

高等数学

第四卷
(第三分册)

R. 罗德 著
秦裕璠 译

高等教育出版社

高 等 数 学

第 四 卷
(第三分册)

R. 罗 德 著
秦 裕 瑗 译

| 高 等 教 育 出 版 社 |

本书系根据莱比錫托伊布訥出版社 (B. G. Teubner Verlagsgesellschaft) 出版的罗德 (R. Rothe) 著“高等数学” (Höhere Mathematik) 第四卷第三分册 1961 年第 10 版译出。第四卷共有三分册, 分别作为罗德著“高等数学”前三卷的补充习题集。各分册中习题不只数量增多到三、四倍, 还附有较详细的解答与提示。

本卷各分册可分别配合前三卷的学习参考, 也可供教师选题参考。读者对象是高等学校理工科程度较好的学生, 基础较好的自学者以及有关教师。

2180/08

高等数学 第四卷 第三分册

R. 罗德 著
秦裕琰 译

北京市书刊出版业营业许可证书字第 119 号

高等教育出版社出版 (北京景山东街)

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 K13010·1203 开本 850×1168³/₃₂ 印张 2¹³/₁₆

字数 99,000 印数 0,001—5,900 定价 (5) 40.38

1965 年 8 月第 1 版 1965 年 8 月北京第 1 次印刷

目 录

(第三分册)

第一章 曲面与空间曲线坐标	249
1. 第三卷 § 1 至 § 4 的练习题	249
曲面的解析表达式, 切平面, 弧长元素, 曲面的法线, 面积元素, 空间的曲线坐标, 体积元素.	
第二章 空间曲线积分, 二重积分与多重积分	267
2. 第三卷 § 5 与 § 6 的练习题	267
曲线积分, 势的概念.	
3. 第三卷 § 7 至 § 11 的练习题	280
二重积分, 曲面块的面积, 三重积分与多重积分.	
4. 第三卷 § 12 至 § 14 的练习题	288
引进新变量变换重积分, 曲线、平面块及物体的形心, 惯性矩, 液体 通过孔口的流量以及其他应用.	
5. 第三卷 § 15 与 § 16 的练习题	306
曲线积分、二重积分与三重积分之间的关系, 斯托克斯、高斯与格林 积分定理.	
第三章 微分方程	309
6. 第三卷 § 17 至 § 19 的练习题	309
能导出简单微分方程的一些物理及工程上的重要问题.	
7. 第三卷 § 20 与 § 21 的练习题	315
一阶微分方程, 初等积分方法.	
8. 第三卷 § 22 至 § 24 的练习题	329
积分曲线的作图, 逐次逼近法, 图解积分法与数值积分法, 奇解, 克莱洛与拉格朗日微分方程, 近似微分方程, 用幂级数来积分, 积 分曲线在不定点的邻域内的性态.	
9. 第三卷 § 25 至 § 28 的练习题	340
新变量的引入, 一阶微分方程组, 高阶微分方程, 线性微分方程, 常数变更法, 尤拉微分方程.	
10. 第三卷 § 29 与 § 30 的练习题	354
其他的积分方法, 一些偏微分方程.	

第一章 曲面与空间曲线坐标

1. 第三卷 §1 至 §4 的练习题

曲面的解析表达式. 切平面. 弧长元素. 曲面的法线. 面积元素. 空间的曲线坐标. 体积元素.

1. 试求通过点 $(0, 0, 0)$, $(3, 0, 0)$, $(2, 2, 0)$, $(1, 1, 3)$ 的球面的方程.

解: 中心的坐标 a, b, c 与球半径 R 由四个方程来决定, 它们是通过给定的坐标代入方程

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

而得到的, 解这四个方程就得

$$a = \frac{3}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{7}{6}, \quad R = \frac{\sqrt{139}}{6}.$$

2. 有三个球, 半径都是 $\rho=2$, 它们的中心的位置矢量是 $m_1 = \{-4, -5, 1\}$, $m_2 = \{4, -5, 7\}$, $m_3 = \{-1, 7, -3\}$. 试求把这三个球夹在中间的二切平面的方程.

解: 这两个切平面与通过三个球心的平面相平行. 所以这平面的法向量

$$A = (m_2 - m_1) \times (m_3 - m_1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 0 & 6 \\ 3 & 12 & -4 \end{vmatrix} = -72i + 50j + 96k$$

也就是所求平面的法向量. $r_0 = m_1 \pm \rho A^0$ 是该二平面上一点的位置矢量. 于是所求两平面的方程是

$$Ar = Ar_0 = Am_1 \pm \rho(AA^0) = Am_1 \pm \rho|A|.$$

结果是: $-72x + 50y + 96z = 394$, $-72x + 50y + 96z = -126$.

