

非定常跨音速空气动力学 和气动弹性力学

陈文俊 译

崔尔杰 审校

航天工业总公司第三研究院

V215.3
1004

V215.3
1004-1

内容简介

本书是根据作者多年从事超音速流动研究工作的经验，结合我国航空工业发展的需要，参照国外有关文献，经过反复修改，编写而成的。本书可作为高等院校航空专业及有关专业师生的教材，也可供从事超音速流动研究的工程技术人员参考。

非定常跨音速空气动力学

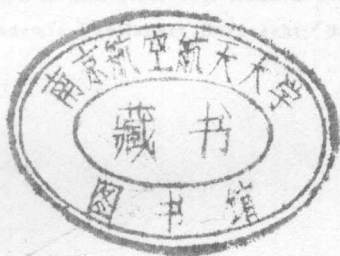
和气动弹性力学

一九九四年十月十七日



30735280

陈文俊 译
崔尔杰 审校



航天工业总公司第三研究院

735280

内容简介

本专辑探讨了非定常跨音速空气动力学和气动弹性力学中的四个基本问题：线性与非线性空气动力的分界线；对于跨音速流体动力方程，能取代有限差分解法的其他更有生命力的解法；跨音速空气动力学的非唯一解问题；气动弹性分析中，利用非定常跨音速空气动力计算机程序的有效计算方法。此外，还介绍了土木工程结构中的四个气动弹性问题：旋涡脱落、驰振、发散、颤振和抖振。

本专辑可供航空、航天、土木工程（桥梁、管线和高层建筑）等部门设计人员使用，亦可作为高等院校有关专业的教学参考资料。



中国工程总公司三策室编

132580

前 言

1978年,美国几位气动弹性力学权威的合著《气动弹性力学现代教程》出版了,这是一本内容新颖、用途广泛的气动弹性力学专著。1991年,我国出版了此书的中译本*。1989年,上述原著的第二个版本**问世了。新版本对旧版本作了许多修正和扩充。

由于经费限制,这里,我们只选译了新版本中的两章,作为专辑出版。一章是新版本的第六章(土木工程结构中的气动弹性问题),这是修正最多的一章,我们把它列为本专辑的第二章;另一章是新版本的第九章(非定常跨音速空气动力学和气动弹性力学),这是新增加的一章,它被列为本专辑的第一章。

本专辑可供航空、航天和土木工程(高层建筑、桥梁、管道、输电线等)各部门结构设计人员使用,也可作为高等院校有关专业的教学参考资料。

我国著名气动弹性力学专家崔尔杰教授,在百忙中,承担了本专辑译稿的全部审校工作。谨致深切谢意。

由于译者水平所限,缺点和错误在所难免,恳请读者和专家批评指正。

译者 1993年1月于北京

* 道尔 E H,小柯蒂斯 H C,斯坎伦 R H和西斯托 F著,陈文俊、尹传家译,崔尔杰审校,《气动弹性力学现代教程》,北京:宇航出版社,1991年。

** Dowell E H, Curtiss H C, Scanlan R H and Sisto F. A modern Course in aeroelasticity. Second revised and enlarged edition, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1989.

目 录

第一章 非定常跨音速空气动力学和气动弹性力学.....	(1)
§ 1.1 引言.....	(4)
§ 1.2 非定常跨音速空气动力学中的线性和 (或) 非线性特性.....	(4)
§ 1.3 可以取代有限差分法的富有生命力的求解方法.....	(13)
§ 1.4 跨音速流动中非定常振荡的不唯一性、瞬态衰减时间和平均值.....	(16)
§ 1.5 利用非定常跨音速空气动力计算机程序确定气动弹性响应的各种 富有效力和效率的计算方法.....	(23)
§ 1.6 频域中的非线性颤振分析及其与时间推进解的 比 较.....	(25)
§ 1.7 结束语.....	(40)
参考文献.....	(41)
第二章 土木工程结构中的气动弹性问题.....	(47)
§ 2.1 旋涡脱落.....	(48)
§ 2.2 驰振.....	(62)
§ 2.3 发散.....	(68)
§ 2.4 颤振和抖振.....	(71)
参考文献.....	(87)

第一章 非定常跨音速空气动力学和气动弹性力学

提 要

近年来,人们对跨音速流动区域中的非定常空气动力学和气动弹性力学的认识,取得了明显的进步。这个流动区域,对于气动弹性现象而言,往往是至关重要的。然而,要从物理现象上去根本认识跨音速流动,并且建立它的数学计算模型,是很困难的。这种困难的原因主要在于跨音速流动中可能存在的严重非线性。现有的数学模型主要依靠流体力学的非线性偏微分控制方程的有限差分解法。本章探讨几个当前关心的基本问题。这会为读者理解这方面的新近文献奠定基础。

要探讨的四个主要问题是:

- (1) 在什么情况下,空气动力基本上是翼型运动的线性函数?
- (2) 对于求解跨音速流体动力学方程,除了有限差分法外,是否还有其他更有生命力的方法可以取代它?
- (3) 在空气动力是翼型运动的非线性函数的情况下,人们经常看到的多值(非唯一)解有何含义?
- (4) 什么是便于气动弹性(例如颤振)分析中利用非定常跨音速空气动力计算机程序的富有效力和效率的计算方法?

