

数学物理方程

(第2版)

EQUATION OF MATHEMATICAL PHYSICS

李莉 王峰 编著



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高 等 学 校 教 材

07

数学物理方程

(第2版)

EQUATION OF MATHEMATICAL PHYSICS

李莉 王峰 编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书是根据理工科数学物理方程教学大纲的要求及学科发展需求编写的,全书共分 11 章,内容包括数学模型的建立及定解问题,方程的分类和化简,特征线积分法,分离变量法,积分变换法和格林函数法等.为了内容的完备性,作者特意补充了傅里叶级数的内容.

本书可作为理工科各专业本科生和研究生的教材,也可作为科研及工程技术人员的参考书或自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程/李莉,王峰编著.—2 版.—哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社,2016.9
ISBN 978-7-5603-6192-5

I. ①数… II. ①李…②王… III. ①数学物理方程—高等学校—教材 IV. ①O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 212686 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 马静怡 聂兆慈
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 黑龙江艺德印刷有限责任公司
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 12.25 字数 248 千字
版 次 2015 年 8 月第 1 版 2016 年 9 月第 2 版
2016 年 9 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-6192-5
定 价 28.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

前 言

数学物理方程主要是指在实际工程技术中抽象出的一类偏微分方程,不仅具有很强的理论基础,而且在各领域都有很高的应用价值,在物理学、化学、医学、生物学、材料、工业技术、社会学等各个领域都有它的身影,例如试井分析、石油勘探、医学成像、大型建筑、金融、人口普查等方面都为数学物理方程提出了崭新的研究课题.它与现代科学工程技术联系十分紧密,是应用及其广泛的应用数学基础之一.

数学物理方程使学生在理解、掌握与本课程相关的重要理论的同时,还有利于数学思维的养成及分析、解决实际问题能力的提高,已然成为高等理工科院校必备的数学工具.教学内容中除了包含必要的数学物理方程的基本知识、基本概念和理论外,还重点讨论了具有重要应用意义的经典数学物理方程定解问题的几种基本解法.

目前理工科高校均开设数学物理方程或偏微分方程课程,但数学物理方程侧重于模型的建立和方程的求解方法,而偏微分方程侧重于数学理论基础的 analysis,由于两者侧重点不同,通常为工科院系开设数学物理方程课程.而且,这门课程的设置使得其与先修课和后续课能够有机衔接,同时也为理工科专业学生后继的科研工作奠定了坚实的基础.

本书共分 11 个章节,内容包括:数理方程相关的背景、研究对象、特点;三类典型线性偏微分方程的数学模型的建立过程;二阶线性偏微分方程的分类和化简;特征线积分法;有界区域上的分离变量法;积分变换法和格林函数法,等.为全书内容的完整性,补充了傅里叶级数部分.但由于授课时数所限,本书没有涉及广义函数等内容.因此可适当删减某些章节,灵活掌握.

本书每节课后都留有习题,并备有部分习题的参考答案,以利于学生或是自学人员检查学习成果.此外,由于某些题目计算得到的方程的解析解,很难从直观上理解解的分布及其物理意义,因此本书的某些章节最后附有 MATLAB 源程序,把微分方程抽象的理论结果可视化,使读者能更直观地了解数学物理方程所具有的性态.而且部分内容参考了国内外出版的一些教材和专著,见本书所附参考文献.

本书附录列出了一阶偏微分方程求解、幂级数解法和积分变换表.

由于作者水平所限,疏漏和不足之处在所难免,敬请读者予以批评指正.

作 者
2015 年 5 月
于哈尔滨工业大学

目 录

第 1 章 概 论 //1	
1.1 数学物理方程 //1	
1.1.1 方程的分类 //2	
1.2 偏微分方程的基本概念 //3	
1.2.1 基本概念 //3	
1.2.2 算子与线性算子 //5	
习 题 1 //6	
第 2 章 数学模型的建立及定解问题 //7	
2.1 马尔萨斯人口模型 //7	
2.2 单摆问题 //8	
2.3 CT 成像的重建算法——Lambert-Beer 定律 //9	
2.4 弦振动问题 //10	
2.5 膜振动问题 //12	
2.6 热传导问题 //14	
2.7 电磁场问题 //16	
2.8 定解问题及问题的适定性 //17	
2.8.1 定解条件和定解问题 //17	
2.8.2 定解问题的适定性概念 //22	
第 3 章 两个自变量的二阶线性偏微分方程的分类和化简 //23	
3.1 两个自变量的二阶线性偏微分方程的分类 //23	
3.2 两个自变量的二阶线性偏微分方程的化简 //24	
3.3 化二阶线性偏微分方程为标准型 //26	
习 题 3 //29	
第 4 章 特征线积分法 //30	
4.1 达朗贝尔(D'Alembert)公式 //30	
4.2 半无界弦及有界弦的振动问题 //36	