3. 有两个球 K_1 与 K_2 , 半径各为 $a_1=8$, $a_2=5$, 中心的位置矢

量各为 $r_1 = \{2, 7, -9\}$, $r_2 = \{6, 4, 3\}$, 它们在点 P 处相切. 试求 a) P 的位置矢量 R , b) 在 P 处公共切平面的方程.

解: a) 因为距离 $a = |r_2 - r_1| = |\{4, -3, 12\}| = 13$ 被 P 分成比值 $a_1 : a_2 = 8 : 5$, 所以 P 的位置矢量是

$$\begin{aligned} \overline{OP} = R &= r_1 + \frac{a_1}{a}(r_2 - r_1) = r_2 + \frac{a_2}{a}(r_1 - r_2) = \left\{2 + \frac{32}{13}, 7 - \frac{24}{13}, -9 + \frac{96}{13}\right\} \\ &= \left\{6 - \frac{20}{13}, 4 + \frac{15}{13}, 3 - \frac{60}{13}\right\} = \left\{\frac{58}{13}, \frac{67}{13}, -\frac{21}{13}\right\}. \end{aligned}$$

b) 公共切平面的法矢量是 $N = r_2 - r_1$, 所以它的方程是 $Nr = NR$ 或 $4x - 3y + 12z = -17$.

4. 一中心为 $P = (5, -5, 3)$ 而半径为 $a = 5$ 的球与平面 $9x - 6y - 2z = 25$ 相截得一圆, 试求该圆的中心与半径.

解: 平面方程的海塞法式是

$$\frac{1}{11}(9x - 6y - 2z) - \frac{25}{11} = \left\{\frac{9}{11}, -\frac{6}{11}, -\frac{2}{11}\right\}r - \frac{25}{11} = 0.$$

因为它与点 P 的距离是 $\frac{44}{11} = 4 (< a)$, 所以它与球面相交, 截圆的中心的位置矢量为

$$m = \{5, -5, 3\} + \frac{\lambda}{11}\{9, -6, -2\};$$

因为它在截平面上, 故 m 满足平面方程, 我们得到

$$\frac{1}{11}\{9, -6, -2\} \cdot \{5, -5, 3\} + \frac{1}{11^2}\lambda\{9, -6, -2\}^2 - \frac{25}{11} = 0,$$

或 $\frac{69}{11} + \lambda - \frac{25}{11} = 0$, 所以 $\lambda = -4$. 截圆的半径为 $\rho = \sqrt{25 - 16} = 3$.

$$\begin{aligned} \text{结果是: } m &= \left(5 - \frac{36}{11}\right)i + \left(-5 + \frac{24}{11}\right)j + \left(3 + \frac{8}{11}\right)k \\ &= \frac{1}{11}(19i - 31j + 41k). \end{aligned}$$

5. 试把直线 $x = a, z = 0$ 从点 $(0, 0, 2)$ 投影到球面 $(r - k)^2 = 1$ 上.

解: 如果 $r_1 = \{a, \eta, 0\}$ 是直线上一点的位置矢量, 又 $r_0 = \{0, 0, 2\}$, 那末投影线的方程是

$$r = r_0 + \lambda(r_1 - r_0) = \{\lambda a, \lambda \eta, 2 + \lambda(-2)\},$$

利用球的方程就得到交点要满足关系式

$$(\lambda a)^2 + (\lambda \eta)^2 + (1 - 2\lambda)^2 = 1,$$

从而 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{4}{4 + a^2 + \eta^2}$; 所

以投影线与球面相交于点 $(0, 0,$

2) 及 $(\frac{4a}{4 + a^2 + \eta^2}, \frac{4\eta}{4 + a^2 + \eta^2},$

$\frac{2(a^2 + \eta^2)}{4 + a^2 + \eta^2})$.

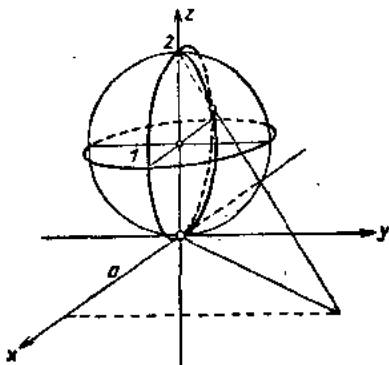


图 1

由图 1 可见, 所给直线在球面上的投影位于平面 $2x + az = 2a$ 上, 这是一个圆(球极投影).

6. 设正圆锥的轴的单位矢量为 A 而顶角为 2α , 问它的方程为何?

