

WAVELET ANALYSIS FOR CHANGE POINTS AND NON-NEAR WAVELET ESTIMATES IN TIME SERIES

十五国家重点图书



经济与统计博士文库

时间序列中变点的 小波分析及 非线性小波估计

C211.6/
L36

“十五”国家重点图书
经济与统计博士文库

时间序列中变点的小波 分析及非线性小波估计

WAVELET ANALYSIS FOR CHANGE POINTS AND
NONLINEAR WAVELET ESTIMATES IN TIME SERIES

李 元/著

 中国统计出版社
China Statistics Press

(京)新登字 041 号

图书在版编目 (CIP) 数据

时间序列中变点的小波分析及非线性小波估计 / 李元 著

— 北京: 中国统计出版社, 2002. 3

(经济与统计博士文库)

ISBN 7-5037-3685-2

I. 时…

II. 李…

III. 小波分析 - 应用 - 时间序列分析

IV. O211.61

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 083229 号

时间序列中变点的小波分析及非线性小波估计

责任编辑 / 徐 颖

封面设计 / 崔宝进

版式设计 / 张美华

责任校对 / 沙美华

出版发行 / 中国统计出版社

通信地址 / 北京市西城区月坛南街 75 号 邮政编码 / 100826

办公地址 / 北京市丰台区西三环南路甲 6 号

电 话 / (010) 63459084 63266600-22500 (发行部)

印 刷 / 科伦克三莱印务 (北京) 有限公司

经 销 / 新华书店

开 本 / 787×1092mm 1/16

印 张 / 8.75

字 数 / 130 千字

印 数 / 1 — 1000 册

版 别 / 2002 年 3 月第 1 版

版 次 / 2002 年 3 月北京第 1 次印刷

书 号 / ISBN 7-5037-3685-2/O·41

定 价 / 16.00 元

中国统计版图书, 版权所有, 侵权必究。

中国统计版图书, 如有印装错误, 本社发行部负责调换。

总 序

在新千年伊始,中国统计出版社精心组织的丛书《经济与统计博士文库》与读者见面了。可以预期,她将成为我国经济类和统计类图书的一套精品,必定会受到广大读者的欢迎。

改革开放二十余年来,我国的经济建设不断取得长足进展,图书市场也呈现出一片繁荣。广大经济理论研究工作者和统计工作者不断贡献他们的理论智慧和实践经验,就分析理解我国改革开放和有中国特色的社会主义市场经济的成就产生了一大批卓有建树的作品,丰富了广大读者的知识视野。而《经济与统计博士文库》是将统计学与经济学结合起来,从更宽的视角来探讨和解决统计学与经济学领域的理论及实践问题,从这个意义上说,她是奉献给广大读者的精神盛宴,有助于关心中国经济和统计的人员从事自己的研究和教学工作。

经济学和统计学始终处于社会科学的显著地位,所不同的是经济学一直被看成是“经邦济世”之学,是探讨通过对有限资源进行无限配置以实现经济可持续稳定健康发展的一门科学;统计学却相对处于工具理性的层面,是各学科工具箱中使用频率最高的工具。但是,我们应该清醒地认识到,随着人类文明的进步和对人类经济行为复杂性认识的不断提升,统计学的专业性和职业性在不断增强。在经济理论的深化和升华领域,统计理论已

经成为经济理论不可忽略的一个组成部分,它们的交叉领域,一直是两个学科的前沿。《经济与统计博士文库》作为对两个学科的前沿问题理论探讨的支持和促进,已被新闻出版署列入“十五”国家重点图书。

明确地说,本套文库的出版目的是为宣传和跟踪我国经济和统计学领域的最新科研成果,扶持经济与统计各学科理论、方法与应用的研究,促进高层次创造性人才的培养。本套文库直接选材于我国各大院校统计学和经济学的博士学位论文,对出版作品的要求是能够体现学科前沿、具有思想创新和应用价值的统计学和经济学方面的成功之作,而且今后每年都推出新作品。因此,本套文库所具有的鲜明的时代特征,既可以说是我国改革开放历史长镜的折影,也可以说是我国经济理论和统计理论发展史的断代构件。同时,我确信,本套文库选择在新世纪的纪元年推出,体现了编者开启历史、承接未来的良好愿望。

我衷心祝愿本套文库获得圆满成功!

