

# 航空发动机 强度设计试验手册

(试用本)

第一篇 第五章

## 转子支承系统的临界转速计算



第三机械工业部第六研究院

# 航空发动机强度设计、试验手册

第一篇 第五章

## 转子支承系统的临界转速计算

(试 用 本)

主编 张哲文 刘启洲

主审 傅志方



30320775



第三机械工业部第六研究院

472257

## 出版说明

为加强航空发动机强度专业的设计和基础科研工作，总结建国以来航空发动机强度专业的工作成果，我们组织编写了“航空发动机强度设计、试验手册”（试用本）。并望在今后的试用过程中，不断地加以修正、充实和提高，进而为编制我国航空发动机强度规范打下基础。

本手册分设计和试验两篇。设计篇有六章，主要介绍发动机总体结构强度和叶片、盘、轴、机匣等主要零、部件的常规强度计算方法和有限元素法，并给出了相应的计算程序。试验篇六章介绍了主要零、部件的强度试验方法、试验设备、测试技术及误差分析等内容。书中也收集了国外航空发动机强度设计计算与试验等方面的有关资料。由于手册涉及专业内容较多，故采取分章出版。每章为一分册。

本手册主要供从事发动机结构设计、强度计算和强度试验的人员使用；也可供教学及有关专业人员参考。

直接参加本手册编写工作的有六〇六、六〇八、六二一、六二四、六三〇所，一二〇、三三一、四一〇、四二〇、四三〇厂，〇一一基地二所，南航、北航、西工大；三院三十一所、七院七〇三所、七〇一所和上海长征机械厂。三〇一所和六二八所为本手册提供了有关资料。

本手册由于是初次编写，时间仓促，水平有限，错误和不妥之处在所难免，诚恳地希望同志们提出批评和指正。

## 常用符号表

|                |             |                                    |
|----------------|-------------|------------------------------------|
| A              | —面积         | 厘米 <sup>2</sup>                    |
| b              | —宽度         | 厘米                                 |
| b              | —阻尼系数       | 公斤·秒/厘米                            |
| D、d            | —直径         | 厘米                                 |
| E              | —弹性模数       | 公斤/厘米 <sup>2</sup>                 |
| e              | —偏心距        | 厘米                                 |
| F <sub>r</sub> | —径向载荷       | 公斤                                 |
| F <sub>a</sub> | —轴向载荷       | 公斤                                 |
| g              | —重力加速度      | 米/秒 <sup>2</sup>                   |
| h              | —高度         | 厘米                                 |
| I <sub>d</sub> | —直径转动惯量     | 公斤·厘米·秒 <sup>2</sup>               |
| I <sub>p</sub> | —极转动惯量      | 公斤·厘米·秒 <sup>2</sup>               |
| I*             | —诱导转动惯量     | 公斤·厘米·秒 <sup>2</sup>               |
| J              | —截面惯性矩      | 厘米 <sup>4</sup>                    |
| K、k            | —刚性系数       | 公斤/厘米                              |
| L、l            | —长度         | 厘米                                 |
| M              | —力矩、弯矩      | 公斤·厘米                              |
| m              | —质量         | 公斤·秒 <sup>2</sup> /厘米              |
| n              | —转速         | 转/分                                |
| n <sub>c</sub> | —临界转速       | 转/分                                |
| P              | —力、载荷       | 公斤                                 |
| Q              | —剪力         | 公斤                                 |
| q(x)           | —分布质量离心力    | 公斤/厘米                              |
| R              | —半径         | 厘米                                 |
| R              | —支反力        | 公斤                                 |
| y              | —挠度         | 厘米                                 |
| Z              | —滚珠、滚棒或拉杆个数 |                                    |
| α              | —角加速度       | 1/秒 <sup>2</sup>                   |
| γ              | —重度         | 公斤/厘米 <sup>3</sup>                 |
| δ              | —柔性系数       | 厘米/公斤或毫米/公斤                        |
| θ              | —挠角         |                                    |
| μ              | —单位长度质量     | 公斤·秒 <sup>2</sup> /厘米 <sup>2</sup> |

$\rho$  ——回转半径 厘米  
 $\sigma$  ——应力 公斤/厘米<sup>2</sup>  
 $\Omega$  ——角速度 1/秒  
 $\omega$  ——角速度 1/秒  
 $\omega_c$  ——临界角速度 1/秒  
**(B)** ——弹性矩阵  
**(U)** ——振动状态参变量矩阵

