东北师范大学函授講义

# 初等几何学

## （平面）

遼寧人民出版社

東北師範大學函授講義

# 初 等 幾 何 學

## （平 面）

東北師範大學函授教育處編

馬 忠 林 編 譯

孫 福 元 校 閱

遼 寧 人 民 出 版 社

1956年·瀋陽

**初等几何学(平面)**

东北师范大学函授教育处編

馬 忠 林 編 譯

孙 福 元 校 閱

☆

遼寧人民出版社出版（沈陽市軍署街23号）

沈陽市書刊出版業営業許可証文出字第1号

沈陽新華印刷廠印刷　新華書店沈陽發行所發行

---

850×1168耗 1/32・7½印張・219,000字　印数：50,050—75,059

1955年9月第1版　1956年9月第3次印刷

統一書号：7090・13

---

定价（6）0.72元

## 編譯者的話

這本"初等幾何學(平面)"原是東北師範大學數學函授專修班的函授講義．它是根據法國數學家哈達瑪（J. Hadamard）的原著"初等幾何學"、蘇聯別里標爾金(Д. Перепёлкин)教授的俄譯本(1948年版)編譯的．

原書在蘇聯被批准爲高等師範學校數理系學生和中學數學教師的主要參考書．在我國已列入師範學院和師範專科學校數學系(科)初等數學"平面幾何"複習及研究課的參考書．該著作（原著），是具有現代科學水平的初等幾何學教材．我們考慮到函授生的實際水平與工作上的需要，所以採用它作爲寫講義的藍本．我們相信：在我國它也將是師範學院及師專數學系(科)學生和中學數學教師的重要參考書．

我們所以採用它作爲講義的藍本，主要是因爲它具有下列特點：首先這本書系統地闡述了初等幾何學(平面)各部分的主要內容，不僅具有邏輯的嚴謹性，而且具有精確的闡釋與論斷．其次，它附有系統的大量的習題，能供讀者鑽研和複習之用．最後，它是針對具有中學程度平面幾何學知識的人而編寫的．

在編譯工作中，原書的主要內容並未作大的變動，只是由於教學時間的限制並考慮到函授生的實際需要，將原書中的附錄A, B, C, D, E五個專題刪去．另外，爲了符合我國數學用語的習慣，在名詞和文字的敍述上作了一些變動．爲了照顧教學上的需要，將原書及其俄譯本中的某些註釋也有省略的地方．爲了讀者自學時參考，我們把所有習題的解答也全部譯出(將繼續出版)．

在目前我們的函授教學工作沒有經驗，主講者的水平和時間都是有限的情況下，我們認爲編譯這本書，還是適宜的．但作爲今後改進教學的方向來說，還是很不够的．因爲原著者的意圖也不是作爲函授教材而寫的，因此，我們應積累經驗，不斷地改編教材，以改進我們的函授教學工作．

本講義在我校函授敎育處第一次出版後，曾蒙函授生、函授敎師、東北各敎師進修學院的數學敎師及東北師大數學系的同志們，提出了很多寶貴意見，使得這本講義減少了很多缺點，函授敎師武雲翔同志譯出全部的習題解答，謹向這些同志表示感謝．

東北師大數學系孫福元同志仔細地校閱了講義原稿，對這本講義的完成實費力不小．函授敎育處的同志們對這本講義的完成給了有力的支持與幫助，也一併表示感謝．

最後，由於編譯者的俄文水平和數學知識的限制，在講義的內容上和文字的叙述上，難免還有不當甚至錯誤的地方，請讀者多加批評與指敎．

**馬忠林** 於東北師大 1955.4.1

# 目 錄

# 引　言

§ 1.　各方面都有限界的空間的一部分，叫做**體**.

空間裏相鄰的兩個區域的公共部分，叫做**面**．一張紙能給我們面的近似觀念．實際上，它是在它兩側的兩個區域的界限．但是，嚴格的說，一張紙並不是面：因爲紙有厚度，這兩個區域是被它所佔的中間區域隔開的．如果所觀察的紙的厚度無限縮小，那麼我們就將得到面的概念．

面上相鄰兩個區域的公共部分，叫做**綫**．顯然，這個定義與下面的定義是同等的：**兩個面的交是綫**.

我們所引的綫，它可以給與我們幾何綫的觀念，但這並不是綫的正確觀念．因爲它無論怎樣細，總是有寬度的，但是幾何綫並沒有寬度.