符 号 说 明

C_L 、 C_M	——升力、力矩系数
$C_{L\alpha}$ 、 $C_{M\alpha}$	——升力、力矩曲线斜率
C_P	——压力系数
c	——翼弦
K	$= (\gamma + 1) Ma_\infty^2 \tau / \beta^3$
k	——折算频率,且 $k = \omega c / U_\infty$
Ma	——马赫数
s	$= (\beta^2 t U_\infty / c) / Ma_\infty^2$
t	——时间
x 、 y	——自由流和垂直方向的空间坐标
x_s	——激波位置
Δx_s	——用翼弦正则化的激波位移

α_0, α_1 ——平均迎角、动态迎角(度)

$\beta = (1 - Ma_\infty^2)^{1/2}$

γ ——比热比

$u = kMa_\infty^2/\beta^2$

$\phi^{(0)}, \phi^{(1)}$ ——定常流动和非定常翼型运动的速度势

ϕ ——相角

τ ——翼型厚度比

ω ——频率

Δ ——梯度算子

下标

∞ ——自由流

L ——局部或升力

M ——力矩

$\max$ ——最大

$0, 1$ ——平均、动态

TE ——后缘

上标

c ——激波开始形成

tc ——激波到达后缘

第5节

M ——结构模态数

NF ——颤振分析中所需折算频率数

NR ——非线性颤振分析的响应级数

P ——参数组数

T_A ——对于给定的翼型运动, 计算程序达到稳定解所需计算时间

T_F ——流体-结构联立计算完成瞬态过程所需计算时间

T_{AF} ——空气动力计算机程序确定一个折算频率下的空气动力所需的计算时间

第6节

$A(), A_L, A_M$ ——指数响应函数

a ——弹性轴至翼弦中点的距离对半翼弦长的百分率(弹性轴在中点下游时, a 为正值)

b ——半翼弦长

c ——全翼弦长

C_L^N ——非线性升力系数

C_M^N	——绕翼弦中点的非线性力矩系数
$C_{M_e}^N$	——绕弹性轴的非线性力矩系数
$\overline{D_L}, \overline{D_M}$	——描述函数分量
F	——描述函数的输出
G	——结构传递函数
H	——非线性空气动力传递函数
$\hat{H}$	——空气动力描述函数
h	——弹性轴的沉浮位移 (向下为正)
h_c	——翼弦中点的沉浮位移 (向下为正)
I_a	——单位翼展绕弹性轴的惯性矩
k	——折算频率, 且 $k=c\omega/u$
L	——升力
M	——绕翼弦中点的力矩 (抬头为正)
m	——单位翼展质量
Ma_∞	——均匀气流的马赫数
R	——非耦合频率比, 且 $R=\omega_h/\omega_a$
r_a	——基于半翼弦长的、绕弹性轴的无量纲回转半径, 且 $r_a^2=r_{cg}^2+(x_{cg}-a)^2$
r_{cg}	——基于半翼弦长的、绕重心的无量纲回转半径
S_a	——静态不平衡
s	——拉普拉斯算子的无量纲变量, 且对于简谐振荡, $s=ik$
t	——时间
U	——无量纲气流速度, 且 $U=u/c\omega_a\sqrt{\mu}$
u	——有量纲气流速度
x_{cg}	——重心至翼弦中点的距离对半翼弦长的百分率 (重心在中点下游时, x_{cg} 为正值)
α	——俯仰位移
ϕ	——有效诱导迎角, 见式 (1·6·1)
ϕ_1	—— ϕ 的振幅
μ	——质量比, 且 $\mu=m/\pi\rho b^2$
ω_h, ω_a	——翼型的沉浮和俯仰非耦合圆频率
ρ	——空气密度
τ	——无量纲时间, 且 $\tau=ut/c$
上标	
T	——矩阵转置
$\wedge$	——与描述函数相关的量
$\cdot$	$=d/dt$
$-$	——拉普拉斯算子辅助域中的量

§ 1.1 引言

为了形成本章框架,我们选择了提要中所列出的四个问题。作这种选择的理由如下:

(1) 可以预言,这些问题是非常重要的基本问题;

(2) 回答这些问题,对于非定常跨音速空气动力学在气动弹性力学中的应用,具有重要意义;

(3) 新近的研究成果,至少,得出了这些问题的部分答案。

我们分别在第1.2、1.3、1.4、1.5和1.6节中,探讨上述四个问题。读者可以单独阅览其中任何一节,这种阅读的自由选择性想必会受到读者的欢迎。

§ 1.2 非定常跨音速空气动力学中的线性和(或)非线性特性

动机与一般背景

气动弹性专业人员,在大多数气动弹性分析中,都采用线性动力系统理论。因为对于线性系统,人们已有丰富的经验和深刻的理解,并且研制了有效的计算和(或)实验方法。与此相反,虽然存在非线性分析和试验方法,但是利用这些方法求得结果要花费更多的钱,而且对这种结果的解释也要困难得多。因此,线性模型,在适用的地方,是强有力的、较简单的和极有价值的模型。于是,确定线性模型的有效区域就是一个很重要的问题。

