常微分方程组及运动稳定性

李心灿 编

国防工业出版社

常微分方程组及运动稳定性

李 心 灿 编

国防工业出版社

内 容 简 介

本书共分两章，第一章介绍常微分方程组的基本概念和解法；第二章介绍稳定性的概念和判断法则。本书可作为高等工科院校有关专业的教科书或参考书，也可供有关工程技术人员参考。

常微分方程组及运动稳定性

李心灿 编

*

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168 1/32　印张 3　73 千字

1982年 6 月第一版　1982年 6 月第一次印刷　印数：0,001—8,800册

统一书号：15034·2376　定价：0.40元

前　言

目前，一些高等院校的有关专业（如无线电技术，自动控制，……等等），在给学生讲授完现行《高等数学》教材中的常微分方程之后，还希望在这个基础上用不多的学时，再给学生讲授一些微分方程组的基本知识及其解法以及一些运动稳定性的基本概念及其判断法则。本书就是根据这种需要并参考国内外有关教材而编写的。它可作为有关专业的《工程数学》教材，也可作为有关工程技术人员的参考书。

由于篇幅所限，本书在讲清有关概念的基础上，着重介绍一些解题方法和技巧。为了便于读者更好地掌握这些内容，我们相应的举了一系列比较典型的例子，因而使得书中的内容比较容易理解和便于自学（为了使得没有学过线性代数的读者能顺利阅读本书，甚至还有意地回避了线性代数的有关知识）。我们力求把本书写得简单和实用。但是为了使学习了本书之后尚感到不满足的读者继续深入学习有关的理论和方法，我们在书中有关地方指出了进一步可参阅的书籍及其具体章节。

本书在编写过程中曾得到北京航空学院高为炳教授、吴俊传、杨应辰、王日爽三位副教授和翁珍玲、张福渊等同志的热忱关心和帮助，并由西北工业大学张永曙副教授审阅。在此一并致以谢意。

由于编者学识水平所限，教学经验不足，错误和欠妥之处在所难免，诚恳地希望使用本书的教师和读者批评指正。

李心灿

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章　微分方程组

§1 概　　述

在高等数学中我们已经学过了微分方程，它引向于寻找一个未知函数。但是在电学、力学、质点运动学……等科学技术问题中，往往一个问题的解决，需要同时寻找几个未知函数，且这些函数彼此间具有一定的联系。为了确定这些函数，已经不是去考虑一个微分方程，而是同时考虑几个微分方程——微分方程组的问题。

我们先来看下面的例子，并从中引出微分方程组的有关概念。

例：有一河宽 $2a$ 米，河水在河正中的流速是 V_0米/秒，距河正中 x 米处的流速是 $V(x)=V_0\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$，一船以不变的速度 V_0 米/秒由码头垂直水流方向向对岸驶去，求船的航行路线。

解：选取坐标系如图 1-1，即坐标原点选在河心，码头在点 $A(-a,\ 0)$，水流方向沿 y 轴的正方向。

假定船的航行路线由参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

来表示。现在分析船在河中任意

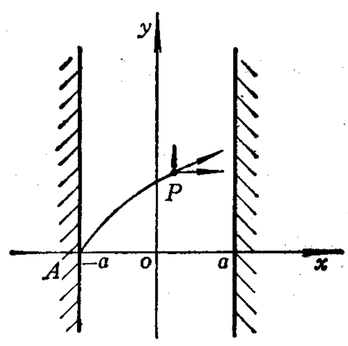

图　1-1

一点 $P(x,\ y)$ 的速度并把它分解成平行水流方向和垂直水流

方向，从而可得船的运动方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=V_0 & \text{（垂直水流方向）} \\ \dfrac{dy}{dt}=V_0\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right) & \text{（平行水流方向）} \end{cases} \tag{1.1.1}$$

对第一式分离变量后积分，得

$$x=V_0t+C_1 \tag{1.1.2}$$

将此式代入微分方程组（1.1.1）的第二式，得

$$\frac{dy}{dt}=V_0\left(1-\frac{(V_0t+C_1)^2}{a^2}\right)$$

对此式也分离变量后积分，得

$$y=V_0\left(t-\frac{V_0^2}{3a^2}t^3-\frac{V_0C_1}{a^2}t^2-\frac{C_1^2}{a^2}t\right)+C_2 \tag{1.1.3}$$

