1979 -1981 全国招考研究生

高等数学试题选解集

邹节铣 陈强

湖南科学技术出版社

1979—1981全国招考研究生

高等数学试题选解集

邹节铣　陈　强

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1982年6月第1版第1次印刷
开本：787×1092毫米 1/32　印张：18.125　字数：418,000
印数：1——38,200
统一书号：13204·55　　定价：1.85元

目 录

第一章　函数　极限　连续性

§1　函　　数

1.1　设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，试验证　$f\{f(f[f(x)])\}=x$，并求　$f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$，$(x\neq 0,\ x\neq 1)$。

（华中工学院1981年度）

证　设　$f_1(x)=f(x)=\dfrac{x}{x-1}$；

$$f_2(x)=f[f_1(x)];\quad \cdots;\quad f_n(x)=f[f_{n-1}(x)].$$

现只须证明　$f_4(x)=x$即可

$$\because\quad f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{x}};\qquad \frac{1}{f(x)}=1-\frac{1}{x},$$

$$\therefore\quad f_2(x)=f[f_1(x)]=f[f(x)]=\frac{1}{1-\dfrac{1}{f(x)}}$$

$$=\frac{1}{1-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=x,$$

$$f_3(x)=f[f_2(x)]=f(x)=\frac{1}{x-1}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{x}},$$

$$f_4(x)=f[f_3(x)]=f[f(x)]=f_2(x)=x.$$

这个问题还可进一步推至

$$f_{2n}(x)=x,\qquad f_{2n+1}(x)=\frac{x}{x-1},\ (n\geqslant 1).$$

下面再求 $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$；

$\because\quad \frac{1}{f(x)}=1-\frac{1}{x},$

$\therefore\quad f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=f\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}-1}=1-x,(x\neq 0,x\neq 1)$

1.2 设 $z=x+y+f(x-y)$，若当$y=0$时，$Z=x^2$，求函数f及Z。

（北京航空学院1979年度）

解 由$y=0$时 $Z=x^2$ 得

$f(x)=x^2-x.$

因此 $f(x-y)=(x-y)^2-(x-y),$

$\therefore\quad Z=x+y+(x-y)^2-(x-y)=2y+(x-y)^2.$

1.3 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，求$f(x)=?$

（合肥工业大学1981年度）

解 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2,$

$\therefore\quad f(x)=x^2-2.$

1.4 证明：定义在对称区间$(-l,\ l)$内的任何函数$f(x)$必可以表示成偶函数$H(x)$与奇函数$G(x)$之和的形式，且这种表示法是唯一的。

（合肥工业大学1979年度）

证 设 $H(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$,

$$G(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

则$H(x)$与$G(x)$依次为定义在 $(-l, l)$内的偶函数与奇函数，并有：$f(x)=H(x)+G(x)$。

若还有偶函数$H_1(x)$，奇函数$G_1(x)$使

$$f(x)=H_1(x)+G_1(x)。$$

因而有 $H(x)+G(x)=H_1(x)+G_1(x)$,

即 $H(x)-H_1(x)=G_1(x)-G(x)$。 (1)

以$-x$代入(1) 式，得

$$H(-x)-H_1(-x)=G_1(-x)-G(-x),$$

即 $H(x)-H_1(x)=G(x)-G_1(x)$。 (2)

(1)+(2) 得$2H(x)-2H_1(x)=0$,

即 $H(x)=H_1(x)$。

再由(1)式即得 $G(x)=G_1(x)$，从而证明了这种表示法是唯一的。

1.5 设$f(0)=15$，$f(2)=30$，$f(4)=90$，求形状为$f(x)=a+bc^x$的函数。

（大连铁道学院1979年度）

解：将$f(0)=15, f(2)=30, f(4)=90$ 代入$f(x)=a+bc^x$中，得

$$\begin{cases}a+bc^0=15,\\ a+bc^2=30,\\ a+bc^4=90.\end{cases}\quad \text{解之，得}\quad \begin{cases}a=10,\\ b=5,\\ c=\pm 2\text{（舍去负根）}.\end{cases}$$

