

本书是按照全国工科函授数学研究组讨论制定的“全国工科函授《工程数学》教学基本要求”(初稿)编写的。全书分上、下两册。上册包括“线性代数”及“数理方程”，下册包括“概率统计”及“复变函数”。

本书为下册，其中概率统计包括：随机事件与概率、随机变量及其概率分布与数学特征，大数定律和中心极限定理，数理统计的基本概念，参数估计、假设检验等；复变函数包括：复变函数的基本概念、解析函数、保角映射、复变函数的积分、级数、留数等。

全书内容考虑了自学和函授的特点，编写时尽量将内容安排得由浅入深，循序渐进。对较难理解的问题作了详细的阐述，并增加较多的例题，以便自学，每章后均有内容小结和复习思考题，分阶段有测验作业题；书后还附有习题及复习思考题答案等，可供读者参考。

本书可供高等工科院校工业与民用建筑及其他各类成人教育专业作为工程数学课程自学、函授教材，也可供全日制工科大学生或工程技术人员作为参考书。

高等工科院校自学函授教材

工 程 数 学

下 册

概率统计与复变函数

同济大学函授数学教研室

蔡杰儿 潘承毅 郭景德 编

中国建筑工业出版社出版、发行(北京西郊百万庄)

新华书店经销

中国建筑工业出版社印刷厂印刷(北京阜外南礼士路)

开本：787×1092毫米 1/16 印张：23 字数：560 千字

1991年6月第一版 1991年6月第一次印刷

印数：1—3,700册 定价14.05元

ISBN7—112—01093—4/TU·794

(6165)

目 录

前 言

第三篇 概 率 统 计

第十章 随机事件与概率	3
第一节 随机试验和随机现象	3
第二节 随机事件	4
一、样本空间	4
二、随机事件	4
三、事件之间的关系及运算	5
第三节 概率与频率	8
一、古典型概率	8
二、几何型概率	11
三、频率与概率的统计定义	13
第四节 概率的定义及性质	14
第五节 条件概率	16
一、条件概率	16
二、全概率公式	18
三、贝叶斯公式	20
第六节 独立性与二项概率公式	21
一、独立性	21
二、二项概率公式	23
习题十一	26
内容摘要	28
复习思考题十一	31
测验作业题七	32
第十二章 随机变量及其概率分布	33
第一节 随机变量	33
第二节 离散型随机变量的概率分布	34
第三节 随机变量的分布函数	38
第四节 连续型随机变量及其分布密度	40
第五节 随机变量的函数的分布	48
一、离散型随机变量的函数的分布律	49
二、连续型随机变量的函数的分布	49
习题十二	51
内容摘要	53
复习思考题十二	56

第十三章 二维随机变量及其概率分布	57
第一节 二维随机变量及其分布	57
一、二维离散型随机变量及其分布律	58
二、二维连续型随机变量及其分布密度	59
第二节 边缘分布	60
一、离散型的边缘分布律	61
二、连续型的边缘分布密度	62
第三节 随机变量的独立性	64
第四节 二维随机变量的函数的分布	67
一、离散型随机变量的函数的分布	67
二、连续型随机变量的函数的分布	68
习题十三	75
内容摘要	76
复习思考题十三	79
测验作业题八	79
第十四章 随机变量的数字特征	81
第一节 数学期望	81
一、数学期望的概念	81
二、随机变量的函数的数学期望	83
三、数学期望的性质	86
第二节 方差	87
一、方差的概念	87
二、方差的性质	89
第三节 协方差和相关系数	91
一、协方差	91
二、相关系数	93
习题十四	96
内容摘要	98
复习思考题十四	100
第十五章 大数定律和中心极限定理	101
第一节 大数定律	101
第二节 中心极限定理	105
习题十五	107
内容摘要	107
复习思考题十五	108
测验作业题九	109
第十六章 数理统计的基本概念	110
第一节 总体与样本	110
第二节 经验分布函数与直方图	112
第三节 χ^2 分布, t 分布及 F 分布	115
一、 χ^2 分布	115
二、 t 分布	117

三、 F 分布	118
第四节 统计量及其分布	119
习题十六	123
内容摘要	124
复习思考题十六	125
第十七章 参数估计	126
第一节 参数估计问题	126
第二节 矩法与极大似然法	127
一、矩法	127
二、极大似然法	128
第三节 估计量的评选标准	133
一、无偏性	133
二、一致性	134
第四节 正态总体中均值与方差的置信区间	135
一、一个正态总体的情形	136
二、两个正态总体的情形	140
第五节* $0-1$ 分布参数的置信区间	142
习题十七	143
内容摘要	144
复习思考题十七	148
第十八章 假设检验	149
第一节 假设检验问题	149
第二节 一个正态总体的假设检验	151
第三节 两个正态总体的假设检验	154
第四节* 单边假设检验	156
第五节* χ^2 拟合优度检验	160
习题十八	163
内容摘要	164
复习思考题十八	167
测验作业题十	168