邱晓华

2001年10月



序 言

关于李元博士论文的几点说明

该博士论文主要运用近年来发展起来的小波分析运用于时间序列分析中,解决了一系列的难题,并创造性地给出了一类运用相当广泛的小波统计分析方法。概括起来,论文集中于以下几个问题:

- SETAR 模型中关于延迟参数 α , 分枝个数 r 及门限水平 $\{\lambda_i\}$ 的小波估计。这些估计量不仅容易计算而且数学上已证明是强相合的。其中对分析个数 r 的相合估计是多年来未能很好解决的一个难题。

- 潜在周期分析: 这是一个老问题,历史上解决得比较好的是何书元,他首次给出了在平稳弱 P 条件下关于定阶的问题。然而存在的门限问题只给出大样本性质,使得在应用中产生了困难。而李元的结果则指出当变量落入一个隐周期的邻域时,该估计量随着分解水平的增加几乎是一个常数,反之则趋于零。这就在给定样本量之后确定隐周期的一个实用方法,事实证明也是有效的。

- 关于跳跃点的检测: Wang(1995) 年率先用小波解决跳跃点的检测,但他假定的是噪声项为简单的不相关过程。李元则将条件放宽到更加有实用意义的相关性过程并且对得到的关于跃点、尖点的位置、高度(跃度)的估计量都是强相合的。



以上这些工作毕业之后又开拓至一些时间序列的热点和难点问题。比如非线性建模带有 Heteroscedasticity 的场合及研究在该类残差之下进行稀疏系数的时间序列建模等。

以上这些理论工作不仅具有应用背景而且已在金融和经济中得到应用：如谢衷洁、栾贻会等 (1997) 关于汇率跳跃点的检测；谢衷洁、刘亚利等 (2000) 关于 J-效应的统计分析及政策性实验等应用；近年李元等 (2001) 更应用这些方法于期权定价等的分析。

北京大学概率统计系教授

谢衷洁

2001 年 4 月 9 日

/// 提 要

小波是近年来应用数学领域新发展起来的一个数学分支,其影响非常广泛。最近,统计学家已将小波方法引入到统计领域,使得统计学的研究在很多方面取得重大突破。例如,在非参数估计中,传统的统计方法总假定所要估计的函数具有一定的光滑性,但是利用小波方法可以使得这一条件大大放宽。本文将小波方法应用于时间序列中,主要解决变点的识别和回归函数的非参数估计问题。

本文第一章是关于小波的预备知识,主要介绍了多分辨分析的概念,在此基础上引进了小波正交基。小波的一个重要特点是计算速度快,容易实现,这在第 1.2 节 mallat 的塔式分解和重构算法中我们作了介绍。该算法在小波分析中的地位相当于快速付里叶变换在经典付氏分析中的地位。在实际应用中,用得较多的是具有有限支集的小波。在第 1 章第 3、4 节中,我们讨论了如何构造具有有限支集的小波。

第二章讨论了回归函数的变点识别问题。变点识别是统计研究的一类重要问题。在很多情形下,变点预示着所研究的对象的某种突变性。我们从回归模型 $y_i = f(x_i) + \epsilon_i$ 入手,首先定义了经验小波系数,然后证明了当分辨水平较高时,经验小波系数在变点附近很大,而稍微偏离变点时则急剧减小。这样,经验小波系数在变点处就形成了一个峰。正是基于经验小波系数的这一特点,我们给出了变点个数的估计,并在此基础上给出了变点的位置以及断点的跃度的估计。所有的估计都是相合的。在上面讨论的基础上,我们将回归模型推广到设计变量为时间序列以及自回归情形。特别是关于一阶自回归模型的讨论,向我们揭示了对于门限自回归模型,门限恰恰为回归函数的变点——断点或尖点,这为我们识别一般情形下门限自回归模型的门限奠定了基