最後，一條綫上相鄰兩部分的共有處，或者說，相遇的兩條綫的交，叫做**點**．點並沒有大小.

點、綫、面和體的任意集合，叫做**圖形**.

§ 1$a$．每條綫含有無限多個點.

綫也可以看作是點移動的痕跡．當我們用鉛筆或鋼筆尖在紙上引綫時，就是這種情況（當綫十分細的時候，所得的點就近似幾何點）．完全同樣地，可以將面看作是由綫的移動而形成的.

某個點所佔有的無限多個位置的集合所形成的圖形，一般地是綫或面，把它叫做**點的軌跡**.

完全同樣地，我們可以將面看作是綫移動的軌跡.

§ 2.　幾何學研究圖形的性質和它們之間的相互關係．並且將所研究的結果，作成**命題**的形式.

命題由兩部分組成：第一部分，叫做**假設**，是所有的條件的全體；第二部分，叫做**終結**，是根據假設必然得出的事實.

像下面的命題：“**如果兩個量$A$和$B$，都等於第三個量$C$時，則這兩**

**個量相等**”，假設是命題的前一部分：**量** $A$ 和 $B$ **都等於** $C$；終結是後一部分：**這兩個量** $A$ **和** $B$ **相等**.

命題中有這樣的命題，就是我們不加證明而採用的，這樣的命題叫做**公理**. 譬如“兩個量都等於第三個量時，則這兩個量相等”，就是公理. 所有其他被我們叫做**定理**的命題，必須利用個別的推理加以證明. 爲了作出這種推理，必須根據定理的假設，且承認定理的假設已得到滿足，從而推出定理的終結所指出的事實.

根據這個，我們應該設想，有下面的某一種情況成立：

1） 如果它是假設的一部分；

2） 如果它是所說元素之一的定義的一部分；

3） 如果它可以從公理推出；

4） 如果它可以從前面的證明之一推出.

因此，在幾何的推理中，除根據以上四個原因之一以外，任何其他情形都不應當看作是正確的.

§ 2*a*. 將一個命題的終結的全部或一部分作爲假設，並將它的假設作爲終結，這樣作成的新命題，叫做已知命題的**逆命題**.

直接由定理推得的命題，叫做**系**(推論).

反之，爲了便於後面命題的證明，預先引進的命題，叫做**補助定理**.

§ 3. 每個圖形都可以用無限多個方法使它在空間裏移動，正像鋼體移動那樣，並不改變它的形狀. **如果一個圖形移動可以與另一個圖形的各部分都完全重合時，則這兩個圖形叫做相等圖形**. 換句話說，**兩個相等圖形就是位於不同位置的同一個圖形**.

經過移動並不變形的圖形，叫做**不變的**圖形.

§ 4. 綫中最簡單的是**直綫**；用力拉直的一條綫，就給與我們這樣的觀念. 直綫的概念是自明的. 爲了在我們的推理裏能利用這個概念，我們應把直綫看作是由它的顯然性，特別是由下面的兩個性質定義的：

1. **與直綫相等的每個圖形，都是直綫；反之，每條無限直綫可以與另一條無限直綫重合，並且可使第一條直綫上的任意一點與第二條直綫上的一點重合**.

2. **通過兩點能引直綫，並且只能引一條**.

因此，我們可以說，通過兩點 $A$ 和 $B$ 的直綫(或者簡單地說：直綫 $A$

$B$).

從定義直接可以推出，**兩條不同的直線只能交於一點**，因為假如它們有兩個公共點時，就不可能是不同的直線了.

由一些直線的部分所組成的綫，叫做**折綫**. 既不是直綫又不是折綫的綫，叫做**曲綫**.

§ 5. 一條直綫上在兩個點$A$和$B$之間的那一部分，叫做**綫段$AB$**.

如果直綫的一部分，它的一方沒有限界，另一方以一個點為限界，這樣的直綫的一部分，叫做**半直綫**. 根據前面所說的，則任意兩條半直綫，都是相等的圖形.

如果將兩個綫段$AB$和$A'B'$中的第一個放在第二個上，並且使點$A$與$A'$重合，點$B$與點$B'$相重合時，則說綫段$AB$等於綫段$A'B'$.

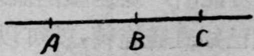


圖 1

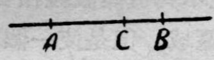


圖 2

根據作為直綫定義的兩個命題，則有上面條件的兩個綫段的所有點都重合. 所以相等綫段的定義，和上面所說的相等圖形的一般定義是一致的.