第四篇 复 变 函 数

第十九章 复数	173
第一节 复数和它的表示方法	173
一、复数的概念及其几何表示	173
二、复数的三角和指数表示式	175
第二节 复数的运算	176
一、复数的四则运算	176
二、复数的乘幂和方根	178
三、共轭复数	180
第三节 复平面上的曲线方程	181
习题十九	183

内容摘要	183
复习思考题十九	185
第二十章 复变函数	186
第一节 复变函数的概念	186
一、区域的概念	186
二、复变函数的定义	188
第二节 复变函数的极限和连续性	189
一、复变函数的极限	189
二、复变函数的连续性	192
第三节 初等函数	193
一、指数函数 e^z	193
二、对数函数 $\text{Ln}z$	194
三、幂函数 z^α	197
四、三角函数和反三角函数	199
五、双曲函数和反双曲函数	201
习题二十	202
内容摘要	202
复习思考题二十	204
第二十一章 解析函数	205
第一节 复变函数的导数和解析函数	205
一、复变函数的导数	205
二、解析函数的概念	208
第二节 解析函数的充要条件	209
一、函数在区域内解析的充要条件	209
二、某些初等函数的解析性和求导公式	214
第三节 解析函数和调和函数的关系	215
第四节 导数的模和幅角的几何意义	218
习题二十一	220
内容摘要	221
复习思考题二十一	223
测验作业题十一	223
第二十二章 初等函数构成的保角映射	225
第一节 保角映射	225
一、保角映射的定义	225
二、几类简单的保角映射	225
第二节 分式线性映射	230
一、分式线性映射的保角性	230
二、保圆性和保对称性	230
三、映射区域的确定方法	233
四、唯一确定分式线性映射的条件	235
五、两个基本分式线性映射	237
第三节 幂函数和指数函数所构成的映射	240

一、幂函数 $w = z^n$ 和 $w = \sqrt[n]{z}$	240
二、指数函数 $w = e^z$	244
三、综合举例	247
习题二十二	252
内容摘要	253
复习思考题二十二	254
第二十三章 复变函数的积分	256
第一节 复变函数积分的概念与计算	256
一、积分的定义和性质	256
二、积分的计算方法	257
第二节 积分基本定理及其推广	261
一、柯西—古萨 (Cauchy—Coursat) 定理	261
二、解析函数积分的计算方法	262
三、复合闭路定理	266
第三节 柯西积分公式及高阶导数公式	269
一、柯西积分公式	269
二、解析函数的高阶导数	273
习题二十三	276
内容摘要	277
复习思考题二十三	279
测验作业题十二	280
第二十四章 级数	282
第一节 复数项级数	282
一、级数的概念	282
二、级数收敛的充要条件	283
第二节 幂级数	285
一、幂级数的收敛圆与收敛半径	285
二、收敛半径的求法	286
三、幂级数的运算和性质	289
第三节 函数展开成幂级数	290
一、解析函数的泰勒 (Taylor) 级数	290
二、函数展开成幂级数的方法	293
第四节 罗伦 (Laurent) 级数	295
一、罗伦级数	295
二、函数展开成罗伦级数	296
习题二十四	303
内容摘要	303
复习思考题二十四	305
第二十五章 留数及其应用	307
第一节 孤立奇点及其分类	307
一、零点与孤立奇点	307
二、可去奇点	308

三、极点	310
四、本性奇点	312
第二节 留数和留数定理	313
第三节 留数在计算实积分上的应用	317
一、 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$ 型积分	317
二、 $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta)d\theta$ 型积分	319
三、 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}dx$ 型积分	323
习题二十五	325
内容摘要	326
复习思考题二十五	328
测验作业题十三	329
附录 I 集合初步	330
附录 II 计数方法	334
附表 I 标准正态分布	339
附表 II 泊松分布	340
附表 III χ^2 分布的分位数 $\chi^2_p(n)$ 表	341
附表 IV t 分布的分位数 $t_p(n)$ 表	342
附表 V F 分布的分位数 $F_p(m, n)$ 表	343
习题答案	346

第 三 篇

概 率 统 计

摘 要

“概率论与数理统计”是从数量上研究随机现象规律(即统计规律性)的一门数学学科。随着现代科学技术的迅速发展,这门数学学科不仅已形成了较完整的数学理论,而且在自然科学、工程技术与经济管理的各个领域里都有着愈来愈广泛的应用。本篇作为工科专业(本科)“工程数学——概率论与数理统计”课程的函授、自学教材,只着重于讲解一些基本的理论和方法,并不拘泥于严密的数学证明。