为了确定任意常数 C_1，C_2，依题意应有

$$t=0\text{ 时}\quad x(0)=-a,\quad y(0)=0 \tag{1.1.4}$$

将此条件代入（1.1.2）和（1.1.3）得

$$C_1=-a,\qquad C_2=0$$

于是得船的航行路线的参数方程

$$\begin{cases} x=V_0t-a & (1.1.5) \\ y=\dfrac{V_0^2}{a}t^2-\dfrac{V_0^3}{3a^2}t^3 & (1.1.6) \end{cases}$$

如果消去参数 t，即得船的航行路线的一般方程

$$y=x-\frac{x^3}{3a^2}+\frac{2}{3}a$$

一般地，若一个自变量和 n 个未知函数及其导数或微分之间可以建立 n 个关系式，则这些方程的总体，就称为一个（常）微分方程组（以下有时简称方程组）。

含有 n 个未知函数的微分方程组的一般形式是

$$F_i(t,\ x_1,\ x_1',\ \cdots,\ x_1^{(m_1)};\ x_2,\ x_2',\ \cdots,\ x_2^{(m_2)};\ \cdots;\ x_n,\ x_n',\ \cdots,\ x_n^{(m_n)})=0\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

微分方程组显然也有一阶和高阶之分，但是一切高阶微分方程组都可以借助于引进新的未知函数而化为一阶微分方程组●——这主要是由于微分运算是线性运算。所以我们在本章中就只讨论一阶微分方程组。

n 个未知函数的一阶微分方程组的标准形式是

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt}=f_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=f_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases} \tag{1.1.7}$$

若有 n 个函数 $x_1(t)$，$x_2(t)$，$\cdots$，$x_n(t)$ 在所论区间内有定义且可微，并且在这个区间所有点处满足微分方程组(1.1.7)，则称这 n 个函数为微分方程组(1.1.7)的解。例如在上例中 (1.1.2)，(1.1.3) 两个函数及 (1.1.5)，(1.1.6) 两个函数就都是微分方程组(1.1.1) 的解。(1.1.2)，(1.1.3) 中共含有两个任意常数，称作 (1.1.1) 的一般解，而(1.1.5)，(1.1.6) 称作 (1.1.1)的特解。用来确定任意常数的条件，称为初始条件，在上例中条件 (1.1.4) 就是初始条件。

解或积分一个微分方程组，就是寻找满足这些方程的函数组。

对于微分方程组，有类似于微分方程的解的存在唯一性定理，特叙述如下。

〔**存在唯一性定理**〕

对于微分方程组 (1.1.7) 及初始条件

$$x_i(t)\big|_{t=t_0}=x_i^{(0)} \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{1.1.8}$$

● 可参阅*В. В. Степанов*著《微分方程教程》（下册），249～251页，高等教育出版社1955年8月出版。

若在不等式

$$|t-t_0|\leqslant a,\quad |x_i-x_i^{(0)}|\leqslant b_i\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

所确定的区域D上，方程组的右端满足下列条件：

（1）所有函数$f_i(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ （$i=1,2,\cdots,n$）连续。

（2）所有函数$f_i(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ （$i=1,2,\cdots,n$）满足李普希兹（Lipschitz）条件：

$$|f_i(t,\ \bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \cdots,\ \bar{x}_n)-f_i(t,\ \tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ \cdots,\tilde{x}_n)|$$

$$<N\sum_{j=1}^{n}|\bar{x}_j-\tilde{x}_j|^{[1]}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

此处N是某一个正数，而$t,\ \bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \cdots,\bar{x}_n$和$t,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n$是$D$上的任意两组值。则满足方程组（1.1.7）与初始条件(1.1.8)的解存在，且是唯一的[2]。

方程组（1.1.7）的一般解中含有n个任意常数，即

$$x_i=\Psi_i(t,\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

其中常数可由初始条件（1.1.8）确定。

我们指出，微分方程组具有这样一个性质：一个n阶微分方程可以化为包含n个一阶微分方程的方程组。反之，包含n个一阶微分方程的方程组有时也可以化为一个n阶微分方程。

举例来说：对二阶微分方程

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=0$$

若引入两个新未知函数，即设

$$y_1=y,\ \ y_2=y'$$

则原方程可化为具有两个一阶方程的方程组

---

[1] 此条件亦可用偏导$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$（$i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）的绝对值有界来代替。