### 表 号 符 号 常

|  |             |   |
|--|-------------|---|
| 米 <sup>2</sup>                         | 端面 ——       | A |
| 米                                      | 厚度 ——       | d |
| 米 <sup>2</sup> /秒 <sup>2</sup> ·厘米     | 螺条刚度 ——     | D |
| 米                                      | 直径 ——       | d |
| 米 <sup>2</sup> /厘米                     | 螺条刚度 ——     | E |
| 米                                      | 螺心距 ——      | e |
| 厘米                                     | 螺距 ——       | f |
| 厘米                                     | 螺距 ——       | f |
| 米/秒                                    | 螺条质量 ——     | G |
| 米                                      | 螺条 ——       | H |
| 米 <sup>2</sup> ·米 <sup>2</sup> ·厘米     | 螺条刚度 ——     | I |
| 米 <sup>2</sup> ·米 <sup>2</sup> ·厘米     | 螺条刚度 ——     | I |
| 米 <sup>2</sup> ·米 <sup>2</sup> ·厘米     | 螺条刚度 ——     | I |
| 米 <sup>2</sup>                         | 螺条刚度 ——     | I |
| 米 <sup>2</sup> /厘米                     | 螺条刚度 ——     | J |
| 米                                      | 螺条 ——       | L |
| 米 <sup>2</sup> ·厘米                     | 螺条 ——       | M |
| 米 <sup>2</sup> /米 <sup>2</sup> ·厘米     | 螺条 ——       | m |
| 米/秒                                    | 螺条 ——       | n |
| 米/秒                                    | 螺条 ——       | n |
| 厘米                                     | 螺条 ——       | P |
| 厘米                                     | 螺条 ——       | Q |
| 米 <sup>2</sup> /厘米                     | 螺条 —— (x) P |   |
| 米                                      | 螺条 ——       | R |
| 厘米                                     | 螺条 ——       | R |
| 米                                      | 螺条 ——       | S |
| 米 <sup>2</sup>                         | 螺条 ——       | T |
| 米 <sup>2</sup> /厘米                     | 螺条 ——       | U |
| 厘米/米 <sup>2</sup> ·厘米 <sup>2</sup> ·厘米 | 螺条 ——       | V |
| 米 <sup>2</sup> /米 <sup>2</sup> ·厘米     | 螺条 ——       | W |
| 米 <sup>2</sup> /米 <sup>2</sup> ·厘米     | 螺条 ——       | X |

## 序 言

临界转速分析是航空燃气涡轮发动机转子支承系统设计工作中最为重要的内容之一，其主要目的在于将临界转速调整到发动机工作转速以外，避免工作转速范围内的共振，从而得到可靠的设计。

目前，临界转速的分析方法已经发展到比较完善的地步，有许多方法可用来实际计算任何类型转子支承系统的临界转速。

本章在简要地阐述了临界转速的概念，和影响临界转速的因素后，着重介绍三种可用于实际发动机的临界转速计算方法：积分法、积木式递推矩阵法和估算法（ $K_3$ 法），附有计算机源程序和计算表格。为了使读者便于掌握、应用这些方法，文中对各种方法的基本原理作了较详细的论述，提供了计算实例。

弹性支承和挤压油膜阻尼器，作为调整临界转速和减小发动机振动的有效措施，已应用在许多现代航空发动机上。本章就弹性支承的设计进行了较为详尽的阐述，归纳出弹性支承的设计步骤，给出了有关参考数据。由于对挤压油膜阻尼器的工作基理和设计方法掌握得还不够深入，文中只是对挤压油膜阻尼器作了简要介绍。

编写过程中，曾试图尽量选用较为成熟和通用的计算、设计方法，但由于各种条件的限制，只能就作者自身实践过的方法予以总结，编入本章，仅供参考。此外，由于我们水平有限，以及缺乏编辑出版《手册》的经验，本章在内容和形式方面，一定会存在不少缺点和错误。热忱希望读者在试用过程中进一步审查、验证，提出批评和建议，以便今后加以修订。

本章由西北工业大学张哲文、刘启洲主编。概述和计算模型的建立由张哲文、刘启洲编写；积分法由北京航空学院谢竹虚编写；积木式递推矩阵法由六二四所何通儒、许世安编写；估算法（ $K_3$ 法）由六二四所许世安、黎明、何通儒编写；弹性支承的设计由北京航空学院晏励堂编写；挤压油膜阻尼器简介由西北工业大学徐忠勤、张哲文编写。

全章由上海交通大学傅志方主审。

此外，六〇八所欧园霞同志为本书提供了有关素材。

转子支承系统的临界转速计算编写小组

一九八二年九月

# 目 录

|                       |      |
|-----------------------|------|
| 序 言                   | 4    |
| 第一节 概述                | (1)  |
| (一)、转子临界转速的概念         | (1)  |
| (二)、影响临界转速的因素         | (2)  |
| (1). 支承柔性的影响          | (2)  |
| (2). 陀螺力矩的影响          | (3)  |
| (3). 阻尼的影响            | (4)  |
| (4). 转子运转的加速(减速)过程的影响 | (5)  |
| (5). 其他影响因素           | (5)  |
| (三)、处理临界转速问题的方法       | (5)  |
| 第二节 计算方法              | (6)  |
| (一)、计算模型的建立           | (6)  |
| 1. 轴的处理               | (6)  |
| 2. 轮盘的处理              | (6)  |
| 3. 支承条件的简化            | (6)  |
| 4. 套齿和弹簧片的简化          | (7)  |
| 二、积分法                 | (9)  |
| 1. 基本原理               | (9)  |
| 2. 基本公式               | (10) |
| 3. 迭代计算步骤             | (13) |
| 4. 高阶临界转速的计算          | (14) |
| 5. 源程序                | (15) |
| 6. 计算实例与分析            | (16) |
| 三、积木式递推矩阵法            | (18) |
| 1. 基本原理               | (20) |
| 2. 基本公式               | (22) |
| 3. 通用源程序              | (32) |
| 4. 应用举例               | (38) |
| 5. 结论                 | (45) |
| 四、估算法— $K_3$ 法        | (47) |
| 1. $K_3$ 法的基本公式       | (47) |
| 2. 使用方法               | (51) |
| 3. 应用举例               | (51) |