本篇共分两大部分:第一部分(第十一章至第十五章)主要介绍“概率论”的一些基本知识,内容包括随机事件与概率,随机变量及其分布,多维随机变量及其分布,随机变量的数字特征,以及大数定律和中心极限定理;第二部分(第十六章至第十八章)主要介绍“数理统计”的一些基本思想和方法,内容包括数理统计的基本概念,参数估计与假设检验。前后两部分的内容是互相渗透、互相联系的。

本篇是根据函授、自学教材的要求和特点而编写的,内容安排上由浅入深,重点突出,难点适当分散;文字叙述上通俗易懂,便于自学,凡是学过“微积分”的读者,均能顺利地自学本教材。通过本篇内容的学习,读者不仅可以把所学内容直接应用到某些工农业生产和科学研究的具体工作中去,而且为今后进一步深入学习“概率统计”知识打下良好的基础。

第十一章 随机事件与概率

在自然界和社会上大量存在着一类不确定性的现象，即在试验或观察前无法确切地预知试验或观察的结果。这类现象在个别试验中呈现不确定性，但在大量重复试验中，又是有一定的统计规律性，我们称这一类现象为随机现象。概率论正是研究随机现象的统计规律性的一个数学分支。

本章主要引进概率论中一些最基本的概念。

第一节 随机试验和随机现象

自然界和人们的社会活动中经常会出现各种各样的现象，人们对于各种现象的认识，主要来自人们实践。我们把实践活动中的行为概括为试验。具体地说：凡是对现象的观察或为此进行的实验都称之为试验。任何试验都应包括两个方面：试验条件和试验结果。根据因果关系，试验大体上可以分为两类。其中一类，试验条件确定唯一的试验结果，这样的试验称为确定性试验。例如，在标准大气压下，把纯水加热到 100°C ，结果水一定沸腾；同性电荷一定排斥；用手向上抛一物体，该物体不可能成为地球卫星，等等。总之，对确定性试验而言一旦试验条件确定，我们就可以预言确切的结果。确定性试验中呈现出来的现象称为确定性现象。自然科学揭示确定性现象产生的条件和规律，而人们根据这种规律来预测各种确定性的现象。

本课程研究的是另一类试验，就是所谓随机试验。我们先考察一些实例（以下用字母 E 表示试验）。

E_1 ：抛掷一枚硬币，并观察出现的面。试验可能出现两种不同的结果，即正面（记为 H ）和反面（记为 T ）。但是究竟出现哪种结果，在抛掷之前是无法确切预言的。

E_2 ：抛掷一颗骰子，并观察出现的点数。试验可能出现六种不同的结果：1、2、3、4、5、6，但究竟出现哪种结果，在抛掷之前是无法确切预言的。

E_3 ：记录某交换机上午8:00~9:00接到的电话呼叫次数，出现的结果可能是非负整数中的任意一个数，但事先（即试验前）无法预知究竟是哪一个非负整数。

E_4 ：从一大批同类型的灯泡中抽取一只，测试它的寿命（即能正常工作的小时数），出现的结果可能是非负实数中的任意一个数。但事先（即试验前）无法预知究竟是哪一个非负实数。

试验 E_k （ $k = 1, 2, 3, 4$ ）就是随机试验的典型例子，这类试验的共同特点是：在一定条件下，试验的可能结果不止一个，并且在试验之前不能预知哪个结果会出现。我们把这种特性称为试验的随机性。随机试验呈现出来的现象称为随机现象。以后我们提到的试验都是指随机试验，并且限于研究在相同条件下可以重复进行的随机试验（ $E_k, k = 1, 2, 3, 4$ 就是这样的例子）。

尽管在个别试验中出现什么结果带有随机性，但是在相同条件下大量重复试验中它的结果却呈现出某种规律性。例如，在 E_1 中，多次重复地抛掷一枚硬币出现正面大致有半数；在 E_2 中，多次重复抛掷一颗骰子，得到点数5的次数大致占1/6；同样，电话的呼叫次数、灯泡的寿命，它们的取值在多次重复试验中也存在各自的一定规律。这种在大量重复试验中所呈现出的固有规律性，就是我们以后所说的统计规律性。

概率论和数理统计是研究随机现象的统计规律性的数学学科。概率论的特点是先提出数学模型，然后研究它们的性质、特点和规律性；数理统计则是以概率论的理论为基础，利用对随机现象的观测所取得的数据资料来研究数学模型，并进行推断和预测。

目前，概率论的理论与方法已广泛应用于工业、农业、军事、管理以及科学技术的各个领域。

第二节 随 机 事 件

从本节开始，我们将逐步引进概率论的基本概念。样本空间和随机事件是最基本的两个概念。

一、样本空间

如前所述，在一次试验中，会出现怎样一个试验结果是无法预言的，但所有可能出现的结果通常是能够知道的。我们将试验 E 的一个结果称为试验 E 的一个样本点，用 e 表示。将试验 E 的所有可能结果（即样本点的全体）构成的集合称为试验 E 的样本空间，记为 S 。