[2] 可参阅叶彦谦编《常微分方程讲义》，74～80页及134～135页，人民教育出版社1979年5月出版。

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -\dfrac{2}{x}y_2 - y_1 \end{cases}$$

又如对于 n 阶微分方程

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)})$$

若引入 n 个新的未知函数

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad \cdots, \quad x_{n-1} = x^{(n-2)}, \quad x_n = x^{(n-1)}$$

则原方程可化为包含 n 个一阶微分方程的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f(t, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) \end{cases}$$

反之，如包含两个一阶微分方程的方程组

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

有时也可化为一个二阶微分方程。例如若能由第一个方程解出 y_2

$$y_2 = \Psi(x, y_1, y_1')$$

代入第二方程中

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y_1}y_1' + \frac{\partial\Psi}{\partial y_1'}y_1'' &= f_2(x, y_1, \Psi(x, y_1, y_1')) \\ &= \Psi_1(x, y_1, y_1') \end{aligned}$$

即得

$$y_1'' = \omega(x, y_1, y_1')$$

由此可见，微分方程组的问题与高阶微分方程的问题有着密切的联系。

§2 微分方程组的解法

(一) 消元法

消元法是求解微分方程组的一个基本方法。这种方法和解代数方程组的消去法类似，它将方程组通过代数、微分等运算消去方程组中方程的其他未知函数，使其转化为只含一个未知函数的高阶的微分方程的形式。然后按解高阶微分方程的方法解出。并将其结果经过微分、代数等运算再解出其它未知函数。

例1 求方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y & (1.2.1) \\ \dfrac{dy}{dt}=x & (1.2.2) \end{cases}$$

的一般解。

解： 将 (1.2.1) 对 t 求导代入 (1.2.2) 得

$$\frac{d^2x}{dt^2}-x=0$$

解得

$$x=c_1e^t+c_2e^{-t} \tag{1.2.3}$$

再将 (1.2.3) 代入 (1.2.1)，得

$$y=c_1e^t-c_2e^{-t} \tag{1.2.4}$$

(1.2.3) 与 (1.2.4) 给出问题的一般解。

注意：若将 (1.2.3) 代入 (1.2.2)，积分得

$$y=c_1e^t-c_2e^{-t}+c_3$$

这样就引进了多余解，因为把它代入微分方程组可看出，不是对任意 c_3，而只是对 $c_3=0$，函数 $x=c_1e^t+c_2e^{-t}$，$y=c_1e^t-c_2e^{-t}+c_3$ 才能满足微分方程组。

例2 求方程组

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + y \end{cases} \tag{1.2.5}$$

的一般解。

解：将（1.2.5）对 t 求导，得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = (x + y) + (4x + y) = 5x + 2y$$

由（1.2.5）又有

$$y = \frac{dx}{dt} - x$$

并代入上式得

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = 0$$

因此

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}$$

且

$$y = \frac{dx}{dt} - x = -2c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{3t}$$

（二）可积组合法

常常可用一些数学运算将方程组中的各方程组合成一个容易积分的方程。例如将方程组

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

化成形如 $d\phi(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ 的方程。或者再经变量代换化为只含一个未知函数的某一可积分型的方程。这种方法称为可积组合法。这种方法和求解一阶方程中的凑全微分的方法很相象。在某些简单情况下用这种方法可以较快的求出方程组的解。另外，我们还将在这里引出力学中常遇到的“初积分”和“对称型微分方程组”的概念。

例 1 求解

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y & (1.2.6) \\ \dfrac{dy}{dt} = x & (1.2.7) \end{cases}$$