|                                   |             |
|-----------------------------------|-------------|
| 4. 误差估计.....                      | (55)        |
| <b>第三节 弹性支承的设计和挤压油膜阻尼器简介.....</b> | <b>(56)</b> |
| 一、弹性支承的设计.....                    | (56)        |
| 1. 弹性支承的结构类型.....                 | (56)        |
| 2. 弹性支承转子的临界转速特性.....             | (58)        |
| 3. 弹性支承的刚度和强度.....                | (61)        |
| 4. 弹性支承变形的限制和非线性弹性支承.....         | (68)        |
| 5. 弹性支承的设计步骤.....                 | (69)        |
| 6. 几种弹性支承的有关参数数据.....             | (70)        |
| 二、挤压油膜阻尼器简介.....                  | (70)        |
| 1. 挤压油膜阻尼器的工作原理和发展概况.....         | (70)        |
| 2. 挤压油膜阻尼器的有关设计参数.....            | (73)        |
| 附录.....                           | (75)        |
| I 积分法的源程序.....                    | (75)        |
| II 积木式递推矩阵法的通用源程序.....            | (78)        |
| III $K_3$ 值表.....                 | (91)        |
| IV 刚度、质量折算公式.....                 | (151)       |
| 参考文献.....                         | (152)       |
| (8.) .....                        | .....       |
| (9.) .....                        | .....       |
| (10.) .....                       | .....       |
| (11.) .....                       | .....       |
| (12.) .....                       | .....       |
| (13.) .....                       | .....       |
| (14.) .....                       | .....       |
| (15.) .....                       | .....       |
| (16.) .....                       | .....       |
| (17.) .....                       | .....       |
| (18.) .....                       | .....       |



# 第一节 概述

## 一、转子临界转速的概念

燃气涡轮发动机的使用经验表明：在某些转速时，转子的挠度显著增大，同时出现巨大的不平衡力和力矩，这些转速称为临界转速。如果临界转速处在发动机的工作转速范围内，就可能导致发动机的振动大大加剧。转子在远小于或大于临界转速下运转时，其工作平稳，挠度很小。

图 1-1 示出一个盘—轴系统，盘位于轴的中点。通过分析它的运动，可以了解有关临界转速的基本性质。分析时，先忽略轴质量和由于盘重量使轴产生的静挠度的影响。

由于制造不精确和材料不均质，轮盘重心  $c$  与盘在轴上的固定点  $o_1$  常常是不重合的，即存在偏心距  $e$ 。这样，转子旋转时就会产生使轴挠曲的离心力  $P_c$ 。

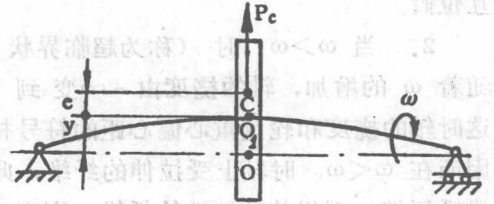


图 1-1 盘—轴系统简图

当转子以等角速度  $\omega$  作稳态运动时，轮盘受到弹性恢复力和轮盘质量离心力的作用。

根据力的平衡条件可得出如下等式：

$$m(y + e)\omega^2 = ky \quad (1-1)$$

式中  $m$ ——轮盘的质量；

$y$ ——轴在固定轮盘处的挠度；

$k$ ——轴在固定轮盘处的弯曲刚性系数。

解出 (1-1) 式中的  $y$ ，得到挠度的表达式：

$$y = \frac{e}{\frac{K}{m\omega^2} - 1} \quad (1-2)$$

从 (1-2) 式可看出，当旋转角速度  $\omega$  趋近于  $k/m$  时，轴的挠度剧烈增大，而当

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \omega_c \quad (1/秒) \quad (1-3)$$

时，挠度趋于无穷大。这个角速度称为临界角速度（通常以  $\omega_c$  表示）。临界转速则为：

$$n_c = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (转/分) \quad (1-4)$$

由 (1-4) 式可知，转子的临界转速仅取决于轮盘的质量和轴的弯曲刚性系数  $K$ ，而与轮盘偏心距  $e$  的大小无关，无论转子的加工及平衡精度多么高，转子的临界转速总是存

的，其数值与有偏心距时相同。

下面分析当转子角速度改变时轴的挠度如何变化。为此将(1-3)式代入(1-2)式，得

$$y = \frac{e}{\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 - 1} \quad (1-5)$$

(1-5)式的图解见图1-2。

由(1-5)式和图1-2可得出如下结论：

1. 当  $\omega < \omega_c$  时 (称为亚临界状态)，随着  $\omega$  的增加，轴的挠度由 0 变到  $+\infty$ ，并且轴的挠度和轮盘重心偏心距的符号相同。相当于图1-2(b)所示 O、O<sub>1</sub> 和 C 各点的相互位置。

2. 当  $\omega > \omega_c$  时 (称为超临界状态)，随着  $\omega$  的增加，轴的挠度由  $-\infty$  变到  $-e$ 。这时轴的挠度和轮盘重心偏心距的符号相反。因而在  $\omega < \omega_c$  时轴上受拉伸的纤维，此时变成受压缩；而以前受压缩的纤维，则变为受拉伸。只有当轮盘重心移到 O 与 O<sub>1</sub> 点之间 (图1-2(c)) 时，才可能发生这种情况。这时，离心力和弹性恢复力的平衡方程为：

$$m(y - e)\omega^2 = ky \quad (1-6)$$

(1-1) 和 (1-6) 式证明了转子在非临界的各个角速度下运转时，这些力能够平衡。同时根据受力情况和陀螺效应的分析，还可以证明其平衡是稳定的 (即转子运动的平衡状态不可能被任何外界干扰破坏) [1]。

据上分析可知，临界转速是转子系统的固有特性，当不考虑陀螺效应和工作环境等因素时，转子的临界转速在数值上与转子横向振动的固有频率相同。因此一个转子 (弹性体) 在理论上有无穷多个临界转速，按其数值由小到大排列为： $n_{c_1}$ 、 $n_{c_2}$ 、…… $n_{c_k}$ 、……，分别称为一阶、二阶、……k阶、……临界转速。在工程上有实际意义的主要是前几阶临界转速。