解: 如果把原点置于圆锥的顶点处, 从一条轴截线(图 2)来看, 就得到方程

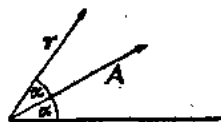


图 2

$$rA = |r| \cos \alpha; \quad A_x x + A_y y + A_z z = r \cos \alpha;$$

$$(A_x x + A_y y + A_z z)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \cos^2 \alpha.$$

7. 试求两个正圆锥的交线, 这两个正圆锥分别以 x 轴及 y 轴为轴, 顶角为 2α 及 2β , 且顶点都在原点.

解: 因为两个圆锥的方程分别是 $r_i = r \cos \alpha$ 及 $r_j = r \cos \beta$, 所以交线的矢量方程为

$$r = \{r \cos \alpha, r \cos \beta, \pm r \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}\} = \\ = r \{\cos \alpha, \cos \beta, \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}\}.$$

因为 r 有两个固定的方向, 交线是两条对称于 xy 平面、通过原点的直线. 只有当 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \leq 1$, 或 $\cos^2 \alpha \leq \sin^2 \beta$, 交线才是实的, 所以必须有 $\alpha + \beta \geq \frac{1}{2}\pi$.

8. 在以点 $M = (8, -1, 3)$ 为中心、半径为 $a = 9$ 的球面上, 有一点 $P = (2, -7, 0)$; 它是顶角为 60° 、轴通过点 M 的圆锥的顶点.

試決定球面与圓錐的交線所在的平面方程。

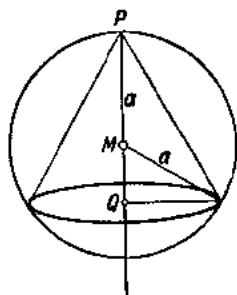


图 3

解：矢量 $\overline{PM} = \mathbf{A} = \{6, 6, 3\}$ 是所求平面的法
 矢量，如果 r_0 是平面上一点的位置矢量，那末平面
 方程是 $\mathbf{Ar} = \mathbf{Ar}_0$ 。圆锥的轴穿过平面的点 Q 就是这
 样的一个点。我們有(图 3, 其中 $a = |\mathbf{A}|$)

$$\begin{aligned} r_0 = \overline{OQ} &= \overline{OP} + \overline{PM} + \overline{MQ} = \overline{OP} + \mathbf{A} + \mathbf{A} \cos 60^\circ = \\ &= \overline{OP} + \frac{3}{2} \mathbf{A} = \{11, 2, 4.5\}. \end{aligned}$$

所以 $\mathbf{Ar} = 91.5$.

结果是:

$$6x + 6y + 3z = 91.5.$$

9. 試計算摆綫 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ 繞 x 軸旋轉
 而成的旋轉体介于平面 $x=0$ 与 $x=x(t)$ 之間的体积。

解： $V = \pi \int_0^x y^2 dx = \pi a^3 \int_0^t (1 - \cos t)^2 dt$. 应用余弦的二倍角及三倍角公式，

就有

$$\begin{aligned} V &= \pi a^3 \int_0^t \left(1 - 3\cos t + \frac{3}{2}(1 + \cos 2t) - \frac{1}{4}(\cos 3t + 3\cos t) \right) dt = \\ &= \pi a^3 \left(\frac{5}{2}t - \frac{15}{4}\sin t + \frac{3}{4}\sin 2t - \frac{1}{12}\sin 3t \right) = \\ &= \pi a^3 \left(\frac{5}{2}t - 4\sin t + \frac{3}{2}\sin t \cos t + \frac{1}{3}\sin^3 t \right). \end{aligned}$$

10. 有一玻璃杯，它是由曲綫 $y = \sinh x$ 繞正 y 軸旋轉而成
 的。在杯中注入液体，使液面升高到 1 吋为止。試計算液体的体
 积。

$$\begin{aligned} \text{解：} \quad V &= \pi \int_{y=0}^1 x^2 dy = \pi \int_{x=0}^{\text{ar sinh } 1} x^2 \cosh x dx = \\ &= \pi \left[x^2 \sinh x - 2x \cosh x + 2 \sinh x \right]_0^{\text{ar sinh } 1} = \\ &= \pi \left((\text{ar sinh } 1)^2 - 2\sqrt{2} \text{ar sinh } 1 + 2 \right) = 0.879. \end{aligned}$$

11. 把拋物綫 $y^2 = 2px$ 繞離 y 軸距離為 a 的平行直綫 z 旋轉. 問旋轉面的方程如何, 又問介於高度為 z_1 與 z_2 而垂直於旋轉軸的兩平面之間的旋轉體體積是多少(圖 4)?