使兩個相等的綫段$AB$和$A'B'$重合，實際上有兩種不同的方法. 也就是：點$A$與點$A'$相重，點$B$與點$B'$相重. 或者反過來. 這也就是說，可以轉動綫段$AB$使兩點$A$，$B$中的一個到另一個的位置.

如果兩個綫段$AB$和$BC$位於一條直綫上，並且其中的一個是另一個的延長綫（圖 1），則綫段$AC$叫做這兩個綫段的**和**. 因此，兩個或若干個綫段的和與相加[1]各綫段的順序是沒有關係的.

為了比較兩個綫段的大小，可把它們移到一條直綫上. 使它們是從同一的點引出，並且方向相同，例如$AB$和$AC$（圖 1 和圖 2）. 這時如果點的順序是$A$，$B$，$C$（圖 1）時，則綫段$AC$等於綫段$AB$與$BC$的和，在這種情形下，我們說$AC$**大於**$AB$，而$AB$**小於**$AC$；反過來，如果點的順序是$A$，$C$，$B$（圖 2）時，則綫段$AB$大於$AC$. 在這兩種情形下，綫段$BC$

---

1） 對於兩個綫段，由前段直接即可得出.

加上另兩個已知綫段中的一個就得出第二個綫段，我們把綫段$BC$叫做另兩個綫段的**差**．最後，點$B$和$C$有時可能重合．在這種情形下，我們知道這兩個綫段是相等的．

在每個綫段$AB$上，必存在一個點$M$，距兩點$A$和$B$等遠，叫做$AB$的**中點**．直綫上在$M$和$A$之間的每個點，顯然，它較近於$A$，而距$B$較遠．反之，在點$M$和$B$之間的所有點，恰與上面的情形相反．

一般說，綫段$AB$還可以分成任意個相等的部分[1]．

§ 6. 有一個沒有限界的面，如果這個面上的任意兩個點所連結的直綫，完全在面上時，這個面叫做**平面**．

**過空間的任意三個點，我們可以引一個平面**．平面上的任意直綫，將它分成兩個區域，各在直綫一側的區域，叫做**半平面**．如果不超出平面以外，並且不與這條直綫相交，就不可能引一條連續的直綫從一個區域到另一個區域．但是使一個區域繞已知直綫旋轉，就可以與另一個區域重合．

我們首先來研究平面上的圖形．所要研究的圖形，是平面幾何學的對象．

§ 7. 平面上[2]到已知點$O$有一定距離的點的軌跡，叫做**圓周**[3]（圖 3）；已知點叫做**圓心**．

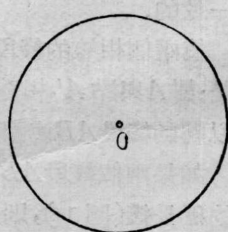


圖 3

連結圓心與圓周上一個點的綫段，叫做**半徑**．因此圓周的所有半徑都相等．

根據上面的定義，我們要證明平面上的點是在這個平面上的一個圓周上時，只要證得它到圓心的距離等於半徑就可以了。

每個圓周都把它所在的平面，分成兩個區

---

1）我們注意，綫段$AB$上存在着將這個綫段分成等份的點．至於是否可以用器械實際地作出這些點的問題，以後再來研究它．

2）在平面上到平面外的已知點有等距離的點的軌跡（這樣的點存在的時候）是一個圓周，這個問題，在立體幾何學裏可以得到證明．在空間裏到已知點有等距離的點的軌跡，是球面．

3）爲了敍述簡明，並考慮到我國在幾何名詞使用上的習慣，今後在不致發生誤解的地方，把圓周寫作圓．

域：一個叫做**外部**，是沒有界的，它是由到圓心的距離大於半徑的所有點構成；另一個叫做**內部**，是有界的，它是由到圓心的距離小於半徑的所有點構成．後面這個區域叫做**圓**．

很明顯，當已知圓所在的平面，圓心和半徑，則它完全可以確定．

圓常用表示它圓心的字母來表示（當不致誤解時），或者用表示它的半徑的兩個字母來表示；這時應把表示圓心的字母放在前面．因此，圖 4 裏的圓，可以用《圓$O$》，或者用《圓$OM$》（如果研究一些以$O$爲圓心的圓時）來表示．