这里,我们关心的是跨音速流动中可能存在的空气动力非线性。当然,在其他流动区域中,也可能出现空气动力非线性,但是,正是在跨音速流动中,这种非线性才是最重要的。的确,常常可以看到,在跨音速流动区域,非线性是控制方程本身所具有的性质。然而,对于任何马赫数下的任何翼型,如果迎角充分地小,则空气动力和激波运动将是迎角的线性函数。此外,随着迎角运动频率的增大,保持线性特性的迎角范围也会增大。利用巴尔豪斯(Ballhaus)和古尔吉安(Goorjian)的低频、跨音速、小扰动方法(LTRAN2)^[1, 2],作为主要解析方法,研究什么时候会出现线性或非线性特性,就是本节的目的。现在和未来的任何其他非线性空气动力方法也可以(而且应该)用于类似的目的。

首先讨论一下激波及其运动将是很有益的,因为这一问题常常引起一些混淆。定常跨音速小扰动气动理论对于动态迎角线化的结果是在定态激波位置上出现集中力或压力脉冲(有时称为激波偶极子)^[58, 59]。压力脉冲的强度等于定态激波压力阶跃值,其宽度与动态迎角成正比。而在翼弦上离开激波偶极子(其中心在定态激波位置)的其他地方,按照跨音速线化理论,压力幅值是与动态迎角成正比的,当动态迎角变小时,压力幅值也按比例降低。当然,后一特性在经典理论中也存在。经典线性理论与跨音速线性理论最重要的(虽然不是唯一的)区别在于,后者存在激波(及其运动),它形成了集中的激波力偶极子。LTRAN2和其他一些跨音速计算机程序都包含激波及其运动,而经典空气动力理论既不包含激波也不计及激波运动。某些非一致的跨音速方法只考虑激波,而不计及激波运动。

当动态迎角变小时,根据某个非线性动态理论,也可看出上述特性。考察图1.1(利用

LTRAN2求得)，它表示—NACA64A006翼型在 $Ma_\infty=0.86$ 和若干迎角下的弦向压差（下表面减上表面）分布。这里，为了简单起见，令折算频率为零，于是，在定态和动态迎角之间，数值上就没有区别。当迎角很小（例如， $\alpha=0.125^\circ$ 、 0.25° ）时，正如我们所看到的，压力分布有一激波偶极子，它集中在平均（零迎角）激波位置，即 $x_s/c=0.548$ 。激波偶极子的宽度由前后两条垂直线表示，前者位于下表面激波位置，后者则在上表面激波处。当 α 很小时，激波偶极子的宽度与 α 成正比；但当 α 增至1度时，则下表面激波消失了，而上表面激波移至后缘并保持在那个位置。

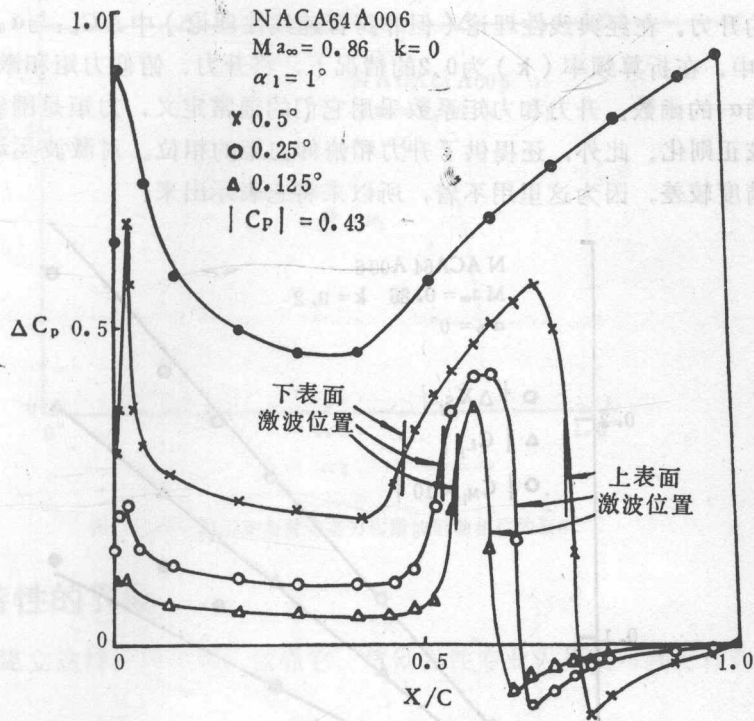


图1.1 压差分布

此外，对于较小的 α ，激波偶极子的幅值基本上等于通过 α 为 0° 的激波的压力阶跃值，即0.43。离开激波偶极子且 α 很小时，则压力与 α 成正比。

最后指出一个很重要的问题。对于微小 α ，由于激波宽度变窄，所以，当 $\alpha \rightarrow 0$ 时，任何一个 α 为非线性的有限差分法，都有一个分解能力的问题。相反，事先对 α 线化的方法则可避免这种困难，因为它按显式计算激波运动（见文献[58]、[59]和[19]）。此外，欲知对理论和实验的中肯评价，请见文献[50]、[51]中的探讨。戴维斯（Davis）和马尔科姆（Malcolm）的实验研究^[12]在这里特别有用，因为它对以上所述提供了广泛的证明。