础。数值模拟结果表明小波方法很有效。

第三章研究了门限自回归模型的延时及门限识别问题。门限自回归模型是应用比较成功的几个非线性模型之一,但是延时及门限的识别长期以来没有得到很好的解决。本文应用小波方法彻底解决了这一问题。我们首先研究了自激励门限自回归模型 $SETAR(d, r, p)$, 指出其门限就是它的骨架函数的变点。这样,我们就可以用第二章的变点的小波识别方法来辨识门限。我们首先定义了 p 个经验小波系数,然后证明了除与延时对应的经验小波系数外,所有的经验小波系数都很小,由此给出了延时的识别方法。在识别延时的基础上,用类似于第二章辨识变点的方法给出了门限的个数及门限的估计。接着,我们将上述小波方法应用于异方差双门限自回归模型,得到了条件均值函数和条件方差函数的断点和尖点——双门限的相合估计。最后将小波方法应用到 H. Tong 的太阳黑子模型,所识别出的门限与 Tong 的结果完全吻合。

第四章为潜频率的估计问题。已有很多统计学家成功地对此作了探讨。这里我们是从另外一个途径进行研究。我们注意到,潜频率是功率谱的间断点。因此很自然可以借用第二章的变点识别方法来确定潜频率。我们首先通过周期图和 Meyer 小波定义了经验小波系数,然后用与第二章类似的方法给出了潜频率个数及位置的相合估计。数值模拟表明小波方法优于传统的周期图方法。

第五章是关于回归函数的非参数估计问题。对于此问题,文献中已作过很多讨论,提出了许多种估计,如核估计,样条估计等。但是这些估计大都对于所要估计的函数要求光滑性较强,而且这些估计在 Besov 空间中的 Besov 球 $B_{p,q}^m(C)$ 内,当 $p < 2$ 时在 minimax 意义下达不到最优收敛速度。我们针对回归模型 $y_t = f(x_t) + \epsilon_t$, 讨论回归函数 $f(x)$ 的估计问题。通过 Truong 和 Stone 引理,首先给出了回归函数的经验小波系数。然后利用 Donoho 的小波收缩法,给出了回归函数的非线性小波估计,并证明该估计在 Besov 空间中的 Besov 球 $B_{p,q}^m(C)$ 内达到了最优收敛速度 $n^{-2m/(2m+1)}$ 或近似最优收敛速度 $(\frac{\log n}{n})^{2m/(2m+1)}$ 。

关键词: 变点 潜周期 门限自回归模型 非参数回归 小波



目 录

	第 1 章 小波分析简介
1	第 1 节 多分辨分析
4	第 2 节 Mallat 算法
6	第 3 节 紧支集小波
10	第 4 节 区间上的小波
	第 2 章 回归函数变点的小波分析
11	第 1 节 引言
14	第 2 节 回归函数断点, 尖点和跃度的小波估计
26	第 3 节 时间序列回归模型的断点的小波识别方法
34	第 4 节 自回归模型的断点的小波分析
42	第 5 节 数值模拟
	第 3 章 门限自回归模型的延时和门限的小波识别方法
50	第 1 节 引言
53	第 2 节 SETAR 模型的延时及门限的小波识别方法
66	第 3 节 DTARCH 模型的延时及门限的小波辨识
77	第 4 节 数值模拟
	第 4 章 潜周期模型的潜频率的小波识别方法
88	第 1 节 引言
89	第 2 节 潜频率的小波分析
98	第 3 节 数值模拟
	第 5 章 回归函数的非线性小波估计
104	第 1 节 引言



105

第 2 节 回归函数的非线性小波估计

参考文献

英文目录

英文摘要

致 谢



第 1 章

小波分析简介

小波是近年来应用数学领域中新发展起来的一个数学分支,已成为众多学科共同关注的热点。一方面,小波被认为是调和分析这一数学领域半个世纪以来工作的结晶;另一方面它被认为是应用非常广泛的一种数学工具,事实上,它已被成功地应用于信号分析、图像处理、地震勘探和语音识别等领域中。原则上讲,传统上使用付里叶分析的地方,现在都可以用小波分析来代替。小波分析优于传统的付里叶分析在于小波在时域和频域内同时具有良好的局部化性质。由于对高频成分采用逐渐精细的时域取样步长,从而可以聚焦到对象的任意细节。从这个意义上讲,它被人们誉为是数学显微镜。