解: 旋轉曲面的方程是 $(a - \frac{z^2}{2p})^2 = r^2$,

$$V = \pi \int_{z_1}^{z_2} r^2 dz = \frac{\pi}{20p^2} (z_2^5 - z_1^5) - \frac{\pi a}{3p} (z_2^3 - z_1^3) +$$

$$+ \pi a^2 (z_2 - z_1).$$

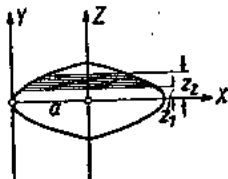


圖 4

12. 試計算延伸至無窮遠的紡錘形的體積, 它是由曲綫 $y = xe^{-x}$ ($x > 0$) 繞 x 軸旋轉得到的.

解:

$$V = \pi \int_0^{\infty} x^2 e^{-2x} dx = \pi \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a x^2 e^{-2x} dx = \pi \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \left(a^2 + a + \frac{1}{2} \right) \right) + \frac{\pi}{4}$$

(分部積分).

$$\text{因為 } \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a^2 + a + \frac{1}{2}}{e^{2a}} = 0, \text{ 故 } V = \frac{\pi}{4}.$$

13. 把阿基米德螺綫 $r = a\varphi$ 繞它的軸 $\varphi = 0$ 旋轉一周, 試建立所得旋轉曲面的方程 (參閱第 25, 26 頁第 7 題)①.

解: 由圖 5, 得到 $z = r \cos \varphi$,
 $u = r \sin \varphi$; 又 $x = u \cos \theta$, $y = u \sin \theta$,
 所以 $x = a\varphi \sin \varphi \cos \theta$, $y = a\varphi \sin \varphi \sin \theta$,

$z = a\varphi \cos \varphi$; 因為 $u = \sqrt{x^2 + y^2} = z \operatorname{tg} \varphi$ 及 $u^2 + z^2 = r^2 = a^2 \varphi^2$, 就得

$$\sqrt{x^2 + y^2} = z \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{a} \right).$$

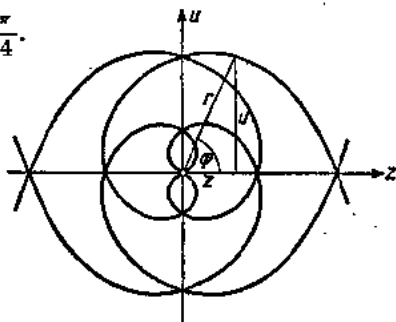


圖 5

14. 有一正弦曲綫, 它通過原點, 週期為 h 且振幅為 a , 把它

① 本分冊內括號里所指的是本書第三卷中譯本的頁碼及題次——譯者。

繞它的长軸(即 x 軸)旋轉一周, 这长軸同时也是螺距为 h 的螺旋曲面的軸. 問这样得出的交綫如何? 它的弧长是多少?

解: 由正弦曲綫所得旋轉曲面的方程是 $x=r \cos \varphi$, $y=r \sin \varphi$, $z=r \sin \frac{2\pi}{h} z$. 螺旋曲面的方程是: $x=r \cos \varphi$, $y=r \sin \varphi$, $z=\frac{h\varphi}{2\pi}$. 所以交綫的方程是($2\varphi=t$):

$$r = \frac{1}{2} a \sin t i + \frac{1}{2} a (1 - \cos t) j + \frac{ht}{4\pi} k.$$

弧长是
$$s = \int_{t=0}^{4\pi} \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{16\pi^2}} dt = \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}.$$

15. 試求錐面的方程, 它的导綫是 $x=a \sinh t$, $y=a \cosh t$, $z=0$, 頂点是 $(0, 0, h)$. 提示: 錐面上一点的位置矢量 $r(u, v)$ 是由两个矢量合成的, 一个是导綫上一点 P 的位置矢量 \overline{OP} , 另一个矢量的方向是从 P 指向錐面的頂点 S .

解: $\overline{OP} = a \sinh u i + a \cosh u j$; $\overline{PS} = -a \sinh u i - a \cosh u j + h k$.

所以 $r(u, v) = \overline{OP} + v \overline{PS} = a \sinh u \cdot (1-v) i + a \cosh u \cdot (1-v) j + v h k$.

16. 試求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与橢圓柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b^2 \leq a^2)$

的交綫的弧长.