## 二、影响临界转速的因素

### 1. 支承柔性的影响

发动机转子用轴承支于机匣上，发动机又通过安装节装在机翼或机身上，这些支持装置无一不是柔性的，因而减小了支承刚性。支承刚性的减小将使临界转速降低。近似计算时，可采用将支承刚性减小的影响效果折算到使转子刚性降低的处理方法，来考虑支承柔性的影响。例如，将支承刚性减小的影响计入表示转子刚性的效应系数内，求出转子的折合效应系数，并以折合效应系数代替转子真正的效应系数，仍按刚性支承导出的公式计算临界转

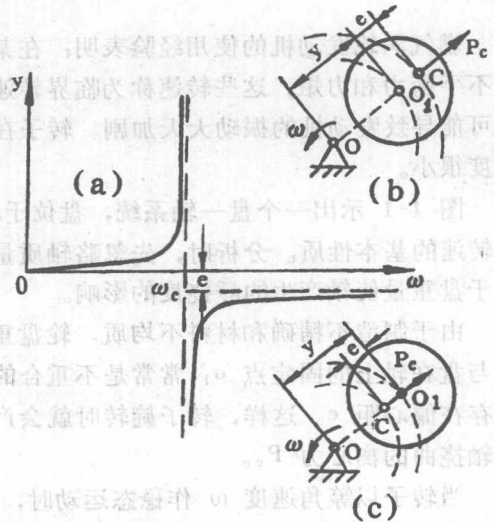


图1-2 旋转角速度不同时转子的运动情况

- (a) ——轴在固定轮盘处的挠度随角速度的变化，  
 (b) —— $\omega < \omega_c$  时，轮盘重心 C、盘在轴上的固定点 O<sub>1</sub> 和轴承中心线之间的相对位置；  
 (c) —— $\omega > \omega_c$  时，轮盘重心 C、盘在轴上的固定点 O<sub>1</sub> 和轴承中心线之间的相对位置。

速<sup>[2]</sup>。这种方法仅适用于支承柔性不太大的情况。

在近代航空燃气涡轮发动机上，为了有效地控制临界转速而应用了弹性支承。这时转子的支承柔性较大，临界转速显著降低。但在低阶（用一个弹性支承时的第一阶，用两个弹性支承时的第一、二阶）临界转速时，转子弯曲变形极小（接近于刚体），转子支承系统振幅较大；而在高阶（用一个弹性支承时的第二阶，用两个弹性支承时的第三阶）临界转速时，转子的弯曲变形较大，振动也较大（关于弹性支承转子的临界转速特性，在第三节中作了较详细的论述）。为了较准确地计算出其各阶临界转速，须按弹性支座建立计算模型。本章介绍的几种计算方法，均可用于带弹性支承转子的临界转速计算。

## 2. 陀螺力矩的影响

转子旋转时可能伴随有所谓轴的进动运动。轴的弯曲中心线所在平面的旋转称为轴的进动。如果该平面的旋转角速度的大小和方向，均与转子绕其自身的弯曲轴线的旋转角速度的大小和方向相同，则轴的进动称之为协调正进动。如果轴的弯曲中心线所在平面的旋转方向，与转子绕其自身的弯曲轴线的旋转方向相反，而且角速度的大小相等，则称为协调反进动。当两个旋转角速度不同时，称为非协调进动。

装有轮盘的轴作进动运动时，在轴的弯曲中心线的平面内会发生陀螺效应。

陀螺效应的实质在于：如果轮盘绕  $AO_1$  轴以角速度  $\omega$  旋转（见图 1-3），同时轴  $AO_1$  又绕  $OO_1$  轴以角速度  $\Omega$  旋转，那么在任何瞬间都有陀螺力矩  $M_G$  作用在轴上。 $M_G$  按下式计算：

$$M_G = A\Omega^2\theta, \quad (1-7)$$

式中

$$A = -I_d \left( \frac{I_p}{I_d} \frac{\omega}{\Omega} - 1 \right);$$

$\theta$  —— 转子轴线在轮盘处的挠角；

$I_p$  —— 轮盘的极转动惯量；

$I_d$  —— 轮盘的直径转动惯量。

对于薄盘（平均厚度与半径之比  $\leq 0.2$ ）：

协调正进动时， $A = -I_d$ ， $M_G = -I_d\omega^2\theta$ ；

协调反进动时， $A = 3I_d$ ， $M_G = 3I_d\omega^2\theta$ 。

由上式可看出，协调正进动时，陀螺力矩使挠角减小，相当于增大了轴的刚性，导致临界转速的升高；协调反进动时，陀螺力矩使挠角增大，相当于减小了轴的刚性，导致临界转速的降低。