下面写出了上一节中试验 $E_k (k=1, 2, 3, 4)$ 的样本空间 S_k ：

$$E_1: S_1 = \{H, T\};$$

$$E_2: S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$

$$E_3: S_3 = \{0, 1, 2, \dots\};$$

$$E_4: S_4 = \{t | t \geq 0\}, \text{ 或简写成 } S_4 = \{t \geq 0\}.$$

下面一个例子说明样本空间的元素（即样本点）是由试验内容确定的。

【例 11-1】某袋中装有4只白球和2只红球，并对球进行编号，4只白球分别编为1, 2, 3, 4号，2只红球编为5, 6号。今从袋中摸出一只。如果试验内容是观察球的颜色，则样本空间为 $S' = \{\text{白}, \text{红}\}$ 。如果试验内容是记录球的号数，则样本空间为 $S'' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。

另外需要指出的是，象上一节中试验 E_3 ，呼叫次数实际上不会超过某个足够大的正整数，但为了处理上方便，对于这类试验，数学上容许取样本空间为 S_3 ；又如上节 E_4 中的寿命，为了同样的理由，把样本空间 S_4 取为 $(0, +\infty)$ ，必要时甚至还可把样本空间扩大为 $(-\infty, +\infty)$ 。

二、随机事件

从上段可以看到，样本空间所含有的样本点可以是有限个，也可以是无限个。在每次试验中，这些样本点有一个而且只有一个出现。在实际中，一般，我们关心的不仅是某一样本点在一次试验中是否出现，而且还关心满足某些条件的样本点是否出现。例如，在上节 E_2 中，我们关心抛掷一颗骰子出现的点数是否为偶数，或即出现的点数是否属于样本

空间 S_2 的子集 $A = \{2, 4, 6\}$ 。显然, 抛掷一颗骰子, 出现的点数可能属于 A , 也可能不属于 A , 我们称 A 为试验 E_2 的一个随机事件, 当且仅当出现的点数属于 A 时, 称 A 或{出现的点数为偶数}这一随机事件出现。又如, 规定灯泡的寿命 t 大于等于500小时为正品, 那么在上节 E_4 中, 我们关心灯泡寿命是否属于样本空间 S_4 的子集 $B = \{t \geq 500\}$, 类似地, 我们称 B 为试验 E_4 的一个随机事件, 当且仅当 B 中的一个样本点出现时, 就有寿命 $t \geq 500$ (即该灯泡为正品), 或即随机事件 B 出现。

一般地, 我们称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件, 随机事件简称事件。在一次试验中, 当且仅当事件 (子集) 中的一个样本点出现时, 称这一事件出现或事件发生。通常以大写英文字母 $A, B, C, \dots$ 等表示事件; 有时也以 $\{\dots\}$ 表示事件, 大括号中指明该事件的内容或列出该事件包含的全部样本点。如前那样, 在 E_2 中事件{出现的点数为偶数}也可表示成 $\{2, 4, 6\}$ 。

下面再举一个事件的例子。

【例 11 2】 E : 在相同条件下接连进行两次射击, 观察击中目标的情况。以 $(+ -)$ 表示第一次击中目标, 且第二次未击中目标这一样本点。其它样本点可类似表示。易知, E 的样本空间为

$$S = \{((+ +), (+ -), (- +), (- -))\}$$

以下是 E 的几个事件:

$$A_1 = \{\text{第一次击中目标}\} = \{((+ +), (+ -))\};$$

$$A_2 = \{\text{恰有一次击中目标}\} = \{((+ -), (- +))\};$$

$$A_3 = \{\text{至少有一次击中目标}\} = \{((+ +), (+ -), (- +))\};$$

$$A_4 = \{\text{两次都未击中目标}\} = \{((- -))\};$$

$$A_5 = \{\text{两次都击中目标}\} = \{((+ +))\}.$$

显然, 当且仅当样本点 $(+ +), (+ -)$ 之一出现时, 事件 A_1 出现; 当样本点 $(- +)$ 出现时, 事件 A_2, A_3 都出现。

特别, 仅由一个样本点构成的事件称为试验的基本事件。例如, 在上一节中, 试验 E_1 有两个基本事件: $\{H\}$ 和 $\{T\}$; E_3 有可列个基本事件: $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots$; E_4 中有不可列个基本事件: $\{T = t\}, t \in (0, +\infty)$ 。

样本空间 S 是它自身的一个子集, 因而也是一个事件。由于每次试验中必然出现 S 的某个样本点, 即 S 是一个必然要发生的事件, 所以称 S 为必然事件。我们把不包含任何样本点的空集 $\emptyset$ 也作为一个事件, 它在每次试验中必然不发生, 所以称 $\emptyset$ 为不可能事件。例如, 在例11-2中, $\{\text{至多击中目标两次}\}$ 是必然事件, 而 $\{\text{击中三次}\}$ 是不可能事件。显然, 任何试验既有必然事件又有不可能事件。必然事件和不可能事件实际上都是确定性事件, 引入它们并把它们作为随机事件的特例来处理, 完全是为了今后研究的方便。