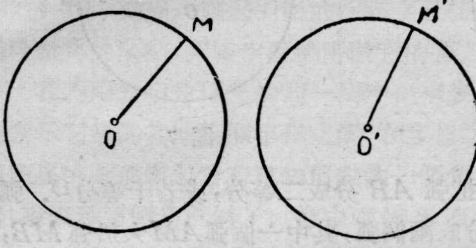


圖 4

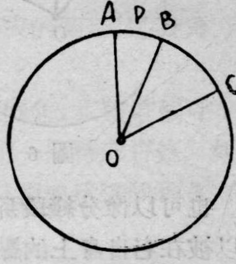


圖 5

**半徑相等的兩個圓是相等的圖形**；很明顯，當它們的圓心相重合時，它們就重合．

兩個相等的圓，可以用**無限多的方法**，使其中的一個與另一個重合：並且當重合時，可以使第二個圓上的一點$M'$與第一個圓上的已知點$M$重合（圖 4）．爲了達到這個目的，只要使兩個半徑$OM$和$O'M'$重合就可以了，但這是可能的，因爲這兩個綫段相等．

§ 8. 圓周的一部分，叫做**弧**（圖 5 裏的$ApB$）．

由於兩個相等圓周可以用無限多個方法重合，因此，像**比較綫段那樣**，我們也可以比較**同一圓周或相等圓周上的**兩個**弧**．爲了達到這個目的，可移動這兩個弧，使它們有同一圓心和一個公共端點，並且在這個公共端點的同一側．設$AB$和$AC$是在這樣位置的兩個弧，我們沿弧$AB$[1] 移動點$A$，如果在遇到點$B$以前先遇到點 $C$ 時（圖 6），我們就說，

---

1） 這裏規定移動方向是很重要的（若是直綫時，就不需要），因爲點$A$和$B$把圓周分成兩部分，由於我們沿着二弧中的一個弧或另一個弧移動點$A$時，所遇到點$B$和$C$的順序不同．

弧$AB$大於弧$AC$. 反過來，如果點的順序是$A,B,C$(圖 5)，我們就說，弧$AB$小於弧$AC$.

§ 8a. 完全同樣地，我們可以定義同一個圓(或兩個相等圓)上的兩個弧$AB$與$BC$的和(圖 5)，這只要使這兩個弧有一個端點相重合，而它們另外的端點，在這個公共端點的兩側就夠了.

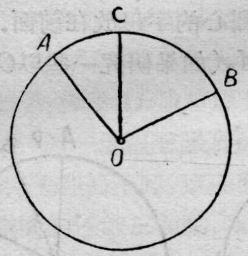


圖 6

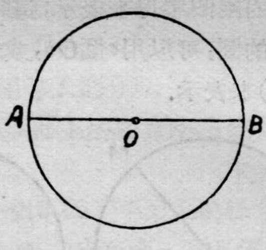


圖 7

也可以像分綫段那樣，把弧 $AB$ 分成二等分，或若干等分[1)]. 弧也可以被在它自身上的點$M$分成兩個弧，其中一個弧$AM$大於弧$MB$，或者是弧$AM$小於弧$MB$.

§ 9. 連結圓周上兩個點的綫段，通過圓心時，則這個綫段叫做**直徑**. 這兩個點叫做**直徑的端點**(圖 7 裏的點$A$和$B$). 顯然，直徑的長度等於半徑的二倍.

很明顯，圓被它的直徑，完全確定. 這時，它的圓心是直徑的中點.

直徑 $AB$ 把圓周分成兩個弧. 它們分別在直綫 $AB$ 所確定的兩個半平面上.

這兩個弧，彼此相等：將上述的兩個半平面之一摺疊在另一個上(根據 § 6)它們就重合. 因此我們把這兩個弧都叫做**半圓周**.

完全同樣地，直徑把圓分成兩部分，當兩個半圓周互相重合時，它們也互相重合.

---

1) 像前面對於綫段的作法(§ 5，第4頁註1))，予以同樣的注意就可以了.