$Ma_\infty = 0.86$ 且绕前缘作俯仰运动的NACA64A006翼型

文献 [15] 中，研究了下列基本问题：各种折算频率下，动态攻角对动力力和激波运动

的影响；线性/非线性特性的界线；折算频率和动态幅值*对空气动力传递函数的影响；动态攻角对稳态力和激波位移的影响；定态迎角对动态力和激波运动的影响。为简单起见，这里，只考虑前两个问题。

动态迎角对动态力和激波运动的影响

人们希望能估计到在什么动态幅值（迎角）范围内非线性效应变得重大，以便确定升力、力矩和激波运动的线性对非线性的相对特性。注意，总升力（力矩、激波运动）由 $C_L = C_{L_0} + C_{L_1}$ 描述，其中， C_{L_0} 表示由平均迎角 α_0 引起的升力，而 C_{L_1} 则表示当给定 α_0 时动态迎角 α_1 产生的升力。在经典线性理论（但非跨音速线性理论）中， C_{L_1} 与 α_0 无关。

图1.2中，在折算频率（ k ）为0.2的情况下，将升力、俯仰力矩和激波位移的幅值表示为动态迎角 α_1 的函数。升力和力矩系数采用它们的通常定义，力矩是围绕翼弦中点的，激波位移用翼弦正则化。此外，还提供了升力和俯仰力矩的相位。对激波运动的相位，也作了计算，但其精度较差，因为这里用不着，所以未将它表示出来。

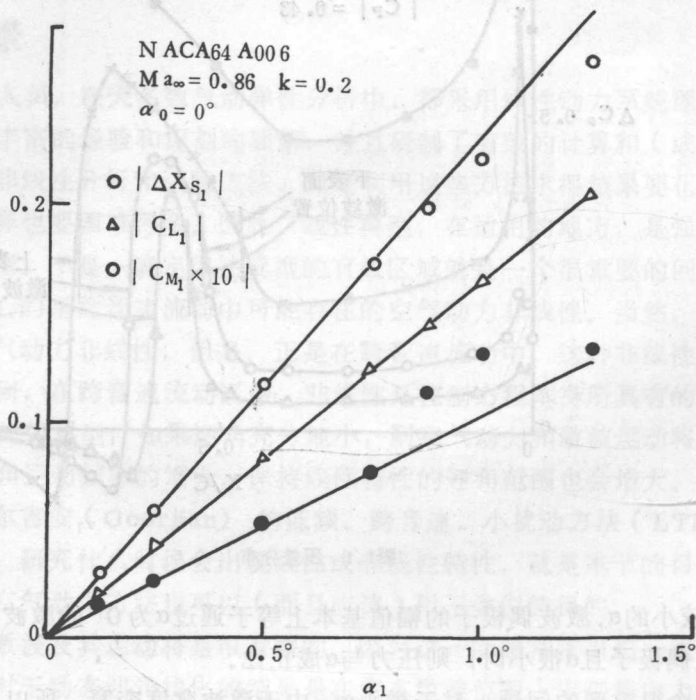


图1.2a 动态迎角对动态力和激波运动幅值的影响

由图可见，使升力保持为线性的动态迎角范围大于使力矩保持为线性的动态迎角范围，而后者又大于使激波运动保持为线性的动态迎角范围。此外，我们将会看到，折算频率越大，保持线性特性的动态迎角范围也越大。一般说来（但不完全），用相位数据来表示背离线性特性的程度，比用升力、力矩和激波运动幅值的数据，更为灵验。当然，按照绝对线性的理论，相位与动态迎角是无关的。

需要指出的是，在任何数值结果中，没有发现可被测出的高次谐波含量。这些数值结果

* 指俯仰运动的幅值——译者注。

实际上是升力、力矩和激波运动的正弦信号；因此，可用任何一个惯用方法容易地确定幅值和相位。激波运动的相位则属例外，任何一个方法都难以精确地确定它，这是由于分解激波的有限差分网格比较粗糙之故。