解: a) 由这两个方程消去 x , 就得到交綫是球面上的两个大圓, 它們在平面 $z = \pm \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} \cdot y$ 上. 所以其周长为 $2 \cdot 2\pi a$.

b) 如果把橢圓柱面的方程表作 $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$, 那末由球面方程得到 $z = \sqrt{a^2 - b^2} \sin \varphi$, 又 $ds = a d\varphi$, 所以對於 $\frac{z}{y} > 0$ 或者 $\frac{z}{y} < 0$ 都有

$$s = \int_0^{2\pi} a d\varphi = 2\pi a. \text{ 結果是: } 4\pi a.$$

17. 試決定曲面 $x^2 + y^2 - z = 0$ 与 $4xy - z = 0$ 的交綫(平面曲綫) 介于 $z=0$ 与 $z=2$ 之間的弧长. 提示: 把 z 作为参数, 并計

$$\text{算 } s = \int_0^2 \frac{ds}{dz} dz.$$

解: 由曲面方程作加法及减法得到

$$(x+y)^2 = \frac{3}{2}z, \quad (x-y)^2 = \frac{z}{2};$$

所以有
$$x = \sqrt{z} \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \quad y = \sqrt{z} \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$$

及
$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1} dz = \sqrt{1 + \frac{1}{4z}} dz.$$

作置換 $4z = \sinh^2 t$, 就得到

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \int_0^2 \cosh^2 t dt = \frac{1}{4} \left[\operatorname{arsinh} 2\sqrt{z} + \sqrt{4z(1+4z)} \right]_0^2 = \\ &= \frac{1}{4} (\operatorname{arsinh} 2\sqrt{2} + 6\sqrt{2}) = 2.56. \end{aligned}$$

附言: 因为 $\frac{y}{x} = 2 - \sqrt{3} = \text{常数}$, 交线是平面曲线, 这交线是旋轉抛物面 $x^2 + y^2 - z = 0$ 的軸截线.

18. 試决定螺旋面(螺距为 h)与圆柱面(半徑为 a)的交线, 而螺旋面的軸在圆柱面上.

解: 螺旋面的方程是 $z = \frac{h}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, 圆柱面的方程是 $(x-a)^2 + y^2 = a^2$.

令 $x-a = a \cos t$, 那末就有 $y = a \sin t$, $z = \frac{h}{4\pi} t$; 交线是一螺旋线(它的螺距等于所給螺旋面螺距的一半).

19. 試計算下列交线的弧长: a) 抛物柱面 $y^2 = 2px$ 与双曲抛物面 $xy = 3pz$, b) 抛物柱面 $4ay = x^2$ 与双曲抛物面 $x^2 = \frac{16}{9}xy$.

解: a) 由 $x = \frac{y^2}{2p}$, $z = \frac{y^2}{6p^2}$, 得到

$$s = \int_0^y \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1} dy = y + s.$$

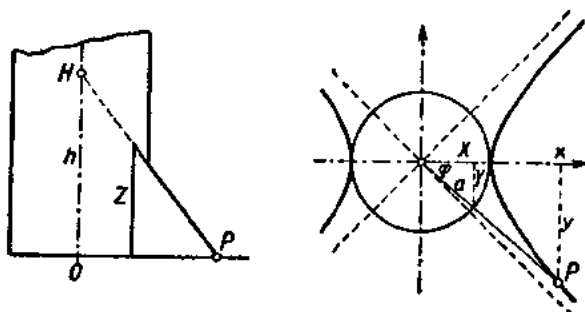


图 6

b) 由 $y = \frac{x^2}{4a}$, $z^2 = \frac{4x^3}{9a}$, 相应地有 $s = x + y$.

20. 把等轴双曲线 $x = a \cosh t$, $y = a \sinh t$ 从点 $(0, 0, h)$ 投影到圆柱面 $X = a \cos \varphi$, $Y = a \sin \varphi$. 试决定投影曲线的位置矢量, 于此我们把 t 当作参数.

解: 由图 6 得到比例关系

$$Z : h = (\sqrt{a^2 \cosh^2 t + a^2 \sinh^2 t} - a) : (\sqrt{a^2 \cosh^2 t + a^2 \sinh^2 t}),$$

所以有

$$Z = h \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 \cosh^2 t + a^2 \sinh^2 t}} \right) = h \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\cosh 2t}} \right).$$

又因为

$$y : x = Y : X,$$

所以

$$\operatorname{tgh} t = \operatorname{tg} \varphi.$$

于是由 $\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$ 有

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tgh}^2 t}} = \frac{\cosh t}{\sqrt{\cosh 2t}} \quad \text{及} \quad \sin \varphi = \frac{\sinh t}{\sqrt{\cosh 2t}}.$$

我們得到

$$X = a \frac{\cosh t}{\sqrt{\cosh 2t}}, \quad Y = a \frac{\sinh t}{\sqrt{\cosh 2t}} \quad \text{及} \quad r(t) = X i + Y j + Z k.$$

21. 试证: 曲线 $r(t) = e^t \cos t i + e^t \sin t j + e^t \sqrt{3} k$ 在一以 z 轴为轴的圆锥面上, 再决定这圆锥的顶角 α .