对于一些形状特殊的厚盘（例如离心压气机的叶轮），可能出现  $I_p < I_d$  的情况。此时，协调正、反进动的陀螺力矩均有降低临界转速的作用。

实际中，经常出现的只是协调正进动，其他进动很少发生。因此，设计发动机时，往往只计算协调正进动时的临界转速。

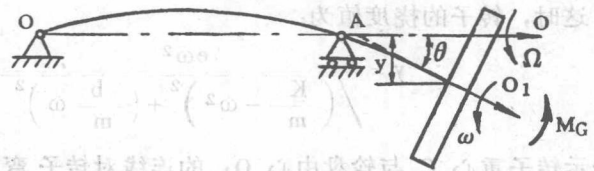
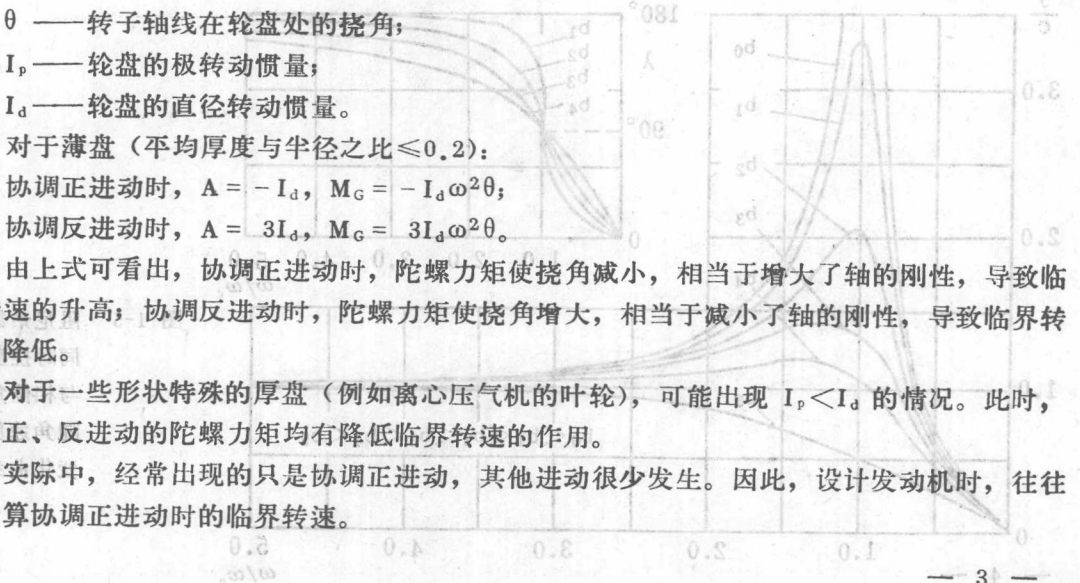


图 1-3 确定陀螺力矩的简图



陀螺力矩对临界转速的影响程度将随转子的具体结构而异。对悬臂式转子(常见于涡轮)的影响,要比对双支式转子(常见于压气机)的影响大。对于多盘转子,各个盘的陀螺效应无论是在第一阶的对称振型和第二阶的反对称振型都是叠加的,轮盘越多,其影响也越大。因此,对于多轮盘转子和悬臂式转子,尤其是轮盘尺寸较大的转子,计算临界转速时需考虑陀螺力矩的影响。

### 3. 阻尼的影响

转子运转时,有来自转子外部的空气、轴承中的滑油或阻尼器的阻力作用;也有来自转子内部材料分子之间的阻尼作用。前者称外阻尼;后者称内阻尼。

外阻尼力的方向恒与转子的运动方向相反,其大小可近似地假定为与运动速度成正比(粘性阻尼如此)。对于图 1-1 所示的转子(即单质量系统),在只计入外阻尼力的情况下,转子稳态运转时的受力情况如图 1-4 所示,离心力  $P_c$ 、外阻尼力  $P_b$  和弹性恢复力  $P_r$  达成平衡。

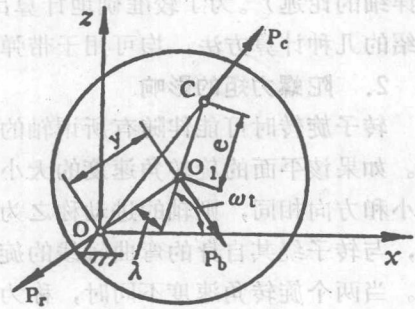


图 1-4 计及外阻尼力时转子上力的平衡

这时,转子的挠度值为:

$$y = \frac{e\omega^2}{\sqrt{\left(\frac{K}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\omega\right)^2}}, \quad (1-8)$$

而表示转子重心 C 与轮盘中心  $O_1$  的连线对转子弯挠平面相关位置的  $\lambda$  角(简称为相位角)为:

$$\lambda = \arctg\left(\frac{b\omega}{K - m\omega^2}\right), \quad (1-9)$$

式中  $b$ ——阻尼系数。

阻尼系数不同时,挠度  $y$  与相位角  $\lambda$  随角速度的变化曲线示于图 1-5。

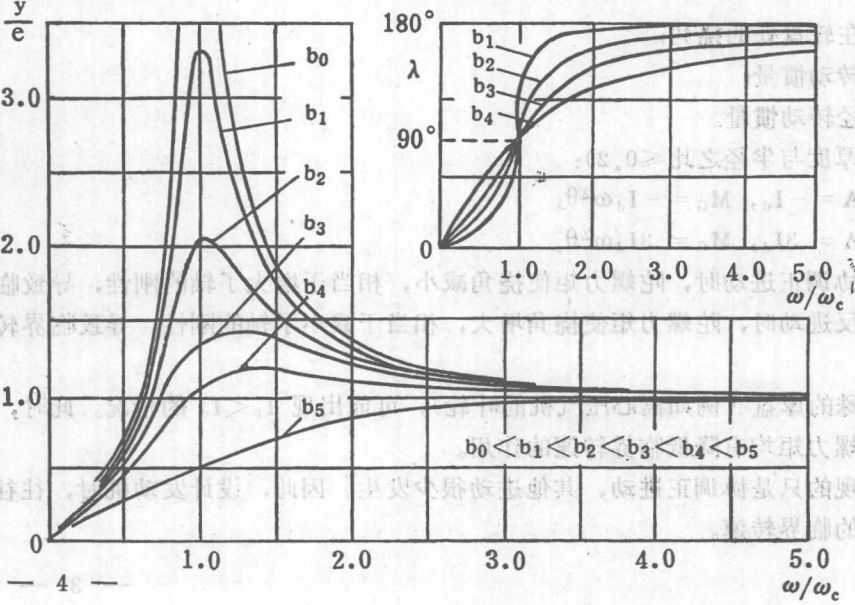


图 1-5 阻尼系数不同时挠度  $y$  与相位角  $\lambda$  随角速度的变化曲线

由图可看出，最大挠度随着阻尼系数的增大而减小，而且最大挠度出现在角速度略大于无阻尼时临界角速度  $\omega_c$  处。在转子结构和阻尼系数一定的情况下，相位角将随角速度变化。 $\omega = \omega_c$  时， $\lambda = 90^\circ$ 。阻尼系数较小时，在临界角速度  $\omega_c$  附近当  $\omega$  略有变化，相位角就变化很大，也就是说，轴的弯挠方向迅速改变。