三、事件之间的关系及运算

事件是一个集合, 根据集合之间的关系和集合的运算就可自然地引入一个随机试验下多个事件之间的关系和运算。以下读者应着重理解这些关系和运算在概率论中的含义, 理解的基点是: 事件发生当且仅当包含在事件中的一个样本点发生。

设试验 E 的样本空间是 S , 而 $A, B, C, \dots, A_k (k = 1, 2, \dots)$ 都是 E 的事件 (或 S 的子集)。

1. 事件的包含关系 若事件 A 发生导致事件 B 发生, 则称事件 B 包含事件 A , 记作 $A \subset B$, 或 $B \supset A$, 此时 A 包含的样本点也包含于 B 中。例如, 抛掷一颗骰子, $\{\text{出现} 2 \text{ 点}\}$ 必导致 $\{\text{出现偶数点}\}$, 所以事件 $\{\text{出现偶数点}\}$ 包含 $\{\text{出现} 2 \text{ 点}\}$, 又如例11-2中, $A_2 \subset A_3$ 。

显然, 对于任何事件 A , 有 $A \subset S$; 此外, 我们规定 $\emptyset \subset A$ 。

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称事件 A 与 B 相等或等价, 记为 $A = B$ 。在集合意义上这记号在前面已经引用过。

2. 和事件 $\{\text{事件} A \text{ 与事件} B \text{ 至少有一发生}\}$ 也是一个事件, 称它为事件 A 与事件 B 的**和事件**或**并事件**, 简称**和或交**, 记为 $A \cup B$ 。 $A \cup B$ 包含的样本点由 A 的样本点和 B 的样本点合并而成。例如, A 表示缺少水泥, B 表示缺少钢筋, 则 $A \cup B$ 表示缺少水泥或缺少钢筋(也可能两者都缺少)。又如例11-2中 $A_2 \cup A_5 = A_3$ 。

类似地, 称 $\bigcup_{i=1}^n A_i \triangleq A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的**和事件**, 称 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \triangleq A_1 \cup A_2 \cup \dots$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的**和事件**。

显然, 对任何事件 A , 有 $A \cup \emptyset = A$, $A \cup S = S$, 此外, 若 $A \subset B$, 则 $A \cup B = B$ 。

3. 积事件 $\{\text{事件} A \text{ 与事件} B \text{ 同时发生}\}$ 也是一个事件, 称为事件 A 与事件 B 的**积事件**或**交事件**, 简称**积或交**, 记为 $A \cap B$, 或简记为 AB 。 $A \cap B$ 包含的样本点是 A 和 B 的公共样本点。例如, 某圆柱形产品, 当长度和直径都符合规格时才算合格, 记 $A = \{\text{长度合格}\}$, $B = \{\text{直径合格}\}$, 则 $A \cap B$ 表示 $\{\text{产品合格}\}$ 。又如, 在例11-2中, $A_1 \cap A_2 = \{(+-)\}$ 。

类似地, 称 $\bigcap_{i=1}^n A_i \triangleq A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的**积事件**; 称 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \triangleq A_1 \cap A_2 \cap \dots$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的**积事件**。

显然, 对于任何事件 A , 有 $A \cap \emptyset = \emptyset$; 此外, 若 $A \subset B$, 则 $A \cap B = A$ 。

4. 事件的互不相容关系 若事件 A 与事件 B 在一次试验中不可能同时发生, 就称事件 A 和事件 B **互不相容**(或**互斥**)。这关系记为 $AB = \emptyset$, 即事件 A 和事件 B 没有公共样本点。如果一组(有限个或可列个)事件中任意两个都互不相容, 那末称这组事件是**两两互不相容的**。例如, 抛掷一颗骰子, $\{\text{出现} 2 \text{ 点}\}$ 与 $\{\text{出现奇数点}\}$ 是互不相容的。又如, 在例11-2中, 事件 A_3 与 A_4 是互不相容的; 事件组 A_2, A_4, A_5 是两两互不相容的。

值得指出的是, 随机试验的任何一组基本事件一定是两两互不相容的。

5. 差事件 $\{\text{事件} A \text{ 发生且事件} B \text{ 不发生}\}$ 也是一个事件, 称为事件 A 与事件 B 的**差事件**, 简称**差**, 记为 $A - B$, 它是由所有包含于 A 但不包含于 B 的样本点所组成的事件。例如, 在例11-2中, $A_3 - A_2 = A_5$ 。