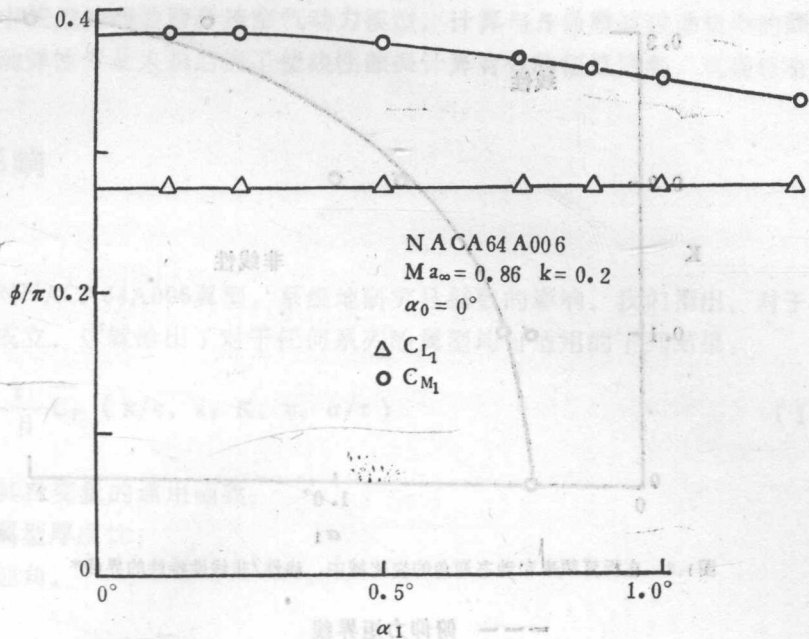


图 1.2b 动态迎角对动态力和激波运动相位的影响

线性/非线性特性的界线

人们迫切希望建立这样一种准则：依靠它，气动弹性专业人员便可判定什么时候可以利用线性动态理论。

图1.3是根据图1.2和其他类似结果，并在 (k, α_1) 平面上标出满足下列条件的 k 和 α_1 的各种组合（点）而构成的：每一组合，使俯仰力矩的幅值或相位偏离其线性理论值的 5%。正如我们所预料的， k 越大，使俯仰力矩保持为线性的 α_1 也越大。

虽然图1.3提供了很有用的资料，但建立此图需要利用非线性动态理论。于是，便产生了一个问题，即，是否存在只需借助线性动态理论便可使用的类似但可能更保守的准则？激波运动提供了答案。在图1.4中，画出了一条类似于图1.3中所示的界线（还是根据诸如图1.2中所提供的资料构成的），但它是建立在激波运动而不是俯仰力矩的基础上的。由图1.2可见，当激波位移幅值小于 5%（对翼弦的比值——译者注）时，激波运动（以及升力和俯仰力矩）随动态迎角的变化便呈现为线性的。因此，图1.4中，示出了一条 5% 激波运动界线。要注意的是，这条界线可由线性动态理论构成。在该图中，还表示了另一条界线（其保守性比第一条的更小），它是根据激波运动对其线性值的最先可发现的偏离点而制成的。图1.4中，也示出了图1.3中的界线，以供参考。上述结果与巴尔豪斯和古尔吉安的结果^[3, 4]是一致的，他们也认为：小于 5% 弦长的激波运动符合线性理论。

俯仰力矩偏离5%

- 幅值
- 相位

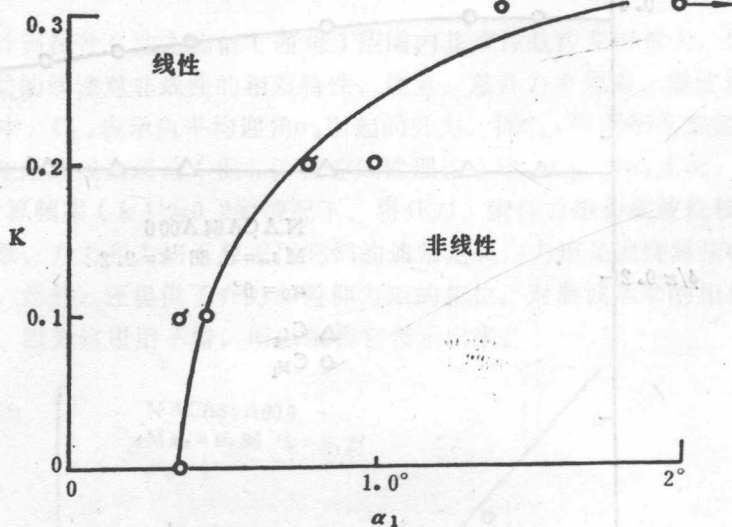


图1.3 在折算频率和动态迎角的变化域中, 线性/非线性特性的界线*

- 俯仰力矩界线
- 5%激波运动位移
- 最初可见的偏离线性度

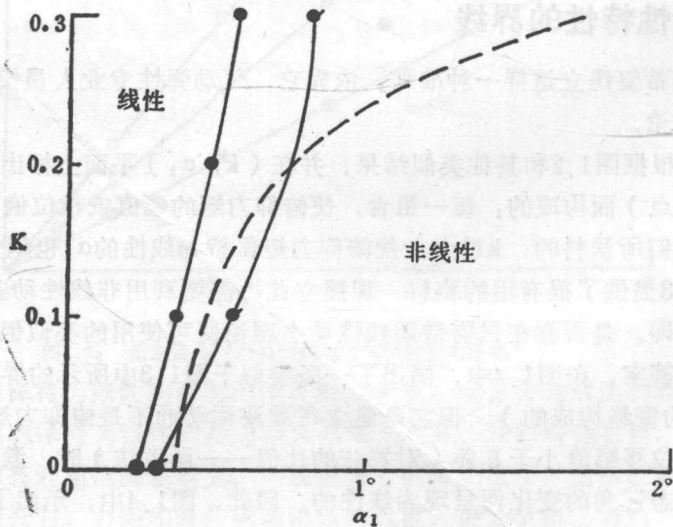


图1.4 基于激波运动幅值的线性/非线性特性的保守界线*

这样, 我们就可得出结论: 基于激波运动而得到的简单准则, 可以用于划定线性与非线

* 图1.3、图1.4以及后面的图1.15及图1.17中的K应为k。

性区域的界线。该准则原则上可用线性动态理论确定（这就增强了它的实用性），尽管现在的结果是由非线性动态理论求得的。

这里，说一句题外话，以便解释为什么激波运动准则对气动弹性专业人员是极有用的。

当人们利用线性跨音速空气动力理论，按照常规颤振分析，确定了颤振形态后，就可以利用颤振分析中使用的线性跨音速空气动力模型，计算与5%激波运动相当的颤振运动幅值。这就为气动弹性专业人员给出了使线性颤振计算有效的幅值限制。这是极有用的资料。