内阻尼的作用较为复杂，在一般情况下它将使振动衰减以至消失。但在特定条件下，内阻尼也能引起转子的自激振动，并影响转子运转的稳定性，往往使失稳提前发生。

#### 4. 转子运转的加速（减速）过程的影响

某些航空燃气涡轮发动机的工作转速高于一阶临界转速。因此，无论在起动或停车期间，必然要通过共振区域，在通过共振区域时，转子正在作加速或减速转动。这种情况下，临界转速值和振幅的大小都将发生变化。

试验结果表明：在加速时，新的“临界转速”值（即出现最大振幅时的转速）将高于原来值；而在减速时，则低于原来值。至于振幅的大小，则无论加速或减速，均小于转子转速不变并停留在临界转速时的振幅值。但是，减速时的最大振幅值略大于加速时的最大振幅值。

若图 1-1 所示转子以等角加速度  $\alpha$  加速（减速）转动，则其新的“临界角速度”  $\omega_{c_d}$  可按如下近似公式<sup>[3]</sup>求出：

$$\omega_{c_d} = \omega_c \left[ 1 \pm \frac{1}{(1 + 0.4\xi\sqrt{2\pi\xi})^2} \sqrt{\frac{3}{4q}} \right], \quad (1-10)$$

式中： $\xi = \frac{b}{\sqrt{mK}}$ ;

$$q = \frac{\omega_c^2}{4\pi\alpha};$$

加速时，取“+”号；减速时，取“-”号。

#### 5. 其他影响因素

实际上影响临界转速的因素还很多，例如轴向力、扭矩、横向剪力、盘及叶片的柔性和转子各部分的联结构造等等，应针对具体发动机的实际情况，分清主次加以考虑。

### 三、处理临界转速问题的方法

为确保发动机安全可靠地工作，转子的的工作转速  $n$  必须在其各阶临界转速一定的范围之外。一般要求：对于工作转速低于其一阶临界转速的转子， $n < 0.75n_{c_1}$ ；对于工作转速高于其一阶临界转速的转子， $1.4n_{c_k} < n < 0.7n_{c_{k+1}}$ 。

如采用弹性支承，则工作转速应在低阶临界转速与高阶临界转速之间，且距临界转速有约（15~25）%以上的距离（见第三节）。

当转子的的工作转速和其临界转速比较接近而工作转速又不能变动时，应采取措施调整临界转速。一般可采取如下措施：改变转子的刚度和质量分布；合理地选取支承方案和轴承类型；采用弹性支承等。若采取上述措施后仍不能将临界转速调整到所要求的范围，则可采用挤压油膜阻尼器，它可以减小转子的振动。

\* 此数据取自资料<sup>[4]</sup>，是就地面涡轮机规定的范围，可供设计航空发动机时参考。

## 第二节 计算方法

### 一、计算模型的建立

航空燃气涡轮发动机转子的结构和工作环境极为复杂，要想按照实际转子结构，并考虑全部影响因素计算其临界转速的精确值，几乎是不可能的。实际上，经常是按照不同的设计要求，抓住主要影响因素，建立相应的计算模型，求得临界转速的近似值。下面简要地介绍几点建立计算模型的简化原则。

#### 1. 轴的处理

按轴径和安装在轴上的零件的不同，将轴分成若干等截面轴段。段数分得越多，计算结果的准确性越高，但相应的计算工作量也就越大。凡是轮盘、轴承所在位置，以及轴径（外径或内径）和材料有变化的地方，都应取为分段截面。若等截面轴段过长，则须再将其分成若干段。

轴的质量可以按分布质量处理，也可以简化成有限个集中质量（据具体计算方法而定）。当把轴质量简化成有限个集中质量时，各轴段的质量可按不改变质量中心位置的原则分配在各轴段的两端面上。如图 2-1 所示的三段轴，各轴段的质量为  $m_1$ 、 $m_2$  和  $m_3$ ，其质量中心位置相应为  $\bar{x}_1$ 、 $\bar{x}_2$  和  $\bar{x}_3$ ，各轴段分在两端面的质量按下式计算：