4.3 杜阿梅尔原理及非齐次问题的求解 //39

4.4 三维波动方程 //43

4.5 降维法 //45

4.6 MATLAB 求解 //46

习 题 4 //50

第 5 章 斯图姆—刘维尔(Sturm-Liouville)问题 //53

5.1 斯图姆—刘维尔本征值问题 //53

5.2 斯图姆—刘维尔问题的性质 //58

习 题 5 //60

第 6 章 特殊函数 //61

6.1 贝塞尔函数 //61

6.1.1 Γ (Gamma)函数 //61

6.1.2 贝塞尔函数 //61

6.1.3 第一类贝塞尔函数的性质 //64

6.2 勒让德函数 //65

6.2.1 勒让德方程的求解 //65

6.2.2 勒让德多项式 //66

6.2.3 勒让德多项式的性质 //68

习 题 6 //69

第 7 章 傅里叶级数 //70

7.1 傅里叶级数 //70

7.2 正弦级数和余弦级数 //72

7.3 以 $2l$ 为周期的级数 //73

7.4 有限区间上的傅里叶级数 //74

习 题 7 //76

第 8 章 分离变量法 //78

8.1 有界弦的自由振动 //78

8.1.1 用分离变量法求解齐次弦振动方程的混合问题 //78

8.1.2 解的物理意义 //83

8.2 有界杆的热传导问题 //84

8.3 拉普拉斯方程和梁振动方程 //89

8.3.1 矩形区域的拉普拉斯方程 //89

8.3.2 梁的横振动	//91
8.4 MATLAB求解	//93
习题 8	//98
第9章 本征函数法	//101
9.1 本征函数法的引入	//101
9.2 非齐次问题	//103
9.3 非齐次边界条件的处理	//106
9.4 MATLAB求解	//108
习题 9	//110
第10章 积分变换法	//112
10.1 傅里叶积分和傅里叶变换	//112
10.2 傅里叶变换的性质	//116
10.3 傅里叶变换的应用	//119
10.4 MATLAB求解	//127
10.5 拉普拉斯变换	//127
10.6 拉普拉斯变换的性质	//129
10.7 拉普拉斯变换的应用	//133
10.8 MATLAB求解	//138
习题 10	//138
第11章 格林函数法	//142
11.1 δ 函数的概念及性质	//142
11.1.1 δ 函数的定义	//142
11.1.2 δ 函数的性质	//144
11.2 格林函数法解偏微分方程初值问题	//146
11.2.1 一维热传导方程的柯西问题	//146
11.2.2 一维波动方程的初值问题	//149
11.3 格林函数法解偏微分方程边值问题	//152
11.3.1 一维热传导方程的混合问题	//152
11.3.2 一维波动方程的混合问题	//154
11.4 拉普拉斯方程的格林函数	//156
11.5 MATLAB求解	//158
习题 11	//159

参考答案 //162

附录一 一阶偏微分方程求解 //171

1 一阶常微分方程组的首次积分 //171

2 一阶线性齐次偏微分方程 //173

附录二 幂级数解法 //176

附录三 积分变换表 //179

参考文献 //184

第 1 章 概 论

1.1 数学物理方程

数学物理方程是指物理学、力学等自然学科和工程技术中提出的偏微分方程,在理论物理、应用物理、力学、地质等各个领域中均有广泛的应用.数学物理方程是将物理和数学相互交融的学科.一方面,若已知假设的定解条件,如何求出方程的解;另一方面关心的是,如何提定解条件,可以在最低的限度下保证解的存在性和唯一性.从字面来理解,用以研究数理方程的数学物理方法是以研究物理问题为目标的数学理论和数学方法.首先用数学语言描述物理现象(即建模),然后寻找恰当的数学方法求解模型,最后根据解答来诠释和预见物理现象,或根据物理事实来修正原有的模型.通过对一些典型问题的研究,从而揭示偏微分方程的一些带有普遍性的思想方法和结论.