马赫数的影响

相似律

这里，将对NACA64A006翼型，系统地研究马赫数的影响。我们指出，对于低频跨音速流动，相似律成立。这就给出了对于任何系列的翼型均可适用的下列结果：

$$C_P = \frac{\tau}{\beta} \overline{C_P} (x/c, s; K, v, \alpha/\tau) \quad (1.2.1)$$

式中 $\overline{C_P}$ ——其自变量的通用函数；

τ ——翼型厚度比；

α ——迎角。

且

$$\beta \equiv (1 - Ma_\infty^2)^{1/2}, \quad v \equiv k Ma_\infty^2 / \beta^2$$

$$K \equiv \frac{(\gamma + 1) Ma_\infty^2}{\beta^3}, \quad s \equiv \frac{\beta^2 t U_\infty / c}{Ma_\infty^2}$$

当 $\alpha \rightarrow 0$ 时，把 (1.2.1) 展成泰勒级数，便可进一步使它具体化，即

$$C_P = \frac{\tau}{\beta} \overline{C_P} (x/c, s; K) + \frac{\alpha}{\beta} \text{Re} \left\{ e^{i v s} \overline{C_{P1}} (x/c; K, v) \right\} \quad (1.2.2)$$

这就是对 α 作动态线化（即 $\alpha = \alpha_1$ ）的相似律。为了简单起见，我们作了平均迎角为零的假设，即 $\alpha_0 = 0$ ，但此结果不难推广到 α_0 非零的情况。由式 (1.2.2) 可见，简谐部分的相似性仅仅要求两种不同流动的 K 和 v 都是相同的。

最后要指出的是，由于激波就是 ϕ_x 的不连续面，因此它满足下式所示的相似律：

$$x_s = x_s (\beta y/c, s; K, \alpha/\tau, v) \quad (1.2.3)$$

在 $\alpha \rightarrow 0$ 的情况下，对上式取极限，则得

$$x_s = x_{s0} (\beta y/c; K) + \alpha/\tau \text{Re} \{ e^{i v s} x_{s1} (\beta y/c; K, v) \} \quad (1.2.4)$$

1959年，迈尔斯 (Miles) 就知道式 (1.2.1) 所示的相似律，式 (1.2.2) 至 (1.2.4) 则是由威廉斯 M H (Williams M H) 对迈尔斯的结果所作的推广。

利用这些相似律，则可用64A006翼型的结果来求得同一族的任何其他翼型（特别是64A010）的结果。

由式 (1.2.4) 可以推知：5%激波运动准则具有下列函数形式（对一族特定翼型）：

$$\alpha/\tau = F(v, K) \quad (1.2.5)$$

值得指出的是,冯(Fung)等人曾经提出了一个用于检查线化有效性的准则^[19]:

$$\left(\frac{\alpha}{\tau}\right)/K \ll 0.1 \quad (1.2.6)$$

式(1.2.6)显然是式(1.2.5)的一个特殊情况。利用式(1.2.5),对图1.3和1.4(以及后面的图1.5)可以按照相似变量作重新解释,从而使之推广。

线性/非线性特性的界线

利用图1.2中所示结果并引用5%激波位移准则,则可根据马赫数对翼型振荡幅值的变化来构成线性/非线性的界线。当然,当激波非常趋近后缘时,则需修正5%准则。图5中表示了 $k=0$ 和0.2的结果。注意,对于定常流动($k=0$),当 $Ma_\infty=0.88$ 和0.9时,要使线性特性存在,迎角必须很小。然而,正如我们前面已经看到的,5%激波位移准则是保守的。也就是说,实际上,使升力和力矩保持为 α 的线性函数的 α 范围要比这个准则确定的范围更大。利用其他任一合理准则确定的上述范围都要比这个准则确定的范围更大。相反,对于 $k=0.2$,线性范围则大大地扩大了。