解: $x^2 + y^2 = e^{2t}$, $z^2 = 3e^{2t}$, 所以 $x^2 + y^2 = \frac{1}{3} z^2$;

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{z^2}} = \sqrt{\frac{1}{3}}; \quad \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

22. 問曲綫 $r = t^2 \cos(t^2) i + t^2 \sin(t^2) j + \frac{2\sqrt{2}}{3} t^3 k$ 在什麼旋轉曲面上? 試決定這曲面的子午綫。

解: $x^2 + y^2 = t^4$, $z = \frac{2\sqrt{2}}{3} t^3$. 曲面方程是

$$(x^2 + y^2)^3 = \frac{81}{64} z^4.$$

當 $x=0$ 時 $y^2 = \frac{81}{64} z^4$. 子午綫 $3z = (2y)^{3/2}$ 是一條半立方拋物綫。

23. 一半徑為 a 的圓柱面上有一螺旋綫, 當圓柱面展成平面時, 它成為一拋物綫。試求這螺旋綫的方程。

解: 拋物綫上一點的橫坐標對應於圓柱底圓的弧長 $a\varphi$, 縱坐標等子螺旋綫的高 z .

$$z = c(a\varphi)^2, \quad r(\varphi) = \{a \cos \varphi, a \sin \varphi, ca^2 \varphi^2\}.$$

24. 問雙曲拋物面 $az = xy$ 在點 (b, c, z_0) 處的切平面方程如何?

解: $z_0 = \frac{bc}{a}$; $a(z - z_0) = c(x - b) + b(y - c)$ 或 $cx + by - az = bc$.

25. 問螺旋面 $r = u \cos v i + u \sin v j + cv k$ 上任意一點處的切平面方程如何? 這平面與原點的距離是多少?

解: 曲面的單位法綫向量記作 N , $R = \{\xi, \eta, \zeta\}$ 表示切平面上一點的位置向量, 那末切平面的方程是 $N(R - r) = 0$ (參閱 § 2(10)). 現在

$$N = (r_u r_v)^0 = (\{\cos v, \sin v, 0\} \times \{-u \sin v, u \cos v, c\})^0 =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & c \end{vmatrix}^0 = \frac{c \sin v i - c \cos v j + uk}{\sqrt{c^2 + u^2}},$$

所以切平面的方程是

$$c \sin v \xi - c \cos v \eta + u \zeta = cuv.$$

平面与原点的距离是 $\frac{cuv}{\sqrt{c^2+u^2}}$.

26. 試討論正劈錐面 $r = u \cos v i + u \sin v j + \varphi(v)k$. 問切平面与原点的距离是多少? 并证: a) 若 $\varphi(v) = cv$, 就得到通常的螺旋曲面, b) 若 $\varphi(v) = \sin 2v$, 就得到普虑克劈錐面(第一卷 §18.3), (參閱第 24 頁第 1, 2, 3 題.)

解: 由于当 $v = \text{常数}$ 时 $z = \varphi(v) = \text{常数}$ 及 $\frac{y}{x} = \tan v = \text{常数}$, u 曲线是与 z 轴垂直相交的直线. 由于 $x^2 + y^2 = u^2$, z 是任意的, v 曲线 ($u = \text{常数}$) 是圆柱上的圆. 由

$$r_u = \{\cos v, \sin v, 0\}, \quad r_v = \{-u \sin v, u \cos v, \varphi'(v)\},$$

$$E = r_u^2 = 1, \quad F = r_u r_v = 0, \quad G = r_v^2 = \varphi'(v)^2 + u^2,$$

就有 $ds^2 = du^2 + (\varphi'(v)^2 + u^2)dv^2$.

面积元素为 $do = \sqrt{\varphi'(v)^2 + u^2} du dv$.

曲面的法线矢量为

$$N = \frac{r_u \times r_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\varphi'(v) \sin v i - \varphi'(v) \cos v j + uk}{\sqrt{\varphi'(v)^2 + u^2}}.$$

切平面方程的海塞法式是

$$\frac{(x - u \cos v) \sin v \varphi'(v) - (y - u \sin v) \cos v \varphi'(v) + (z - \varphi(v))u}{\sqrt{\varphi'(v)^2 + u^2}} = 0.$$

它离原点的距离是 $l_0 = \frac{u\varphi(v)}{\sqrt{\varphi'(v)^2 + u^2}}$

a) 当 $\varphi(v) = cv$, 就有 $x = u \cos v, y = u \sin v, z = cv$, 所以 $z = \text{csc } v \tan v$;

b) 当 $\varphi(v) = \sin 2v$, 就有 $x = u \cos v, y = u \sin v, z = \sin 2v$. 所以

$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ (普虑克劈錐面).