# 第一編 直 綫

## 第一章 角

§ 10. 從同一個點引出的兩條半直綫所構成的圖形，叫做**角**．這個點叫做角的**頂點**，兩條半直綫叫做它的**邊**．

我們用表示角頂點的同一個字母來表示這個角，並將這個字母寫在表示它邊的其他兩個字母之間；在字母之前用一個特殊符號．如果，問題裏的圖形僅包含有已知頂點的一個角，則只用表示這個頂點的字母，來表示這個角就够了．像由兩條半直綫 $AB$，$AC$ 所構成的角（圖 8），我們就用 $\angle BAC$ 或簡單地用 $\angle A$ 來表示它．

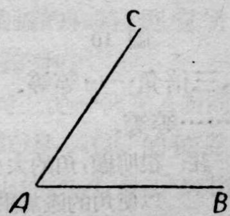

圖 8

按照相等圖形的定義（根據 § 3），如果兩個角中的一個可以重合到另一個上，這兩個角就叫做**相等的角**．

相等的兩個角 $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$，可以用兩種不同的方法，將其一重合在另一角上，也就是：或者是使邊 $A'B'$ 與邊 $AB$ 重合，邊 $A'C'$ 與邊 $AC$ 重合，或者是反過來．一個方法可以變爲另一個，只要將一個角實行翻轉，使它與它自身重合就可以，例如，翻轉角 $BAC$，使邊 $AB$ 落在它的另一邊 $AC$ 上，或者反過來．

§ 11. 如果兩個角有公共頂點，與一條公共邊，並且它們各在這條公共邊的異側，則這兩個角叫做**鄰角**．

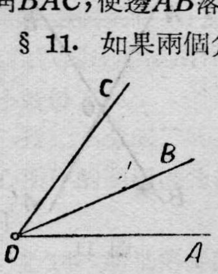

圖 9

如果兩個角 $\angle AOB$ 和 $\angle BOC$ 是鄰角（圖 9），則角 $AOC$ 叫做這兩個角的**和**．一些個角的和，與相加的角的順序是沒有關係的．

爲了比較兩個角的大小，可以移動它們，使其有公共頂點，與一條公共邊，並且使它們

都在公共邊的同側.

設已知兩個角 $\angle AOB$ 和 $\angle AOC$ 的位置是這樣的：即如果圍繞着頂點$O$旋轉，遇到它們邊的順序是$OA$，$OB$，$OC$（圖 9），則角$AOC$等於角$AOB$與$BOC$的和；在這種情形下，我們說角$AOC$大於角$AOB$，而角$AOB$小於角$AOC$；反之（圖10），如果邊的順序是：$OA$，$OC$，$OB$，則角$AOB$大於角$AOC$. 把角$BOC$加到兩個已知角的一個上，就得到另一個已知角，所以角$BOC$是這兩個角的差.

最後，在$OB$與$OC$重合的情形下，兩個角相等（參考前一段）.

在每個角$BAC$的內部，存在一條半直綫$AM$，它把這個角分成兩個相等的部分. 我們把它叫做這個角的**平分綫**. 從點$A$引出並且在角$BAM$內部的半直綫和$AB$所構成的角都小於它和$AC$所構成的角.

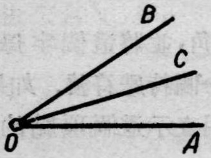

圖 10

如果一個角等於已知角的兩個、三個……等等的和，則這個角，叫做已知角的二倍角、三倍角……等等. 後面的這個角，叫做第一個角的**二分角、三分角**……等等.

註：很明顯，角的大小與它的邊的大小是沒有關係的. 所以我們總可以使角的邊無限地延長.

§ 12. 如果我們有由兩條半直綫$OA$和$OB$所構成的角（圖11），從點$O$把$OA$延長到$A'$，再從點$O$把$OB$延長到$B'$，這樣就構成一個新的角$A'OB'$.

在兩個角 $\angle AOB$，$\angle A'OB'$ 之間，一個角的邊是另一個角的邊的延長綫，把這兩個角叫做**對頂角**.

**定理. 兩個對頂角相等.**

**證明.** 實際上，如果把角$BOA'$翻轉，使它落在它自身上（圖11），邊$OB$就落在$OA'$的位置，另一方面，邊$OA'$落在邊$OB$的原來位置；則半直綫$OA'$的延長綫$OA$，落在$OB$的延長綫$OB'$的位置. 角$AOB$就重合於原來的角$A'OB'$上；所以這兩個角相等.

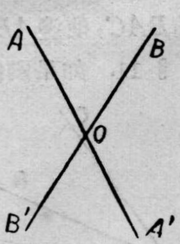

圖 11

§ 13. 自圓心所引出的每條半直綫，與圓周相交於一個點，並且只是一個點.

頂點爲圓心$O$的每個角$AOB$(圖 5)(圓心角)，確定一個弧$AB$，它以圓周與這個角兩邊的交點爲端點. 這個弧在任何情形下都小於半圓周，如果取點$A$與過點$A$的直徑他端作爲半圓周的端點來看，這個問題就可以得到了說明.