故所求函数为

$f(x)=10+5\cdot 2^x$。

1.6 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-1}$；

(2) $Z=\arcsin(x-y^2)+\ln[\ln(10-x^2-4y^2)]$。

（西安交通大学1979年度）

解：(1) $x^2-1\neq 0$，即$x\neq\pm 1$，$4-x^2\geqslant 0$，即$|x|\leqslant 2$。故定义域为：$[-2,\ -1)$，$(-1,\ 1)$，$(1,\ 2]$

(2) $\arcsin(x-y^2)$的定义域为：

$$|x-y^2|\leqslant 1,$$

即
$$y^2-1\leqslant x\leqslant y^2+1. \qquad (1)$$

$\ln[\ln(10-x^2-y^2)]$的定义域为：

$$10-x^2-y^2>1,$$

即
$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}<1. \qquad (2)$$

由(1)、(2)两式知，所给函数的定义域是椭圆$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$与抛物线$x=y^2+1$及$x=y^2-1$所围成的区域，即：

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}<1,\\[2ex] y^2-1\leqslant x\leqslant y^2+1.\end{cases}$$

1.7 当$0<u<1$时，函数$f(u)$有定义，求函数$f(\sin 2x)$的定义域。

（太原工学院1979年度）

解：由题设知：

$$0<\sin 2x<1,$$

得 $$2n\pi<2x<(2n+1)\pi,\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

故所求定义域为：

$$\left(n\pi,\ \frac{2n+1}{2}\pi\right),\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

1.8 若$Z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$，并且已知当$y=1$时有$Z=x$，试求函数$f(x)$的分析表达式以及$Z$的分析表达式。

（北京工业大学1979年度）

解：以$y=1$时$Z=x$代入$Z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$中，得

$$x-1=f(\sqrt[3]{x}-1), \tag{1}$$

设$\sqrt[3]{x}-1=t$　则$x=(1+t)^3$代入(1) 式，得

$$f(t)=(1+t)^3-1=t^3+3t^2+3t.$$

得$f(x)$的分析表达式为

$$f(x)=x^3+3x^2+3x.$$

由(1) 式得Z的分析表达式：

$$Z=\sqrt{y}+x-1.$$

1.9 设$F(x)=\int_0^a f(x+y)dy$，其中$a>0$，$f(u)$为处处有定义且单调增加的连续函数，试讨论$F(x)$的增减性。

（天津大学1980年度）

解：任取$x_2>x_1$，由所设，有

$$f(x_2+y)>f(x_1+y),$$

又 $a>0$，故有

$$F(x_2)-F(x_1)=\int_0^a f(x_2+y)dy-\int_0^a f(x_1+y)dy$$

$$=\int_0^a[f(x_2+y)-f(x_1+y)]dy>0.$$

亦即 $$F(x_2)>F(x_1).$$

所以$F(x)$为单调增加的函数。

§2 数列与函数的极限

1.10 设对于$n=0$，1，2，…都有$0<x_n<1$且

$x_{n+1}=-x_n^2+2x_n$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

（湘潭大学1981年度）

解 由$x_{n+1}=-x_n^2+2x_n=x_n(2-x_n)$，

因 $2-x_n>1$所以$x_{n+1}>x_n$，即$\{x_n\}$递增。

又由 $x_{n+1}=x_n(2-x_n)=1-(x_n-1)^2<1$，故$\{x_n\}$有界，因此知$\{x_n\}$必有极限存在，设为$a$。

对 $x_{n+1}=-x_n^2+2x_n$两边取极限，有

$a^2=-a^2+2a$ 即 $a(a-1)=0$。

因 $0<x_n<1$及$\{x_n\}$递增，$\therefore a\neq0$，得$a=1$，

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$。

1.11 已知数列$\{x_n\}$满足条件

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0,$$

证明 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0。$$

（国防科学技术大学1981年度）

证 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，对任意给定的$\frac{\varepsilon}{2}>0$存在$N>2$，使当$n\geqslant N$时有