解： 由（1.2.6）式和（1.2.7）式相加可得可积组合

$$\frac{d(x+y)}{dt} = x + y$$

或

$$\frac{d(x+y)}{x+y} = dt$$

由此得到

$$d\ln(x+y) = dt$$

$$\ln(x+y) = t + \ln c_1$$

$$x + y = c_1 e^t \qquad (1.2.8)$$

再由（1.2.6）式和（1.2.7）式相减可得另一可积组合

$$\frac{d(x-y)}{dt} = -(x-y)$$

或

$$\frac{d(x-y)}{x-y} = -dt$$

又得到

$$\ln(x-y) = -t + \ln c_2$$

$$x - y = c_2 e^{-t} \qquad (1.2.9)$$

于是得到二个有限方程（1.2.8）、（1.2.9），由它们就可得到原方程组的解：

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(c_1 e^t + c_2 e^{-t}) \\ y = \dfrac{1}{2}(c_1 e^t - c_2 e^{-t}) \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x = \overline{C}_1 e^t + \overline{C}_2 e^{-t} \\ y = \overline{C}_1 e^t - \overline{C}_2 e^{-t} \end{cases}$$

由每一个可积组合都可以得到一个联系未知函数和自变量的有限方程：

$$\varphi_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)=c_1$$

这个方程称为微分方程组的“初积分”或“首次积分”。

例 2 用可积组合法解刚体绕固定点运动的欧拉（Euler）动力方程组（当外作用力矩＝0时）。

$$\begin{cases} A\dfrac{dp}{dt}+(C-B)qr=0 & (1.2.10) \\ B\dfrac{dq}{dt}+(A-C)pr=0 & (1.2.11) \\ C\dfrac{dr}{dt}+(B-A)pq=0 & (1.2.12) \end{cases}$$

其中 A，B，C——刚体对主轴的转动惯量。

p，q，r——三个未知函数——瞬时自转速度在动坐标轴上的投影。

解：将（1.2.10）式乘 p，（1.2.11）式乘 q，（1.2.12）乘 r，然后相加，得

$$Ap\frac{dp}{dt}+Bq\frac{dq}{dt}+Cr\frac{dr}{dt}=0$$

从而得

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2=c_1$$

将（1.2.10）式乘 Ap，（1.2.11）式乘 Bq，（1.2.12）式乘 Cr，然后相加并积分，得

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=c_2$$

如果除去 $A=B=C$ 的情况（这时方程组可直接积分），那么所找到的两个初积分是无关的。由这两个初积分可以解出

$$p^2=\alpha r^2+a, \qquad q^2=\beta r^2+b \qquad (1.2.13)$$

其中 α，β 是固定常数，a，b 是任意常数，它们可以由 c_1，c_2 表示。把(1.2.13)代入(1.2.12)即得只含未知函数 r 的可分离变量的微分方程，由此积分，然后解出 r 表为 t 的椭圆函数，在它的

表达式中含有三个任意常数，把 r 的表达式再代入(1.2.13)又可得 p 与 q 的类似表达式，它们合起来就构成所论方程的一般解。

为求可积组合，常常将方程组（1.1.7）写成如下的“对称型方程组”：

$$\frac{dx_1}{\varphi_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)}=\frac{dx_2}{\varphi_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)}=\cdots$$

$$=\frac{dx_n}{\varphi_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)}=\frac{dt}{\varphi_0(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$

其中

$$f_i(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)=\frac{\varphi_i(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\varphi_0(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$

$$(i=1, 2, \cdots, n)$$

在对称型方程组中变量是平等的，这有时会使求可积组合变得更容易些。

例 3 求解 $$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{xy} \tag{1.2.14}$$

解：先由 $\dfrac{dx}{xz}=\dfrac{dy}{yz}$ 可得 $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}$

从而又得 $$\ln x=\ln y+\ln c_1$$

故得 $$\frac{x}{y}=c_1 \tag{1.2.15}$$

对（1.2.14）由比例定理可得

$$\frac{\frac{1}{x}dx+\frac{1}{y}dy}{2z}=\frac{dz}{xy}$$

故有

$$ydx+xdy=2zdz$$

即 $$d(xy)=d(z^2)$$

从而得

$$z^2-xy=c_2 \tag{1.2.16}$$

因为初积分（1.2.15）和（1.2.16）是独立的，所以它们即为方程组的一般解。

§3 线性微分方程组及其解的一般结构

对于所有未知函数及其导数均为一次的微分方程组，称为线性微分方程组。包含三个未知函数的微分方程组的标准形式是：

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+a_{13}(t)x_3+f_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+a_{23}(t)x_3+f_2(t) \\ \dfrac{dx_3}{dt}=a_{31}(t)x_1+a_{32}(t)x_2+a_{33}(t)x_3+f_3(t) \end{cases} \quad (1.3.1)$$