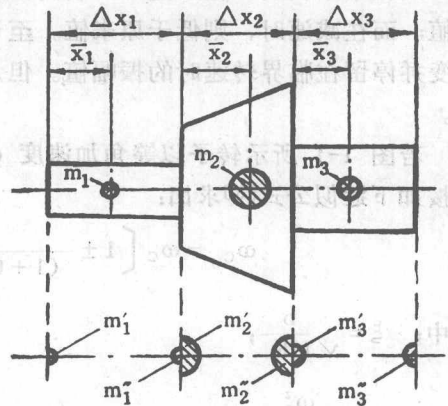


图 2-1 轴段质量分配图

$$m'_i = \left(1 - \frac{\bar{x}_i}{\Delta x_i}\right) m_i, \quad (2-1)$$

$$m''_i = \frac{\bar{x}_i}{\Delta x_i} m_i, \quad (2-2)$$

式中  $i$ ——轴段号 ( $i = 1, 2, 3$ )。

$i$  轴段左端的总质量为

$$m_{i左} = m'_i + m''_{i-1} \quad (2-3)$$

$i$  轴段右端的总质量为

$$m_{i右} = m''_i + m'_{i+1} \quad (2-4)$$

#### 2. 轮盘的处理

通常将盘简化为集中质量（位于轮盘重心位置截面的轴线上），并计及其直径转动惯量和极转动惯量。在轮盘较厚甚至接近细长圆柱体的情况下，还要考虑盘轴之间的联接刚度。

#### 3. 支承条件的简化

当轴承宽度较小时，如单排滚珠、滚棒轴承和短滑动轴承，一般可简化为铰支支座（图

2-2(a))。而对于较宽的轴承，如多排滚珠、滚棒轴承和长滑动轴承，应简化为固定夹紧支座(图 2-2(b))。

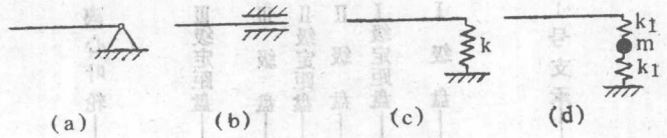


图 2-2 几种支座类型

在临界转速的粗略计算中，一般可假定支座是绝对刚性的。

实际上，轴承本身、轴承座和机匣等均为弹性体（尤其是在采用弹性支承或阻尼器的情况下），为了较精确地计算临界转速，应考虑支承系统柔性的影响，而简化为弹性支座(图 2-2(c)或(d))。支承系统的柔(刚)性系数，根据实验或计算确定，也可参考同类支承结构的数据。

下面介绍几个计算轴承柔性系数的经验公式<sup>[5]</sup>：

1) 同时承受径向和轴向载荷的滚珠轴承的柔性系数

$$\delta_{ka} = \frac{0.006667}{\cos^2 \gamma} \left[ D_w Z^2 \left( \frac{5}{\cos \gamma} F_r + \frac{1}{\sin \gamma} F_a \right) \right]^{-\frac{1}{3}} \quad (\text{毫米/公斤}), \quad (2-5)$$

2) 只承受径向载荷的滚珠轴承的柔性系数

$$\delta_k = 0.003899 (D_w Z^2 F_r)^{-\frac{1}{3}} \quad (\text{毫米/公斤}), \quad (2-6)$$

3) 滚棒轴承的柔性系数

$$\delta_R = 0.002299 L_w^{-0.8} Z^{-0.9} F_r^{0.1} \quad (\text{毫米/公斤}), \quad (2-7)$$

式中  $\gamma$ ——滚珠与轴承外环的接触角(度)；

$D_w$ ——滚珠直径(毫米)；

$Z$ ——滚珠或滚棒个数；

$F_r$ ——径向载荷(公斤)；

$F_a$ ——轴向载荷(公斤)；

$L_w$ ——滚棒长度(毫米)。

#### 4. 套齿和弹簧片的简化

对于短套齿，基本上不传递弯矩，一般可简化为球铰联接。对于长套齿，则将被联接的两段轴视为一个整体。

两轴之间用弹簧片联接时，可将弹簧片简化成球铰。

例 PT6T-6 发动机转子计算模型的建立

该发动机转子的结构示意图如图 2-3 所示。

简化说明：

将整个转子分为 12 段。其中 1~2 和 9~5 段之间有轴径的变化；2~9 段各段之间均有盘；11~12 段之间有轴承；8~9 段之间有轴材料的变化。

轴质量按均布质量处理。

I、II、III 级压气机盘和涡轮盘基本上属于对称薄盘，分段截面取在这些盘的中心线上。8~9 段的分段截面，则取在离心叶轮的重心位置。

I、II、III 级定距盘也看成是三个小盘，以集中质量作用于定距盘的重心位置。轴段的内、外径根据定距盘的  $D_1$  和  $D_2$  确定(图 2-4)， $D_1$  视为轴段内径， $D_2$  视为轴段外径。