$$|x_n-x_{n-2}|<\frac{\varepsilon}{2}。$$

于是对充分大的p，有

$$
\begin{aligned}
|x_{N+p}-x_{N+(p-1)}| &= |x_{N+p}-x_{N+p-2}+x_{N+p-2} \\
&\quad -x_{N+p-1}| \leqslant |x_{N+p}-x_{N+p-2}| \\
&\quad +|x_{N+p-2}-x_{N+p-1}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \\
&\quad +|x_{N+p-1}-x_{N+p-2}| \\
&= \frac{\varepsilon}{2}+|x_{N+p-1}-x_{N+p-3}+x_{N+p-3} \\
&\quad -x_{N+p-2}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+|x_{N+p-1} \\
&\quad -x_{N+p-3}|+|x_{N+p-3}-x_{N+p-2}| \\
&\leqslant 2\cdot\frac{\varepsilon}{2}+|x_{N+p-2}-x_{N+p-3}| \\
&\leqslant \cdots \leqslant p\cdot\frac{\varepsilon}{2}+|x_{N+p-p}+x_{N+p-p-1}| \\
&= p\cdot\frac{\varepsilon}{2}+|x_N-x_{N-1}|.
\end{aligned}
$$

选取p，使 $N+p>\dfrac{2|x_N-x_{N-1}|}{\varepsilon}$，

则 $\left|\dfrac{x_{N+p}-x_{N+p-1}}{N+p}\right| \leqslant \dfrac{p}{N+p}\cdot\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{|x_N-x_{N-1}|}{N+p}$

$<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$。

$\therefore \qquad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$。

1.12 设函数$f(x)$在区间$(-\infty, 0)$内可微，且

$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=0$ 则$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$。

（西北电讯工程学院1979年度）

证：因 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=0$，故任给$\varepsilon>0$，存在$N>0$，使当$x<M=-N$时恒有

$$|f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由中值定理

$$\frac{f(M)-f(x)}{M-x}=f'(\xi),\quad (x<\xi<M)$$

故当$x<M$时有

$$\frac{|f(M)-f(x)|}{M-x}=|f'(\xi)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

由此知 $|f(x)-f(M)|=|f(M)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}(M-x)$，

从而 $|f(x)|<|f(M)|+\frac{\varepsilon}{2}(M-x)$，

$$\frac{|f(x)|}{|x|}<\frac{|f(M)|}{|x|}+\frac{\varepsilon}{2}\ \frac{M-x}{|x|}.$$

又，固定M，存在$X<M$，当$x<X<M$时可使$\frac{|f(M)|}{|x|}<\frac{\varepsilon}{2}$，

故当$x<X$时

$$\frac{|f(x)|}{|x|}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

1.13 用“ε—N”方法证明：设$\{x_n\}$，$(n=1, 2, \cdots)$为数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，

则 $$\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|.$$

（湖南大学1980年度）

证 由假设知，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，成立

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

因为 $$||x_n|-|a||\leqslant|x_n-a|,$$

所以当$n>N$时成立

$$||x_n|-|a||<\varepsilon,$$

即 $$\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|.$$

1.14 a_n、b_n为两递增正数序列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$与$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$存在，对$a_n$每一固定项总有$b_n$的项大于它，同样对于$b_n$的每一固定项总有$a_n$的项大于它。试用极限定义证明：

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

（华东石油学院1979年度）

证 用反证法。

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ 且$a<b$。

取 $\varepsilon=b-a>0$，则由极限定义，存在$N>0$，使当$n\geqslant N$时，有

$$|b_n-b|<b-a.$$

因b_n为递增序列，故上式可写为

$$b-b_n<b-a,$$

即当$n\geqslant N$时，有 $b_n>a$。 (1)

由题设a_n为递增正数序列，对任何n_1有$a_{n_1}<a$，又由(1)式得

$$a_{n_1}<a<b_n. \tag{2}$$

(2) 式说明，当$n\geqslant N$时，不会有n'使$a_{n'}>b_{n'}$，这与假设矛盾。同理，若设$a>b$亦可得出类似的矛盾，因此有$a=b$，即