6. 逆事件 $\{\text{事件} A \text{ 不发生}\}$ 也是一个事件, 称为事件 A 的**逆事件**或 **A 的对立事件**, 记为 $\bar{A}$, 它是由所有不包含在 A 中的样本点所组成的事件, 即 $\bar{A} = S - A$ 。例如, 抛掷一颗骰子, 若以 A 表示 $\{\text{出现偶数点}\}$, 则 $\bar{A}$ 表示 $\{\text{出现奇数点}\}$; 又如, 在例11-2中, 事件 A_4 是 A_3 的逆事件, 即 $A_4 = \bar{A}_3$ 。显然, $\bar{\bar{A}}$ 是 A 的逆事件, 则 A 也是 $\bar{A}$ 的逆事件, 即 $\bar{\bar{A}} = A$ 。由此, 常说 A 与 $\bar{A}$ 互为逆事件或互为对立事件。必然事件与不可能事件互为逆事件。

① 记号“ $A \triangleq B$ ”表示 $A(B)$ 定义为 $B(A)$, 或 $A(B)$ 记为 $B(A)$ 。

根据事件的和与交，显然 A 、 $\bar{A}$ 还满足：

$$A \cup \bar{A} = S, \text{ 且 } A \cap \bar{A} = \emptyset$$

它的含义是事件 A 与 $\bar{A}$ 中必有一个发生，且仅有一个发生。

需要注意，与 A 互不相容的事件不一定是 A 的逆事件。例如，抛掷一颗骰子，{出现2点}与{出现奇数点}是互不相容的事件，但它们不是互逆的两个事件。

事件之间的关系及运算有时用一种称为文氏（Venn）图的图形来直观表示，如图11-1所示。图中以矩形示意样本空间 S ，事件 A 和 B 分别用两个圆示意。

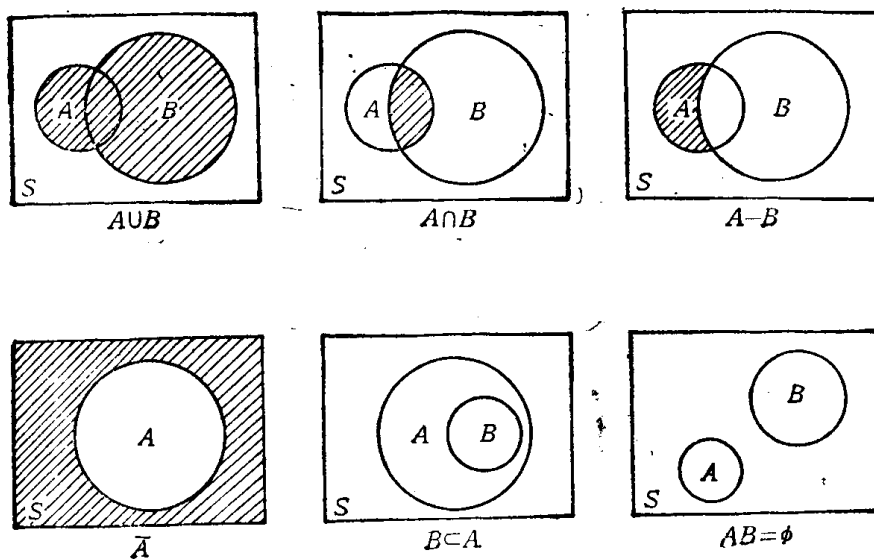


图 11-1

随机事件是样本空间的子集，把事件之间的关系及运算与集合之间的关系及运算进行比较，可以看到两者是一致的，为了便于对照，我们列出下面表格。

表 11-1

记 号	概 率 论	集 合 论
S	样本空间，必然事件	空 间
$\emptyset$	不可能事件	空 集
e	基本事件	元 素
A	事 件	子 集
$\bar{A}$	A 的逆事件	A 的余集
$A \subset B$	事件 A 出现导致事件 B 出现	A 是 B 的子集
$A = B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
$A \cup B$	事件 A 、事件 B 至少有一个出现	A 与 B 的并集
$A \cap B$	事件 A 、事件 B 同时出现	A 与 B 的交集
$A - B$	事件 A 出现而事件 B 不出现	A 与 B 的差集
$AB = \emptyset$	事件 A 和事件 B 互不相容	A 与 B 没有相同的元素

关于事件的运算有下列几个基本规律：

(1) 交换律： $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

(2) 结合律： $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(3) 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

(4) 和交关系 (德·摩根律):

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}, \quad \overline{\bigcap_{k=1}^n A_k} = \bigcup_{k=1}^n \overline{A_k}$$

即事件和之逆等于各事件逆之交; 事件交之逆等于各事件逆之和。

【例 11-3】 设 A, B, C 表示三个事件, 则事件

(1) $\{A \text{ 发生而 } B \text{ 与 } C \text{ 都不发生}\}$ 可以表示为: $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ 或 $A \overline{B} \overline{C}$;

(2) $\{\text{所有这三个事件都不发生}\}$ 可以表示为: $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ 或 $\overline{A \cup B \cup C}$;