反之，小於半圓周的每個弧，可以看作是由一個圓心角確定的；這個角是過已知弧端點的兩個半徑所構成的.

**定理. 於同圓或等圓中：**

**1) 相等的弧(小於半圓周)所對應的圓心角也相等，反過來也成立.**

**2) 不等的弧(小於半圓周)所對應的圓心角也不等，並且較大的弧所對應的角也大.**

**3) 如果某個弧(小於半圓周的)是其他兩個弧的和時，則它所對應的圓心角也是其他兩個弧所對應的兩個圓心角的和.**

**證明.** 1°，2°. 設$AB$，$AC$(圖 5)是同一圓周上從一個點$A$向同一方向所引出的兩個弧(根據 § 8)，兩個圓心角$AOB$，$AOC$的位置像 § 11所說的那樣，半直綫$OA$，$OB$，$OC$與在圓周上的點$A$，$B$，$C$有相同的順序. 此外，如果直綫$OB$和$OC$重合，則點$B$和$C$也相重合，反過來也成立.

3°. 因爲要作兩個弧的和(§ 18$a$)，我們就把這兩個弧放置像弧$AB$，$BC$那樣的位置(圖 5)，則兩個弧的和所對應的圓心角$AOC$等於相鄰的兩個圓心角$\angle AOB$與$\angle BOC$的和.

在這個基礎上，要比較不同的角的大小，只要用它們的頂點作爲圓心，在以同一半徑所作的圓周上，來比較這兩個角在圓周上所截取弧的大小就够了.

要把角分成二等分或若干等分時，我們可以把用該角的頂點作爲圓心所作的圓周被角的兩邊所截取的弧分成二等分或若干等分，就可以了.

§ 14. 如果兩條直綫所構成的四個角中，相鄰的兩個角，彼此相等時，我們就說這兩條直綫**互相垂直**. 例如，在圖裏用記號 1 和 2 所表示

的角（圖12）彼此相等時，則直綫$AOA'$垂直於直綫$BOB'$．在這種情形下，以點$O$爲頂點的四個角都彼此相等，因此$\angle 3$和$\angle 4$分別等於$\angle 1$和$\angle 2$，因爲它們是對頂角．

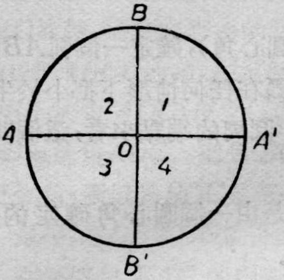


圖 12

兩條邊互相垂直的角，叫做**直角**．

**定理．在已知平面上，過直綫上的已知點，可引這條直綫的垂綫，並且只能引一條．**

**證明．** 設要過點$O$引已知直綫的垂綫，則可以點$O$爲圓心作一圓周，它與已知直綫相交於兩點$A$和$A'$（圖12），再以點$B$將半圓周$ABA'$分爲二等分．$OB$就是所求的垂綫；反之，過點$O$垂直於$AA'$的直綫，也一定把半圓周$ABA'$分成二等分．

**系．** 我們可以看出，**頂點是圓心的直角，它的邊在圓周上所截取的弧等於圓周的四分之一．**

**所有的直角都相等．** 因爲以直角的頂點爲圓心作相等的圓周，被它們所截取的弧都相等．

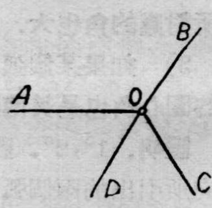


圖 13

§ 15. **如果通過已知點，引若干條半直綫，則它們圍繞着這個點所構成一連串的角**（$\angle AOB$，$\angle BOC$，$\angle COD$，$\angle DOA$，圖13）**的和，等於四直角．**

實際上，這些角在已知點$O$爲圓心的圓周上，所截取的弧的和等於整個圓周．

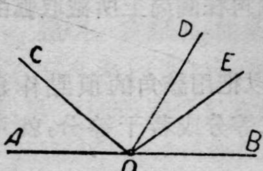


圖 14

如果**過直綫上的一個點，在這條直綫的同側引若干條半直綫**（圖14）**時，則它們所構成的角的和等於兩直角．** 因爲這些角所截取的弧的和等於半圓周．

反之，如果有兩個或若干個有公共頂點的角．其中每一個都與前一個相鄰（$\angle AOC$，$\angle COD$，$\angle DOE$，$\angle EOB$，圖14），並且這些