^2} \dots\dots (B)$$



例1-2图

式中:  $R$  为地球半径 (约  $R = 6400$  公里)

$g_0$  为海平面上, 亦即离地心为  $R$  时之重力加速度。

如 (例1-2图)

今将 (B) 式移项:

$$-GM = g_0 R^2$$

将此代入 (A) 式, 则得

$$g = g_0 \frac{R^2}{x^2} \dots\dots\dots (C)$$

(C) 式说明了这样一个情况: 即重力加速度  $g$  不是常数, 是随高度而变化的。当一物体自高空自由下落时, 其所受到的重力, 不是恒力, 而是随高度而变化的一个变力。

现在, 将 (C) 式代入 (1-12) 式, 得到

$$v_y = \pm \sqrt{2 \int_h^x (g_0 \frac{R^2}{x^2}) dx}$$

$$\text{积分后, } v_y = \pm \sqrt{2g_0 R^2 (\frac{1}{x} - \frac{1}{h})} \dots\dots\dots (D)$$

如果  $h \rightarrow \infty$ ,  $x = R$  则

$$v_y = \pm \sqrt{2g_0 R} \dots\dots\dots (E)$$

这就是物体自无穷远落至地面时之落地速度。

如果离地面高  $y$  的物体, 落向地面, 这时 (D) 式就变成

$$v_y = \pm \sqrt{2g_0 R^2 (\frac{1}{R} - \frac{1}{R+y})}$$

整理后, 成为

$$v_y = \pm \sqrt{2g_0 y (\frac{R}{R+y})} \dots\dots\dots (F)$$

比较 (F) 和例1-1中的 (B) 式, 就可发现, (F) 式比

(B) 式多了一个“修正项”  $\sqrt{\frac{R}{R+y}}$

如果  $y$  和  $R$  比不很大, 那末修整项将近似于1 而可看成1, 这时 (F) 式就变成了例1-1的 (B) 式。但如果  $y$  有足够大,



大到修整项不可忽略，这时，(B)式将不能反映正确的 $v_y$ ，而一定要用(F)式了。这就是离地高度 $y$ 足够大时必须用(F)式的道理。

现在，回过来看例题1—2。

今将题中之数据

$$g_0 = 9.8 \text{ (米/秒)}$$

$$R = 6.4 \times 10^6 \text{ (米)}$$

$$y = 20 \times 10^3 \text{ (米)}$$

代入(F)式，得

$$v_y = 625 \times 0.998$$

$$= 624 \text{ (米/秒)}$$

由于20公里和地球半径比，相对很小，所以算出之答案和例题1—1的很相近，几乎一样。

从这里可推知，物体下落的时间 $t$ 和例1—1的也相近，用例1—1的已足够准确，所以在此不予计算了。但是他的计算方法大致如下：

将(C)式代入(1—13)式，得到

$$t - t_0 = \int_h^x \frac{dx}{\sqrt{2 \int_h^x (g_0 \frac{R^2}{x^2}) dx + v_0^2}}$$

因 $t_0 = 0$ ， $v_0 = 0$  故上式积分后为

$$t = - \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2gR^2}} \int_h^x \sqrt{\frac{x}{h-x}} dx,$$

这个积分必须作下列变换方可进行。

$$\text{令 } x = h \cos \theta$$

$$dx = -2h \sin \theta \cos \theta$$

代入整理后为