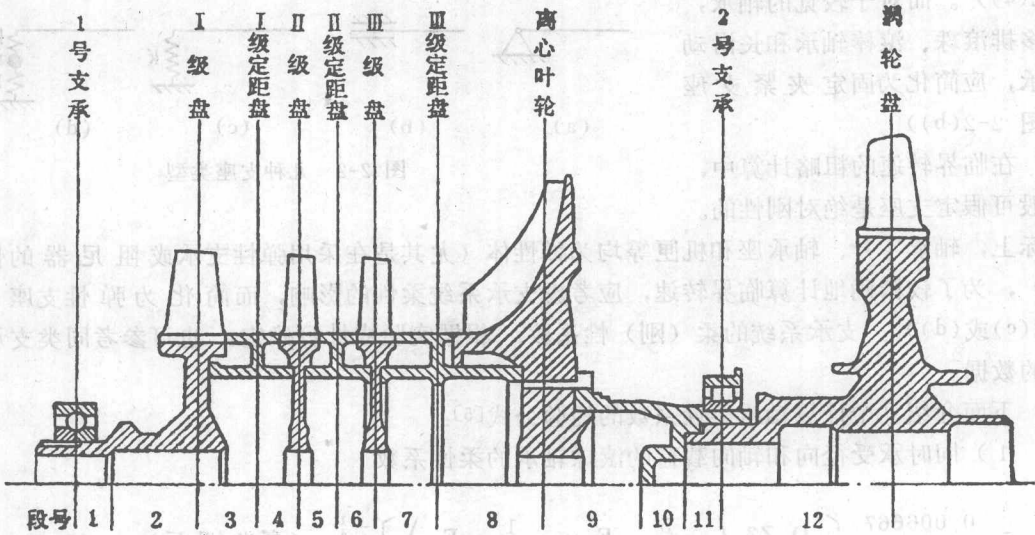


图 2-3 PT6T-6 发动机转子结构示意图

1号支承采用了鼠笼式弹性支承。因此，简化为弹性支座，根据实验测定其柔性系数  $\delta = 3.388 \times 10^{-4}$  (毫米/公斤)。

2号支承为单排滚棒轴承，简化为刚性铰支座。

压气机轴与涡轮轴用套齿相连接，由于套齿正好在2号支承处，因此压气机轴与涡轮轴的分界面选定在轴承中心线处。

根据以上说明，得到图 2-5 所示的计算模型，有关参数列于表 2-1。

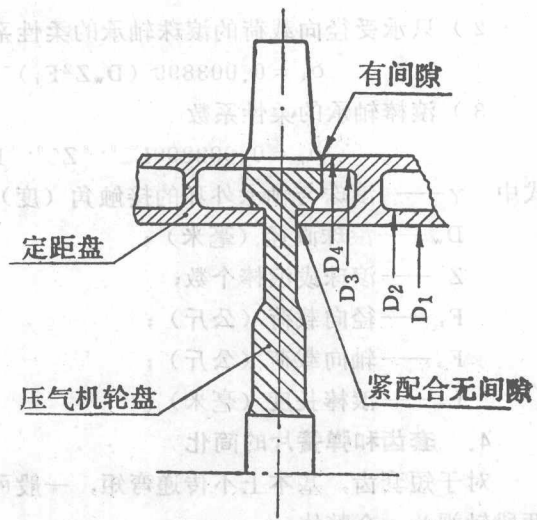


图 2-4 定距盘与压气机盘配合示意图

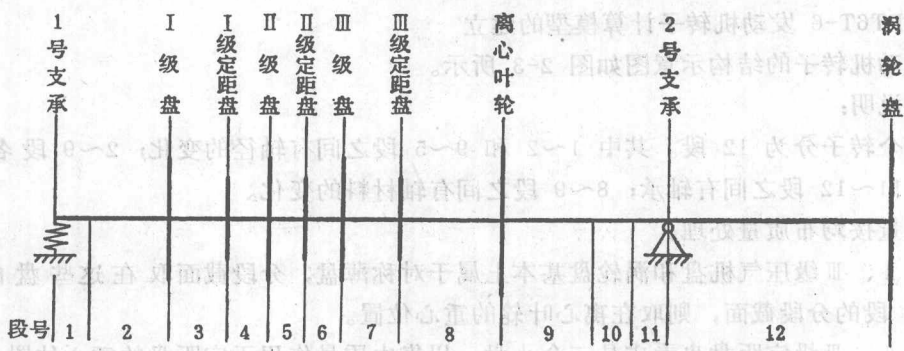


图 2-5 PT6T-6 发动机转子计算模型



表 2-1 计算模型的有关参数

| 段号 | 轴外径<br>(厘米) | 轴内径<br>(厘米) | 轴段长度<br>(厘米) | 盘重量①<br>(公斤) | 盘转动惯量②<br>(公斤·厘米·秒 <sup>2</sup> ) | 轴材料       |
|----|-------------|-------------|--------------|--------------|-----------------------------------|-----------|
| 1  | 3.00        | 2.17        | 1.50         |              |                                   | TC4       |
| 2  | 3.15        | 2.49        | 4.03         |              |                                   |           |
| 3  | 9.13        | 8.55        | 2.60         | 0.8219       | 0.0129                            |           |
| 4  | 9.13        | 8.75        | 1.65         | 0.0767       | 0.0022                            |           |
| 5  | 9.25        | 8.77        | 1.64         | 0.3792       | 0.0070                            |           |
| 6  | 9.25        | 8.77        | 1.67         | 0.0676       | 0.0018                            |           |
| 7  | 9.26        | 8.83        | 2.46         | 0.3623       | 0.0066                            |           |
| 8  | 9.26        | 8.33        | 4.77         | 0.076        | 0.0023                            |           |
| 9  | 5.78        | 4.95        | 4.80         | 4.2372       | 0.1186                            | 40CrNiMoA |
| 10 | 4.66        | 1.60        | 1.88         |              |                                   |           |
| 11 | 4.00        | 3.04        | 1.60         |              |                                   |           |
| 12 | 4.00        | 3.04        | 5.05         | 4.070        | 0.068                             |           |

① 其中包括叶片重量。

② 此转动惯量是盘的极转动惯量和直径转动惯量之差，即  $J_p - J_d$ 。

## 二、积分法

### 1. 基本原理

发动机中的转子在作自由振动，并不计轴向力、切向力及回转惯性时，振动平衡方程式为

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \frac{F\gamma}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (2-8)$$

式中  $F$ ——转子的横截面积。

对于简谐振动，知

$$y = y_0 \cos \omega t,$$

将其代入上式，则有

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} \right) = \frac{F\gamma}{g} \omega^2 y_0. \quad (2-9)$$

通常由于转子本身的结构比较复杂，截面惯性矩  $J$  与面积  $F$  等都是沿轴向变化的，除在个别情况下，我们都不直接对 (2-9) 式进行求解。而是将其转化成以挠度函数  $y_0$  表示的形式，如

$$y_0 = \frac{\gamma \omega^2}{g} \iiint \frac{1}{EJ} \iiint F y_0 dx^2 dx^2, \quad (2-10)$$