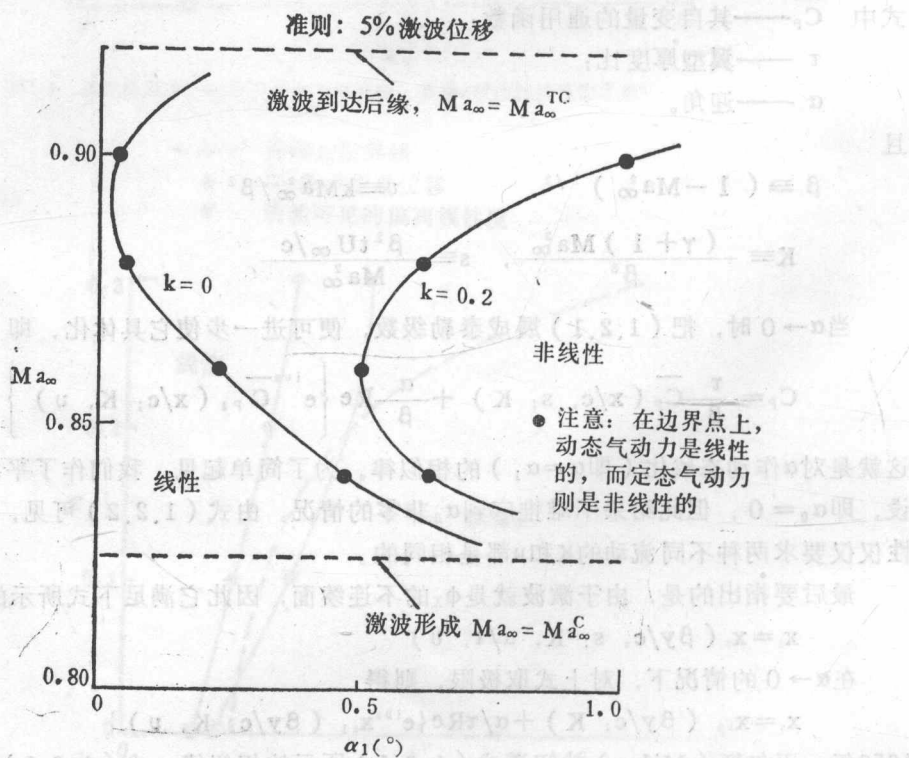


图1.5 折算频率对线性/非线性特性界线的影响: 马赫数对动态迎角

当 $Ma_\infty < Ma_\infty^C$ 或 $Ma_\infty > Ma_\infty^{TC}$ 时,线性范围实际上是无界限的。其实,在此范围内,在无粘、小扰动、跨音速理论的非线性成为严重之前,其他物理效应(例如,粘性效应)很可能开始起作用了。这里, Ma_∞^C 是激波初始形成时的马赫数,而 Ma_∞^{TC} 则是激波到达翼型后

缘时的马赫数。

空气动力传递函数

在线性范围内，考察一下随马赫数而变化的各种空气动力传递函数是很有意义的。其中，最熟悉的大概是升力曲线斜率 C_{L1}/α_1 ，图1.6a中，示出了由LTRAN2算出的 $k=0$ 时的该斜率幅值。图中还展示了由全势理论、经典亚音速理论和局部线化所得出的结果。局部线化结果只显示了 $Ma_\infty > Ma_\infty^C$ （即激波位于后缘）时的那部分，它利用了经典（超音速）理论中的局部后缘超音速马赫数。人们得出了下列结论：当 $Ma_\infty < Ma_\infty^C$ 时，经典理论给出了合理结果；当 $Ma_\infty > Ma_\infty^C$ 时，局部线化给出的结果是合理的；当 $Ma_\infty^C < Ma_\infty < Ma_\infty^T$ 时，LTRAN2给出了显然不同的结果，但它在 $Ma_\infty = 0.88$ 和 0.9 时可能失效。注意跨音速小扰动理论（LTRAN2）*与全势理论^[6]间的差别。

应该注意，图1.6a中所示的全势理论的结果是利用非保守有限差分法求得的。利用准保守有限差分法求得的全势理论的结果（由于技术原因，只得到了 $Ma_\infty < 0.87$ 时的结果），与利用保守有限差分法的跨音速小扰动理论（LTRAN2）的结果基本相同。因此，图1.6中所示的差别应该归因于保守与非保守有限差分的差异，而不应该归因于小扰动与全势理论的区