数学物理方程,顾名思义,物理问题的研究一直和数学密切相关.

作为近代物理学的起点,牛顿提出了万有引力定律.他用常微分方程描述了质点和刚体的运动规律,然后由引力定律推导出了描述引力势的拉普拉斯(Laplace)方程和泊松(Poisson)方程.在连续介质力学中,从质量、动量、能量守恒原理出发,推导出了流体力学中一系列方程组.在物理学中,我们可以用波动方程描述波的传播,用热传导方程表现传热和扩散现象.波动方程和热传导方程是古典的数学物理方程,特别值得注意的是,同一个偏微分方程可以用来描述许多种性质上很不相同的物理现象,这一点可以作为近似解问题的求解方法.18世纪中期,牛顿力学的基础开始由变分原理所刻画,并且许多的物理理论都是以变分原理作为自己的理论基础.自18世纪以来,在连续介质力学、传热学和电磁场理论中,归结出了许多偏微分方程,通常称为数学物理方程.直到20世纪初期,数学物理方程的研究才成为数学物理的主要研究内容.随着科学技术的进步,研究领域越来越广泛,数学物理方程并不仅仅局限于字面上的“数学”和“物理”,而是涉及方方面面.例如在生物学中,描述动植物的种群模型、传染病模型;社会学中的人口普查、经济类数学,例如



股票市场中的达芬(Duffing)方程;工程技术中油田开发、天气预报、空间探索、电力传输等.几乎所有领域都与数理方程密不可分.

1.1.1 方程的分类

由方程的形式可将其分为常微分方程、偏微分方程、积分方程和微积分方程.如果按照事物的发展过程将数理方程分类,可将其分为三类:

1. 稳态过程,即系统与时间无关;
2. 耗散的、依赖于时间的发展过程;
3. 保守的发展过程.

虽然研究的实际问题不同,但是只要它属于同一类过程,其所满足的基本法则是相类似的.下面举例说明.

例 1.1.1 1. 傅里叶(Fourier)定律:傅里叶定律是热传导的基本定律,表示在均匀的各项同性的导热体内,沿着法向方向 \mathbf{n} ,通过表面的热流量与温度梯度成正比,与垂直于热流的横截面积成正比,即

$$dq = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} dS dt \quad (1.1)$$

这里 T 代表温度,负号表示热量传递的方向与温度升高的方向相反, λ 是热传导系数.

2. 菲克(Fick)定律:是描述气体扩散现象的宏观规律,是生理学家菲克于1855年发现的.单位时间内通过垂直于扩散方向的单位截面积的扩散物质流量与该截面处的浓度梯度成正比,即

$$dq = -D \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} dS dt \quad (1.2)$$

这里 C 代表扩散物质的体积浓度, D 为扩散系数(m^2/s).

3. 达西(H. P. G. Darcy)定律:反映水在岩土孔隙中渗流规律的实验定律.由法国水利学家达西在1852年~1855年通过大量实验得出,表示水通过多孔介质的速度与水力大小的梯度成正比,即

$$dq = -K \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} dS dt \quad (1.3)$$

其中 p 表示孔隙压力, K 表示渗流系数.

由此可见,虽然三个定律描述了三个不同的物理过程,但是如果把表示不同意义的符号统一,式(1.1),(1.2)和(1.3)属于同一类微分方程.偏微分方程的各种特性和其自然原型之间的紧密联系非常有助于我们的研究.比如说,可以通过分析



一类数学模型,推断其中一个未知的自然现象的发展趋势;反过来,也可以通过研究一个自然现象的特性,判断某一类数学模型的性质.

1.2 偏微分方程的基本概念

1.2.1 基本概念

1. 定义

首先,回顾常微分方程的定义:如果一个微分方程中出现的未知函数只含有一个自变量,这个方程叫作常微分方程,也简称微分方程.