其中未知函数 x_1，x_2，x_3 及各项系数均为 t 的函数。

若所有 $f_i(t)\equiv 0$，则称为线性齐次微分方程组。否则，称为非齐次的。

不难证明，线性微分方程组的解具有下面的性质●：

（1）若 $x_1^{(1)}(t)$，$x_2^{(1)}(t)$，$x_3^{(1)}(t)$ 是线性齐次方程组的一组解，则 $cx_1^{(1)}(t)$，$cx_2^{(1)}(t)$，$cx_3^{(1)}(t)$ 也是该方程组的解。此处 c 是任意常数；

（2）若 $x_1^{(1)}(t)$，$x_2^{(1)}(t)$，$x_3^{(1)}(t)$ 及 $x_1^{(2)}(t)$，$x_2^{(2)}(t)$，$x_3^{(2)}(t)$，是线性齐次方程组的两组解，则

$$c_1x_1^{(1)}(t)+c_2x_1^{(2)}(t),\quad c_1x_2^{(1)}(t)+c_2x_2^{(2)}(t),$$
$$c_1x_3^{(1)}(t)+c_2x_3^{(2)}(t)$$

也是该方程组的解（这个性质称为**迭加原理**）；

（3）上述三个未知函数的线性齐次方程组中，设其系数在所论区间上是连续的，若有三组解：

$$x_1^{(1)}(t),\quad x_2^{(1)}(t),\quad x_3^{(1)}(t)$$

● 详细论证可参阅：

中山大学数学力学系常微分方程组编《常微分方程》，171～186页，人民教育出版社1979年5月出版；

叶彦谦编《常微分方程讲义》，137～160页，人民教育出版社1979年5月出版。

$$x_1^{(2)}(t),\ x_2^{(2)}(t),\ x_3^{(2)}(t)$$
$$x_1^{(3)}(t),\ x_2^{(3)}(t),\ x_3^{(3)}(t)$$

且由它们构成的行列式

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_2^{(1)}(t) & x_3^{(1)}(t) \\ x_1^{(2)}(t) & x_2^{(2)}(t) & x_3^{(2)}(t) \\ x_1^{(3)}(t) & x_2^{(3)}(t) & x_3^{(3)}(t) \end{vmatrix}$$

在所论区间内某点不等于零●，则这三组解的线性组合

$$c_1x_1^{(1)}(t)+c_2x_1^{(2)}(t)+c_3x_1^{(3)}(t)$$
$$c_1x_2^{(1)}(t)+c_2x_2^{(2)}(t)+c_3x_2^{(3)}(t)$$
$$c_1x_3^{(1)}(t)+c_2x_3^{(2)}(t)+c_3x_3^{(3)}(t)$$

是该方程组在所论区间上的一般解；

（4）对于非齐次方程组，如果它的一组特解是 $X_1(t)$，$X_2(t)$，$X_3(t)$，而其对应齐次一般解是

$$x_1=c_1x_1^{(1)}(t)+c_2x_1^{(2)}(t)+c_3x_1^{(3)}(t)$$
$$x_2=c_1x_2^{(1)}(t)+c_2x_2^{(2)}(t)+c_3x_2^{(3)}(t)$$
$$x_3=c_1x_3^{(1)}(t)+c_2x_3^{(2)}(t)+c_3x_3^{(3)}(t)$$

则

$$x_i=c_1x_i^{(1)}(t)+c_2x_i^{(2)}(t)+c_3x_i^{(3)}(t)+X_i(t)\quad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{1.3.2}$$

为线性非齐次方程组的一般解。

上述结论可以推广到含有 n 个未知函数的线性方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+\cdots+a_{1n}(t)x_n+f_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+\cdots+a_{2n}(t)x_n+f_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+\cdots+a_{nn}(t)x_n+f_n(t) \end{cases} \tag{1.3.3}$$

● 满足此条件的三组解称作是线性独立的，并称它们是齐次方程组的基本解组，而此行列式又称作此三组解的 *Wrnosky* 行列式，用 $W(t)$ 表示。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com