(3) $\{\text{这三个事件恰好发生一个}\}$ 可以表示为: $A \overline{B} \overline{C} \cup \overline{A} B \overline{C} \cup \overline{A} \overline{B} C$;

(4) $\{\text{这三个事件中至少发生一个}\}$ 可以表示为: $A \cup B \cup C$ 或 $\overline{A \overline{B} \overline{C}} \cup \overline{\overline{A} B \overline{C}} \cup \overline{\overline{A} \overline{B} C}$
 $C \cup \overline{A B C} \cup \overline{A \overline{B} C} \cup \overline{\overline{A} B C} \cup \overline{\overline{A} \overline{B} C}$ 。

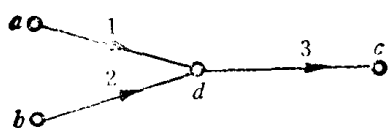


图 11-2

【例 11-4】 某城市 C 的供水系统由水源 a 和 b 以及管道①、②和③组成, 如图 11-2 所示。每一水源都足以供应城市用水。令事件

$$A_i = \{\text{管线 } i \text{ 发生故障}\}, \quad i = 1, 2, 3$$

那么, 城市断水可由 $(A_1 A_2) \cup A_3$ 表示。利用和交关系, 城市正常供水为

$$\overline{(A_1 A_2) \cup A_3} = \overline{(A_1 A_2)} \overline{A_3} = (\overline{A_1} \cup \overline{A_2}) \overline{A_3}$$

其中 $(\overline{A_1} \cup \overline{A_2})$ 表示结点 d 处有水, $\overline{A_3}$ 表示管线③工作正常。

第三节 概率与频率

在一次随机试验中, 某个具体事件 A 可能出现也可能不出现, 但它出现的可能性大小是客观存在的, 并且可以用数字来度量, 概率就是度量这种可能性大小的一个实数。我们把表示事件 A 出现的可能性大小的实数, 记为 $P(A)$, 叫做事件 A 的概率。本节介绍两种最简单的试验模型, 并给出在这些特殊场合应如何具体求出事件的概率; 接着介绍事件出现的频率以及概率的统计定义。

一、古典型概率

先对事件发生的可能性大小作一直观的考察。设在一个袋中装有 10 只球, 并分别编有号码 1, 2, ..., 10。若从袋中任取一球, 我们应怎样度量事件

$$A = \{\text{取得 5 号球}\}$$

发生的可能性大小呢? 由于在袋中任取一球时, 可能出现 10 种结果, 这些结果的出现具有相同的可能性, A 是当 10 种结果中的一个出现时才发生, 所以我们可以用 $1/10$ 或 10% 来度量 A 发生的可能性大小, 或者说成 A 的概率 $P(A) = 1/10$ 。

上面引例中考察的是具有以下特征的试验:

(1) 试验的样本空间只有有限个样本点, 记作 $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$;

(2) 各基本事件 $\{e_1\}, \{e_2\}, \dots, \{e_n\}$ 出现的可能性相等。

我们称这样的随机试验为古典型的。它是历史上首先被研究的一类随机试验模型。

例如, 抛掷一枚均匀硬币, H 和 T 出现的可能性相等; 从 52 张扑克牌中抽取一张, 各种花色出现的可能性相等, 所以它们都是古典型试验。又向靶板目标射击的试验不是古典型的, 因为样本空间含有无限多个样本点。下面引入古典型试验的事件的概率计算。

古典型概率的定义 设 E 是一古典型试验, 它的样本空间为 $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 事件 $A = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}\}$, 其中 $i_1, i_2, \dots, i_k$ 为 $1, 2, \dots, n$ 中某 k 个不同的数, 那么规定事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 中包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}} \quad (11-1)$$

依照定义可知, 抛掷一枚硬币, 出现 H 和 T 的概率都是 $1/2$, 即 $P(H) = P(T) = 1/2$ 。

【例 11-5】 设试验 E 是将一枚硬币依次抛三次, 观察 H 、 T 出现的情况。(1) 写出 E 的样本空间; (2) 设事件 $A_1 = \{\text{恰有一次出现 } H\}$, 求 $P(A_1)$; (3) 设事件 $A_2 = \{\text{至少有一次出现 } H\}$, 求 $P(A_2)$ 。