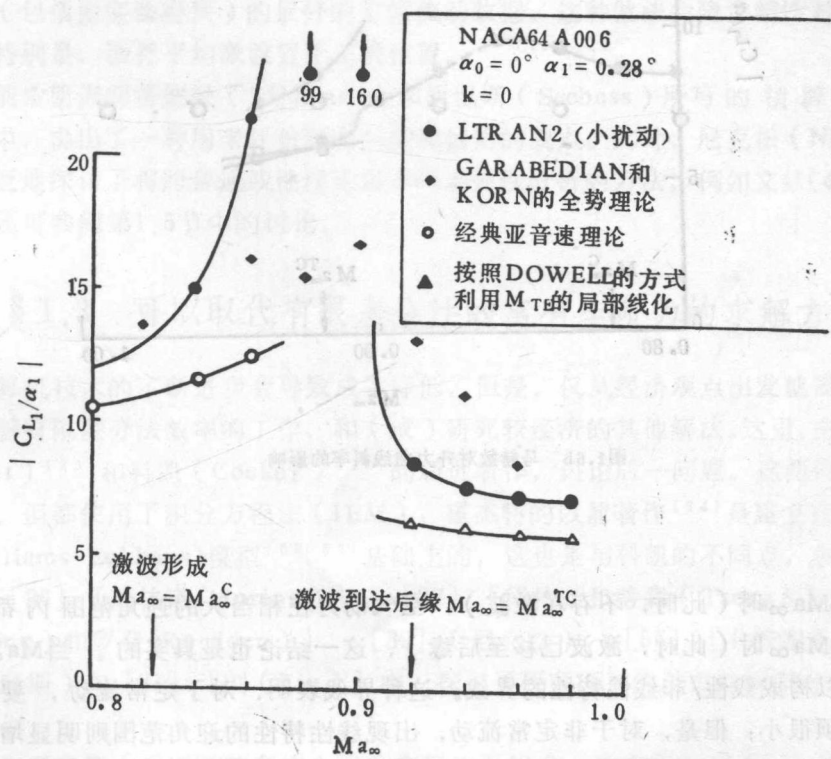


图1.6a 马赫数对升力曲线斜率的影响

* 图1.6a中， $Ma_\infty = 0.88$ 和 0.9 时的小扰动理论值大大缩小了比例尺。

别。就非保守有限差分法可以被认为有某种形式的数值粘性（与物理粘性不同）而言，上述差别可以归因于无粘与有粘流动间的性质上的区别。

在图1.6b中，示出了 $k=0.2$ 时的结果。为了参考起见，图中还示出了由LTRAN2求得的 $k=0.2$ 时的结果。我们再次看到，在 $Ma_\infty < Ma_\infty^C$ 和 $Ma_\infty > Ma_\infty^{TC}$ 的范围内，经典亚音速理论和局部线化理论分别给出了合理的结果（比 $k=0$ 时更好）。此外，LTRAN2似乎在整个马赫数范围内都给出合理的结果，但没有更好的理论来证实这一点。注意，在 Ma_∞ 从0.9至0.92的范围内，有些突变。

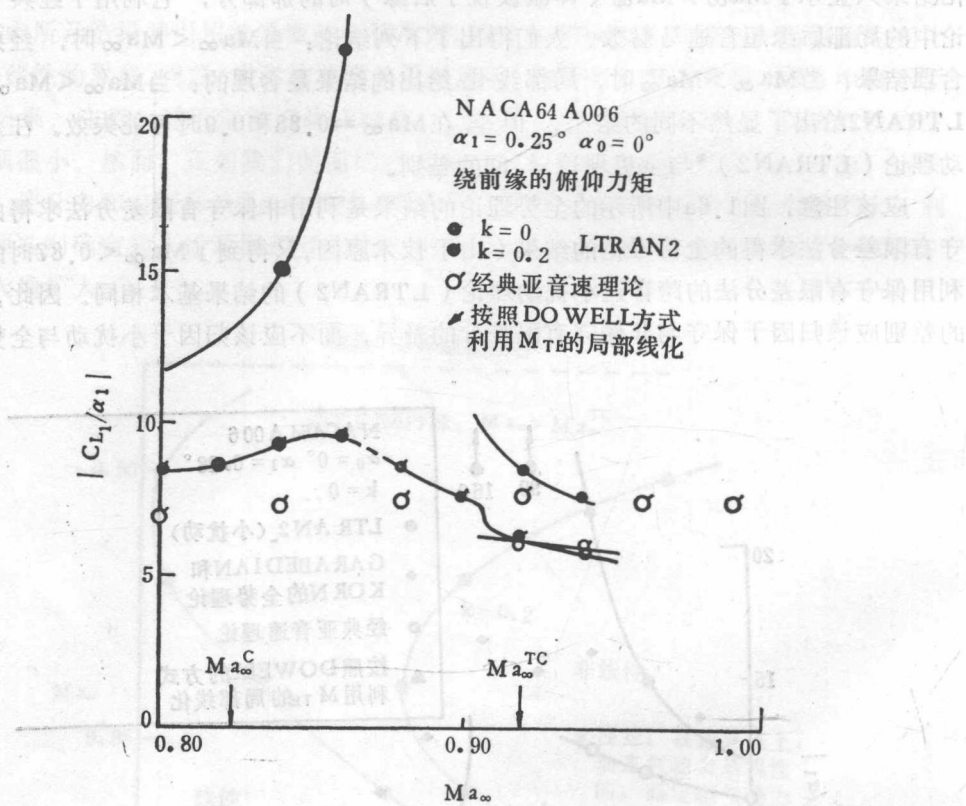


图1.6b 马赫数对升力曲线斜率的影响

结论

当 $Ma_\infty < Ma_\infty^C$ 时（此时，不存在激波），空气动力在相当大的迎角范围内都是线性的。当 $Ma_\infty > Ma_\infty^{TC}$ 时（此时，激波已移至后缘），这一结论也是真实的。当 $Ma_\infty^C < Ma_\infty < Ma_\infty^{TC}$ 时，可以构成线性/非线性特性的界线。这种界线表明，对于定常流动，要出现线性特性，迎角必须很小；但是，对于非定常流动，出现线性特性的迎角范围则明显增大。

在 $Ma_\infty^C < Ma_\infty < Ma_\infty^{TC}$ 范围内，跨音速小扰动理论（LTRAN2）和全势理论，就 Ma_∞ 的某个狭小范围内的定常流动而言，似乎是失效的。在该范围内，它们过高地估计了激波位移，从而，过高地估计了空气动力。这种情况暂且归因于这些理论中缺乏粘性之故。