第 1 节 多分辨分析

定义 1.1.1 空间 $L^2(\mathcal{R})$ 中的一列闭子空间 $\{V_j\}_{j \in \mathcal{Z}}$ 称为 $L^2(\mathcal{R})$ 的一个多分辨分析, 如果它满足:

- (1) 单调性: $V_j \subset V_{j+1}, \forall j \in \mathcal{Z}$;
- (2) 逼近性: $\bigcap_{j \in \mathcal{Z}} V_j = \{0\}, \overline{\bigcup_{j \in \mathcal{Z}} V_j} = L^2(\mathcal{R})$;
- (3) 伸缩性: $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}, \forall j \in \mathcal{Z}$;
- (4) 平移不变性: $f(x) \in V_0 \implies f(x-k) \in V_0, \forall k \in \mathcal{Z}$;
- (5) 正交基: 存在一个函数 $\phi \in V_0$, 使得 $\{\phi(x-k) | k \in \mathcal{Z}\}$ 构成 V_0 的一组正交基。

在定义 1.1.1 中, $\mathcal{Z}$ 为整数集合, 即 $\mathcal{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $\mathcal{R} = (-\infty, \infty)$ 。由条件 (3) 可知, 闭子空间列 $\{V_j\}$ 可由其中的任意一个空间完全确定。例如, $V_j = \{f(2^j x) | f(x) \in V_0\}, \forall j \in \mathcal{Z}$ 。

上述定义的多分辨分析中, 函数 $\phi(x)$ 称为尺度函数, 多分辨分析也称为是由 $\phi(x)$ 生成的。

令

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (1.1.1)$$

则由定义 1.1.1 的 (3) 和 (4) 可知, $\{\phi_{j,k}(x), k \in \mathbb{Z}\}$ 构成闭子空间 V_j 的一组标准正交基。

对于 $j \in \mathbb{Z}$, 记 W_j 为 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补空间, 则有

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (1.1.2)$$

且对于 $j \neq j'$, $W_j \perp W_{j'}$ 。对于 $j > l$, 有

$$V_j = V_l \oplus \bigoplus_{k=l}^{j-1} W_k \quad (1.1.3)$$

进一步, 有

$$L^2(\mathcal{R}) = V_l \oplus \bigoplus_{k=l}^{\infty} W_k \quad (1.1.4)$$

$$= \bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} W_k \quad (1.1.5)$$

令

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{-i\omega/2} \overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (1.1.6)$$

其中

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega} \quad (1.1.7)$$

$$h_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \phi(x/2) \overline{\phi(x-k)} dx \quad (1.1.8)$$

则由 (1.1.6) 所确定的函数 $\psi(x)$ 的整数平移 $\{\psi(x-k) | k \in \mathbb{Z}\}$ 构成 W_0 的一组标准正交基。 $\psi(x)$ 的压缩平移记为

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \quad (1.1.9)$$

则 $\{\psi_{j,k}(x)|k \in \mathbb{Z}\}$ 为 W_j 的一组标准正交基。由 (1.1.5) 所确定的函数 $\psi(x)$ 称为小波, 而 $H(\omega)$ 称为传递函数。

由 (1.1.6) 可知 $\hat{\psi}(0) = 0$, 从而 $\psi(x)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0 \quad (1.1.10)$$

对于 $f(x) \in L^2(\mathcal{R})$, 由 (1.1.4) 和 (1.1.5) 可知, $f(x)$ 可以表成以下形式:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{l,k} \phi_{l,k}(x) + \sum_{j=l}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_{j,k} \psi_{j,k}(x) \quad (1.1.11)$$

或

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_{j,k} \psi_{j,k}(x) \quad (1.1.12)$$