随着科技发展,人们研究的许多问题如果用一个自变量的函数来描述已经不够了,比如说有些问题不仅和时间有关,而且和空间坐标也有联系,这就要用多个变量的函数来表示.因此,当一个微分方程除了含有几个自变量和未知函数外,还含有未知函数关于自变量的一个或多个偏导数时,称为偏微分方程,即

$$f(x_1, x_2, \dots, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots) = 0 \quad (1.4)$$

其中 $x_1, x_2, \dots (\in D \subset R^n, n \geq 2)$ 称为自变量, $u = u(x_1, x_2, \dots)$ 称为依赖于自变量的未知函数, $u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots$ 称为未知函数 u 关于自变量 x_1, x_2, \dots 的偏导数.

2. 偏微分方程的解

如果存在一个充分光滑的函数 $u = u(x_1, x_2, \dots)$ (即 u 在区域 \bar{D} 上连续,在区域 D 上具有各阶连续偏导数),使得 $u(x_1, x_2, \dots)$ 在区域 D 中满足方程(1.4),则 $u(x_1, x_2, \dots)$ 称作方程(1.4)的解.

3. 偏微分方程的阶

偏微分方程中未知函数偏导数的最高阶数定义为方程的阶.

4. 偏微分方程的分类

(1) 线性方程 —— 方程中未知函数及其偏导数都是线性的,且未知函数的系数只依赖于自变量;

(2) 拟线性方程 —— 最高阶偏导数是线性的,但方程不是线性的;

(3) 非线性方程 —— 最高阶偏导数是非线性的.

例 1.2.1 线性方程

$$\begin{aligned} (yu_{xx} + 2xyu_{xy} + u_y = x^2 \\ u_{xxx} + 2x^2y^2u_{xxy} + y^3y_{yyy} = 0 \\ u_{xx} + xu_y = y \end{aligned}$$

$$u_{xx} + 4xyu_{xy} + u_{yy} = \sin x$$

拟线性方程

$$u_x u_{xx} + x u u_y = \cos x$$

$$u u_x - 2xyu_y = 0$$

$$u_{xxx} + u_{yyy} + \ln u = 0$$

$$u_{xy} u_{xyy} + 3u_{xy} + \sin u = 0$$

非线性方程

$$u_{xy}^2 + 5u_x + e^y u = y^2$$

$$u_x^2 + u u_y = 1$$

$$u_{xx}^2 + u_y^2 + \sin u = e^y$$

$$(u_x^2 + 1)u_{xyy}^2 + x^2 u_x^2 + u_y = 0$$

在数理方程这门课中,主要研究二阶线性偏微分方程.

依赖于 n 个自变量的二阶线性偏微分方程可表示为

$$\sum_{i,j=1}^n A_{i,j} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n B_i u_{x_i} + F u = G \quad (1.5)$$

其中系数矩阵 $A_{i,j} = A_{j,i}$, 且 $A_{i,j}, B_i, F$ 以及右端项 G 都是仅依赖于 n 个自变量的函数. 如果方程(1.5)中右端项 $G \equiv 0$, 则方程(1.5)为齐次方程, 否则称为非齐次方程.

5. 偏微分方程的通解

与常微分方程不同,常微分方程的通解是依赖于任意常数的,而偏微分方程的通解是依赖于任意函数的.

例 1.2.2 如果 $u = u(x, y)$ 是 x, y 的二元函数, 则

$$u_{xy} = 0 \Rightarrow u_x = f(x) \Rightarrow u(x, y) = g(x) + h(y)$$

其中 $f(x), g(x)$ 和 $h(y)$ 是任意连续可微函数.

例 1.2.3 假定 $u = u(x, y, z)$, 且 $u_{yy} = 2$, 则在方程两端连续积分两次可得偏微分方程的通解为

$$u(x, y, z) = y^2 + y f(x, z) + g(x, z)$$

这里 $f(x, z)$ 和 $g(x, z)$ 是依赖于两个自变量 x, z 的任意连续可微函数.

回想常微分方程的求解过程,首先确定一个依赖任意常数的通解,然后根据给定的条件确定任意常数的值,求出特解.但是,对偏微分方程而言,从偏微分方程的通解中选出满足附加条件的一个特解,可能和求通解一样困难,甚至比求通解更困难.这是因为偏微分方程的通解是依赖于任意函数的,而不是常数.