27. 把悬链线 $y = c \cosh \frac{x}{c}$ 绕 x 轴旋转一周就得到一个曲面,

叫做悬链面. 把子午线的弧长当作 u , 把地理经度记作 v , 试证这时弧长元素与螺旋面 (§ 3.8) 的弧长元素是相等的. (參閱第 25 頁第 5 題.)

解: 先不取 u 而取緯圆的半徑 ρ 作为参数; 于是按 §3.7 有

$$y = \rho \cos v, \quad z = \rho \sin v,$$

又因为 $\rho = c \cosh \frac{x}{c}$, 故 $x = c \operatorname{ar} \cosh \frac{\rho}{c}$.

$$\begin{aligned} r &= c \operatorname{ar} \cosh \frac{\rho}{c} i + \rho \cos v j + \rho \sin v k, \\ r_\rho &= \left\{ \frac{c}{\sqrt{\rho^2 - c^2}}, \cos v, \sin v \right\}, \\ r_v &= \{0, -\rho \sin v, \rho \cos v\}, \\ E &= \frac{\rho^2}{\rho^2 - c^2}, \quad F = 0, \quad G = \rho^2, \quad \text{及} \\ ds^2 &= \frac{\rho^2}{\rho^2 - c^2} d\rho^2 + \rho^2 dv^2. \end{aligned}$$

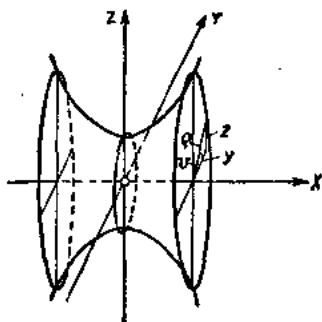


图 7

所以对于子午綫 $v = \text{常数}$, 我們得到它的弧长

$$u = \int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - c^2}} = \sqrt{\rho^2 - c^2} + \text{常数}.$$

因此 $ds^2 = du^2 + (u^2 + c^2)dv^2$ 与螺旋曲面 (§3.8) 的弧长元素的平方一致. 两个曲面叫做可以相互贴合的, 如果适当选取参数后, 它們的弧长元素可以写成同一形式, 因而它們的点就可以这样地相互对应起来, 使得相应的曲线段有相同的弧长. 悬鏈面与螺旋面因而是可以相互贴合的.

28. 把悬鏈綫 $y = \cosh x$ a) 繞 x 軸, b) 繞 y 軸旋轉一周. 試決定这两个旋轉曲面的弧长元素与面积元素.

解: a) 曲面的方程是

$$\begin{aligned} r(u, v) &= \{u, \cosh u \cos v, \cosh u \sin v\}; \\ r_u &= \{1, \sinh u \cos v, \sinh u \sin v\}, \quad r_v = \{0, -\cosh u \sin v, \cosh u \cos v\}; \\ E &= \cosh^2 u = G, \quad F = 0; \\ ds^2 &= \cosh^2 u (du^2 + dv^2), \quad d\omega = \cosh^2 u du dv. \end{aligned}$$

b) 曲面的方程是

$$\begin{aligned} r(u, v) &= \{\operatorname{ar} \cosh u \cos v, u, \operatorname{ar} \cosh u \sin v\}; \\ r_u &= \left\{ \frac{\cos v}{\sqrt{u^2 - 1}}, 1, \frac{\sin v}{\sqrt{u^2 - 1}} \right\}, \quad r_v = \{-\operatorname{ar} \cosh u \sin v, 0, \operatorname{ar} \cosh u \cos v\}; \\ E &= \frac{u^2}{u^2 - 1}, \quad F = 0, \quad G = (\operatorname{ar} \cosh u)^2; \end{aligned}$$

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2, \quad ds = \frac{uar \cosh u}{\sqrt{u^2 - 1}} du dv.$$

29. 試在曲面 $r(u, v) = \{a(1-v) \sinh u, a(1-v) \cosh u, vh\}$ 上决定一点 (u_0, v_0) , 使得在这点处, 曲面的法綫通过原点. 提示: 如果 A 是某一个在点 (u_0, v_0) 处与曲面垂直的矢量, 那末可以决定这样的 t , 使得

$$r(u_0, v_0) + tA(u_0, v_0) = 0. \quad (*)$$

解: 由关系式

$$A = r_u \times r_v = a \{h(1-v) \sinh u, -h(1-v) \cosh u, -a(1-v)\}$$

及方程 (*) 得到关于三个分量的方程

$$\begin{aligned} a(1-v_0)(1+th) \sinh u_0 &= 0, & a(1-v_0)(1-th) \cosh u_0 &= 0, \\ v_0 h - ta^2(1-v_0) &= 0, \end{aligned}$$