【解】 设 (HHT) 表示第一、二次出现 H , 且第三次出现 T , 这是一种可能的试验结果, 其它类推。

(1) E 的样本空间是

$$S = \{(HHH), (HHT), (HTH), (THH), (HTT), (THT), (TTH), (TTT)\}$$

此处 $n = 8$ 。由于每次出现 H 、 T 是等可能的, 所以 8 个基本事件的出现也是等可能的。

(2) $A_1 = \{(HTT), (THT), (TTH)\}$

这里 $k = 3$, 故由 (11-1) 式

$$P(A_1) = \frac{3}{8}$$

(3) $A_2 = \{(HHH), (HHT), (HTH), (THH), (HTT), (THT), (TTH)\}$

这里 $k = 7$, 故由 (11-1) 式

$$P(A_2) = \frac{7}{8}$$

【例 11-6】 一盒晶体管共 100 只, 其中有 5 只次品, 从盒中任取一只^①, 求取得正品的概率。

【解】 从盒中任取一只, 从试验可知, 是正品还是次品, 两者可能性并不一样, 亦即对于样本空间 $S' = \{\text{正品}, \text{次品}\}$ 而言, 这不是古典型试验。但是从盒中取到这只或那只晶体管的可能性是相同的。于是设想给晶体管进行编号, 譬如, 5 只次品依次编上 1, 2, 3, 4, 5 号; 正品依次编上 6, 7, ..., 100 号。这样, 从盒中取得一个编号就是一个基本事件, 样本空间 $S = \{1, 2, \dots, 100\}$ 中包含的基本事件数为 $n = 100$, 而取得正品就是 $A = \{6, 7, \dots, 100\}$ 出现, A 中包含的基本事件数为 $k = 95$, 所以, 取得正品的概率为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{95}{100} = 0.95$$

^① 此处“任取”的含义是, 取到这只或那只, 机会是均等的。下同

【例 11-7】 从例11-6中的一盒晶体管中,依次任意抽取两只,考虑二种情形:(1)第一次取出一只检验后放回盒中,第二次再取一只,这种抽取方法叫做放回抽样;(2)第一次取出一只后不放回盒中,第二次再从盒中取出一只,这种抽取方法叫做不放回抽样。试分别就以上两种情形求事件 $A = \{\text{第一次取得正品,且第二次取得次品}\}$ 的概率。

【解】 设想把盒中的晶体管如例11-6那样编号。取得的结果可以用有序数组 (i, j) 表示,其中 i, j 依次表示第一、二次取得的晶体管的号数。由于样本空间 S 中样本点较多,我们不再将它们一一列出,而只需将 S 中包含的基本事件数以及事件 A 中包含的基本事件数分别算出(利用附录II计数方法)。

(1)放回抽样情形。第一次从盒中取晶体管,有100只(即100个号数)可供抽取,由于是放回抽样,所以第二次仍有100只可供抽取,由附录II中的乘法原理,共有 100×100 种取法,每种取法 (i, j) 是一种可能试验结果,所以样本空间 $S = \{(i, j), i, j = 1, 2, \dots, 100\}$ 中包含的基本事件数为 $n = 100 \times 100$ 。又事件 A 是由 i 取自6到100中的一个, j 取自1到5中的一个所配成的有序数组 (i, j) 的全体,即 $A = \{(i, j), i = 6, 7, \dots, 100; j = 1, 2, \dots, 5\}$, A 中包含的基本事件数为 $k = 95 \times 5$,因此,

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{95 \times 5}{100 \times 100} = 0.0475$$

(2)不放回抽样情形。第一次有100只可供抽取,由于是不放回抽样,所以第二次只有99只可供抽取,由乘法原理,共有 100×99 种取法。样本空间 $S = \{(i, j), i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, 100\}$ 中包含的基本事件数为 $n = 100 \times 99$,且各基本事件的出现是等可能的。又事件 A 中包含的基本事件数与情形(1)相同,即 $k = 95 \times 5$ 。因此,

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{95 \times 5}{100 \times 99} = 0.0480$$

类似例11-6、11-7这类试验,都可抽象为从袋中摸球的试验。为了把它们看作古典型试验,我们只要设想球是可分辨的,而无需将球逐一编号。这样解题更为简练。

【例 11-8】 一盒晶体管共 N 只,其中 M 只次品,从盒中任取 n 只进行测试,求恰发现 m 只次品的概率,其中 $N - M \geq n - m$ 。

【解】 在 N 只晶体管中抽取 n 只(这里是不放回抽样),所有可能的取法共有 $\binom{N}{n}$ 种,即样本空间 S 中包含的基本事件数为 $\binom{N}{n}$,记事件 $A = \{n \text{只晶体管中恰发现} m \text{只次品}\}$ 。事件 A 发生表示测试 n 只晶体管后恰发现 m 只次品和 $n - m$ 只正品。这 m 只次品必定是从 M 只次品中取出的,共有 $\binom{M}{m}$ 种取法;而 $n - m$ 只正品则必定是从 $N - M$ 只正品中取出的,共有 $\binom{N - M}{n - m}$ 种取法,由附录II中的乘法原理, A 中包含的基本事件数为 $\binom{M}{m} \binom{N - M}{n - m}$ 。因此

$$P(A) = \frac{\binom{M}{m} \binom{N - M}{n - m}}{\binom{N}{n}}$$

【例 11-9】 把甲、乙、丙三个学生等可能地分到十间空宿舍中去,每间宿舍最多可住