此外,对于偏微分方程和常微分方程,还有一点需要注意的是, n 阶线性齐次常微分方程,其 n 个线性无关解的线性组合仍然是常微分方程的一个解.但是对于偏微分方程来说,这样的结论一般是不成立的.因为,每一个线性齐次偏微分方程的解空间是无限维的函数空间.

例 1.2.4 求解一阶线性齐次偏微分方程

$$u_x + u_y = 0$$

解 通过坐标变换

$$\begin{cases} \xi = x + y \\ \eta = x - y \end{cases}$$

可得 $2u_\xi = 0$, 左右两端关于 ξ 积分一次, 得通解

$$u(x, y) = f(x - y)$$

这里函数 $f(x - y)$ 是任意连续可微函数, 可表示为无限多种形式, 例如

$$(x - y)^n, \sin n(x - y), \cos n(x - y), \exp n(x - y), n = 1, 2, 3, \dots$$

这些函数都是线性无关的.

1.2.2 算子与线性算子

1. 算子——表示一种对函数的运算符号; 一个算子作用于一个函数后根据一定的规则生成一个新的函数. 例如微分算子 D , 有

$$D[u(x, y)] = \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

积分算子“ \int ”, 有

$$L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-t\tau} d\tau$$

散度算子“ $\nabla \cdot$ ”, 有

$$\nabla \cdot u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

拉普拉斯算子“ Δ ”, 有

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

算子 (A, B, C) 运算法则:

- (1) 加法交换律: $A + B = B + A$;
- (2) 加法结合律: $(A + B) + C = A + (B + C)$;

(3) 乘法结合律: $(AB)C = A(BC)$;

(4) 乘法对加法的分配律: $A(B + C) = AB + AC$.

算子乘法未必满足交换律, 例如

$$A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}, B = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - y^2 \frac{\partial}{\partial y}, xy \neq 0$$

计算可知 $AB[u] \neq BA[u]$.

2. 线性算子——满足如下性质的算子称为线性算子

$$L[au + bv] = aL[u] + bL[v]$$

其中 a, b 是任意常数.

习 题 1

1. 对于下列偏微分方程:

(a) $(xy + 5)u_{xyyz} + x^2yu_{xyz} - y^4u_{yyz} + x^2u + \ln xz = 0$;

(b) $u_{xx}^2(u_{yy} + 1) + 2u_xu_y^3 + \sin x = 0$;

(c) $u_{xyz}u_{xyyz} + 6x^2y^2u_{xyz} + u_{xy} = 0$;

(d) $\sqrt{u_{xx}}u_{yy} + y^2u_y + u^2 = e^{xy}$;

(e) $x^2u_{xxyz} + 2yu_{xxz} - 6u_{yyz} + (x^2 + 1)u + \sin x = 0$;

(f) $u_{xy}^3u_{xyz} + 4u_xu_y^2 + x^2 = 0$;

(g) $u_{xz}u_{xyz} + 2x^2u_{xyz} + u_{xy} = 0$;

(h) $u_{xy}^2 + x^2u_y + u = \ln xy$.

试确定: (1) 齐次还是非齐次的; (2) 方程是几阶的; (3) 方程是属于线性、拟线性及非线性的三类中的哪一类.

2. 令 $u_x = v$, 求方程

$$u_{xy} + u_x = 0$$

的通解.

3. 证明: 函数 $u(x, y) = f(xy)$ 是方程

$$xu_x - yu_y = 0$$

的解, 其中 f 是具有连续导数的函数.

4. 证明: $u(x, y) = f(x)g(y)$ 是方程

$$uu_{xy} - u_xu_y = 0$$

的解, 其中 f 和 g 是任意二次连续可微函数.

第 2 章 数学模型的建立及定解问题

许多数学物理问题都可以归结为三类典型的偏微分方程问题:波动方程、热传导方程以及拉普拉斯方程. 在详细介绍这三类偏微分方程前, 本章将通过几个简单的例子, 讨论常微分方程模型和积分方程模型的建立和求解过程, 用数学的语言描述物理规律, 并为随后的偏微分方程模型的建立、求解奠定基础.