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

1.15 证明：数列$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots$（根号取算术根）的极限存在并求出这个极限

（北京师范大学1980年度）

证 数列$x_1=\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots, x_n=\sqrt{2+x_n}, \cdots$。

先证$\{x_n\}$单调增。因$x_2=\sqrt{2+x_1}>\sqrt{2}=x_1$。今设$x_n>x_{n-1}$，则

$$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}>\sqrt{2+x_{n-1}}=x_n.$$

由数学归纳法知$\{x_n\}$单调增。

次证$x_n<2$。由于$x_1<2$，设$x_n<2$，从而有$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<\sqrt{2+2}=2$，即$\{x_n\}$以2为其上界。因而证得$\{x_n\}$是单调有界数列，故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

存在。由等式 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ 取极限得

$$a=\sqrt{2+a}\text{即}\quad a^2-a-2=0.$$

解得$a=2$或$a=-1$（舍去），因而

$$\lim_{n\to\infty}x_n=2.$$

1.16 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{a+1}}{n\sum\limits_{k=1}^{n}k^{a}}$，$a$为任意实数。

（华中工学院1981年度）

解 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^{a+1}}{n\sum_{k=1}^{n}k^{a}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{a+1}+2^{a+1}+\cdots+n^{a+1}}{n(1^{a}+2^{a}+\cdots+n^{a})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1^{a+1}+2^{a+1}+\cdots+n^{a+1}}{n^{a+2}}}{\dfrac{1^{a}+2^{a}+\cdots+n^{a}}{n^{a+1}}}.$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^{a+1}+2^{a+1}+\cdots+n^{a+1}}{n^{a+2}}$可用stolz定理*⁾来计算。

设 $$x_n=1^{a+1}+2^{a+1}+\cdots+n^{a+1},\quad y_n=n^{a+2},$$

则 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{a+1}}{n^{a+2}-(n-1)^{a+2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{a+1}}{n^{a+2}-\left[n^{a+2}-(a+2)n^{a+1}+\dfrac{(a+2)(a+1)}{2!}n^{a}+\cdots\right]}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{a+1}}{(a+2)n^{a+1}+\dfrac{(a+2)(a+1)}{2!}n^{a}+\cdots}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(a+2)+\dfrac{(a+2)(a+1)}{2!}n^{-1}+\cdots}=\frac{1}{a+2}.$$

同理 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1^{a}+2^{a}+\cdots+n^{a}}{n^{a+1}}=\frac{1}{a+1}.$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^{a+1}}{n\sum_{k=1}^{n}k^{a}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{a+1}+2^{a+1}+\cdots+n^{a+1}}{n(1^{a}+2^{a}+\cdots+n^{a})}$$

$$=\frac{\frac{1}{a+2}}{\frac{1}{a+1}}=\frac{a+1}{a+2}.$$

*) **施笃兹(O. stolz)定理：**

设整序变量$y_n \to +\infty$，并且——至少是从某一项开始——在n增大时y_n亦增大：$y_{n+1}>y_n$，则

$$\lim \frac{x_n}{y_n}=\lim \frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$$

只须等式右边的极限存在(或为$\pm\infty$)。

参阅菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第一卷第一分册，P. 59～P. 60。

1.17 设$F(x,y)=\frac{1}{2x}f(y-x)$及$F(1,\ y)=\frac{y^2}{2}-y+5$。任选$x_0>0$，作$x_1=F(x_0,\ 2x_0)$，$x_2=F(x_1,\ 2x_1)$，…，$x_{n+1}=F(x_n,\ 2x_n)$，…。证明

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

存在并求它的值。

（西安交通大学1980年度）

证 因 $F(x,\ y)=\frac{1}{2x}f(y-x)$，

则 $F(1,\ y)=\frac{1}{2}f(y-1)$。

又已知 $F(1,\ y)=\frac{y^2}{2}-y+5=\frac{1}{2}[(y-1)^2+9]$，

故 $f(y-1)=(y-1)^2+9$。

因而 $f(y-x)=(y-x)^2+9$，