从而, 因为 v_0 必须不等于 1, 得 $t = \frac{1}{h}$, $u_0 = 0$, $v_0 = \frac{a^2}{a^2 + h^2}$. 所以所求的点是

$$r(u_0, v_0) = a \frac{h^2}{a^2 + h^2} j + h \frac{a^2}{a^2 + h^2} k.$$

它与原点的距离是

$$s = t |A| = |r(u_0, v_0)| = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

30. 螺旋面

$$r(u, v) = \{u \cos v, u \sin v, cv\}$$

在点 $u_0 = 2c, v_0 = 0$ 处的法綫与这螺旋面还于无穷多个别的点处相交. 試决定离这出发点最近的点 (u_1, v_1) .

解: 由关系式 $r(u_0, v_0) + \lambda N(u_0, v_0) = r(u_1, v_1)$, 又因为 $r_u = \{\cos v, \sin v, 0\}$, $r_v = \{-u \sin v, u \cos v, c\}$ 及 $N \parallel r_u \times r_v = \{c \sin v, -c \cos v, u\}$, 所以在点 $u_0 = 2c, v_0 = 0$ 处成立等式: $2c = u_1 \cos v_1, -\lambda c = u_1 \sin v_1, 2\lambda c = cv_1$;

由此得到 $\operatorname{tg} v_1 = -\frac{\lambda}{2} = -\frac{v_1}{4}$. 这方程有无穷多个解; 每一解对应法綫与曲面的一个交点. 离 (u_0, v_0) 最近的交点对应最小的解 v_1 . 把 v_1 看作是曲线 $y = \operatorname{tg} v_1$ 与 $y = -\frac{1}{4}v_1$ 的交点的横坐标, 于是用图解法得到 $v_1 = \pm 2.570$, 所

以

$$\lambda = \pm 1.285, \quad u_1 = \frac{2c}{\cos v_1} = -2.38c,$$

$$r(u_1, v_1) = 2ci - (\pm 1.285c)j \pm 2.570ck.$$

31. 問 $r = \varphi(u, v) \cos vi + \varphi(u, v) \sin vj + cvk$ 表示什么曲面? 試确定 $\varphi(u, v)$, 使得曲面上坐标网 (u, v) 的网角都等于一常数. (參閱第 26 頁第 8 題.)

解: 因为 $x^2 + y^2 = (\varphi(u, v))^2$, $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} v$, 所以 $z = c \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, 曲面是通常的螺旋曲面;

$$r_u = \{\varphi_u \cos v, \varphi_u \sin v, 0\}, \quad r_v = \{\varphi_v \cos v - \varphi \sin v, \varphi_v \sin v + \varphi \cos v, c\}.$$

因为 $E = \varphi_u^2$, $F = \varphi_u \varphi_v$, $G = \varphi_v^2 + \varphi^2 + c^2$, 按 § 2.3, (5a), 就有

$$\cos \alpha = \frac{\varphi_v}{\sqrt{\varphi_v^2 + \varphi^2 + c^2}}.$$

要使这式子等于常数, 那末作为是 v 的函数 φ 必須由微分方程 $\varphi_v^2 = c \operatorname{tg}^2 \alpha (\varphi^2 + c^2)$ 来决定.

分离变量并对 v 作积分, 得到

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + c^2}} = v c \operatorname{tg} \alpha + f(u),$$

其中 $f(u)$ 是 u 的任意函数, 在这里把它当作是积分常数. 按第二卷 § 3(6), 这积分是 $\operatorname{arsinh} \frac{\varphi}{c}$, 所以得出

$$\varphi = c \sinh(v c \operatorname{tg} \alpha + f(u)).$$

特别地这对情形 $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ 也是适用的, 于此 $\varphi = c \sinh(f(u))$ 变成 u 的一个任意函数.

32. 試证: 曲面

$$r(u, v) = \{a(\cos u - v \sin u), a(\sin u + v \cos u), c(u + v)\}$$

是通常的螺旋綫的切綫曲面, 就是說, 它是由这螺旋綫的切綫所构成; 并再算出它的弧长元素与面积元素.

解: 螺旋綫的方程是

$$r(u) = \{a \cos u, a \sin u, cu\},$$