2.1 马尔萨斯人口模型

英国著名人口统计学家马尔萨斯(Malthus, 1766—1834) 在研究 100 多年的人口统计时, 发现单位时间内人口的增加量与当时人口总数是成正比的. 由此建立了一个描述人口增长的模型, 即后来闻名于世的“马尔萨斯人口模型”.

设 $x(t)$ 表示 t 时刻的人口数目, 当考察一个国家或一个较大地区的人口时, $x(t)$ 是一个较大的整数, 并且设 $x(t)$ 是连续且可微的. 记初始时刻 ($t=0$) 的人口数为 x_0 , 假设人口增长率为常数 r , 则从 t 时刻到 $t+\Delta t$ 时刻, 人口的增长率 r 满足

$$r = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (2.1)$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $x(t)$ 满足如下的微分方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

由方程(2.2) 易解出

$$x(t) = x_0 e^{rt} \quad (2.3)$$

当 $r > 0$ 时, 表明人口将按照指数规律无限增长, 因此“马尔萨斯人口模型” 又称为“人口指数模型”.

这个模型对于人口增长的相对短期的预测是正确的, 但是如果按照这一模型预测 2510 年的世界人口将达到 2 万亿. 这意味着, 即使将全世界所有陆地和所有海洋面积都计算在内, 人均面积也只有 0.86 m^2 . 很显然这种状况是不可能出现的, 其

缺陷在于没有考虑人口增长的非线性机制和人口死亡率. 随着人口总数的增加, 地球上的生存环境及生态资源对人口增长的限制变得越来越显著, 这一因素将使人口增长趋于缓慢.

2.2 单摆问题

假设有一长为 l 的柔软细线, 一端固定, 另一端系一质量为 m 的质点(称为摆球), 在垂直平面内的平衡位置两侧摆动, 如图 2.1 所示. 讨论图 2.1 中单摆的运动方程.

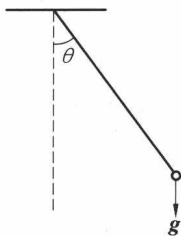


图 2.1 单摆

设任意时刻, 摆球偏离铅垂线的角度为 θ , 摆球受到的合力为重力沿切向的分量 $mg \sin \theta$, 且切向速度为 $v = l \frac{d\theta}{dt}$. 由牛顿第二定律, 可得

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \theta \quad (2.4)$$

式(2.4)中的负号表示摆球加速度 $\frac{dv}{dt}$ 的方向与角度 θ 的方向相反, 则

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (2.5)$$

此为单摆的运动方程. 这是一个非线性方程, 它能够描述单摆在任意摆角时的运动. 如果摆动的角度很小, 那么认为 $\sin \theta \approx \theta$, 则方程(2.5)化为线性方程

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (2.6)$$

2.3 CT 成像的重建算法 —— Lambert-Beer 定律

首先,由 X 射线源发出射线强度为 I_0 的 X 射线,射线经探测对象,由探测对象后方的探测器接收到的 X 射线强度为 I . 假定被探测的物体为均匀的且为同一介质,其线性衰减系数设为 μ ,厚度为 x (图 2.2),则有

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

使得

$$\mu x = \ln \frac{I_0}{I} \quad (2.7)$$

此为著名的 Lambert-Beer 定律.

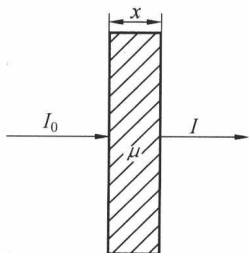


图 2.2 Lambert-Beer 定律

实际上,被投射的物体一般都是非均质的. 此种情况,可以将射线穿过的介质沿着扫描路径 l 划分为大小相等的 n 个小方块,每小块的厚度为 Δx ,每一块视为均质的. 设每一块的线性衰减系数分别为 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. X 射线通过第一个方块后衰减为

$$I_1 = I_0 e^{-\mu_1 \Delta x}$$

通过第二块后衰减为

$$I_2 = I_1 e^{-\mu_2 \Delta x}$$

以此类推,通过第 n 块后衰减为

$$I_n = I_{n-1} e^{-\mu_n \Delta x}$$

此 I_n 即为探测器接收到的射线强度 I , 即

$$I = I_0 e^{-(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n) \Delta x}$$

等式两端同时取对数, 可得

$$\ln \frac{I_0}{I} = (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n) \Delta x$$