其中

$$\begin{aligned} \beta_{j,k} &= \int f(x) \psi_{j,k}(x) dx \\ \alpha_{l,k} &= \int f(x) \phi_{l,k}(x) dx \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

(1.1.11) 或 (1.1.12) 称为 $f(x)$ 的小波展开, 而 (1.1.13) 称为 $f(x)$ 的小波系数。

例 1.1.1 Haar 小波

取

$V_0 = \{u|u \in L^2(\mathcal{R}), \text{ 在每一个区间 } (k, k+1) \text{ 上, } u(x) = \text{常数}\}$

函数 $g(x) = \chi_{(0,1)}$ 为 $(0,1)$ 区间上的示性函数, 其所有的整数平移 $\{g(x-k)|k \in \mathbb{Z}\}$ 是闭子空间 V_0 的标准正交基, 即这时 $\phi = g$ 。

容易计算 $\hat{g} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} e^{-i\omega/2}$ 。由定义 1.1.1 中的伸缩性给出 V_j 。不难验证 $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathcal{R})$ 以及定义 1.1.1 的其他条件满足。因此 $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ 构成 $L^2(\mathcal{R})$ 的一个多分辨分析。此时

$$H(\omega) = \frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega}) \quad h_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & k = 0, 1 \\ 0, & k \text{ 为其他整数} \end{cases}$$

例 1.1.2 取

$$V_0 = \{u \in L^2(\mathcal{R}) | \text{supp}(\hat{u}) \subset [-\pi, \pi]\}$$

显然 V_0 具有平移不变性。由定义 1.1.1 中的伸缩性给出 V_j , 则

$$V_j = \{u \in L^2(\mathcal{R}) | \text{supp}(\hat{u}) \subset [-2^{-j}\pi, 2^{-j}\pi]\}$$

易见 $\{V_j\}$ 具有单调性和逼近性, 且 $g(x) = \sin \pi x / \pi x$ 的整数平移构成 V_0 的标准正交基, 即 $\phi = g$ 。此时

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < |\omega| < \pi \end{cases} \quad h_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & k = 0 \\ 0, & k = 2n \\ \frac{\sqrt{2}(-1)^n}{\pi^{2n+1}}, & k = 2n + 1 \end{cases}$$

第 2 节 Mallat 算法

设 $\{V_j\}$ 是一给定的多分辨分析, $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 分别为相应的尺度函数和小波。记

$$G(\omega) = e^{-i\omega} \overline{H(\omega + \pi)}$$

其付里叶级数为:

$$G(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{-ikw} \quad (1.2.1)$$

可以证明:

$$\begin{aligned} h_k &= (\phi_{1,0}(x), \phi_{0,k}(x)) \\ g_k &= (\psi_{1,0}(x), \phi_{0,k}(x)) = (-1)^{k-1} \bar{h}_{1-k} \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

对于一个信号 $f(x)$, 我们要对其进行分析。假定 $f(x)$ 属于某个子空间 V_{J_2} 。记 A_j 为 V_j 上的投影算子, D_j 为 W_j 上的投影算子, 则有

$$f(x) = A_{J_2} f(x) = \sum_{k \in \mathcal{Z}} C_{J_2,k} \phi_{J_2,k}(x) \quad (1.2.3)$$

由 (1.2.2) 可得

$$\begin{aligned}(\phi_{J_2,k}(x), \phi_{J_2-1,m}(x)) &= \bar{h}_{k-2m} \\(\phi_{J_2,k}(x), \psi_{J_2-1,m}(x)) &= \bar{g}_{k-2m}\end{aligned}\quad (1.2.4)$$

因为 $V_{J_2} = V_{J_2-1} \oplus W_{J_2-1}$, 所以

$$\begin{aligned}A_{J_2}f(x) &= A_{J_2-1}f(x) + D_{J_2-1}f(x) \\&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{J_2-1,k} \phi_{J_2-1,k}(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} D_{J_2-1,k} \psi_{J_2-1,k}(x)\end{aligned}\quad (1.2.5)$$

从而

$$\begin{aligned}C_{J_2-1,m} &= (A_{J_2}f(x), \phi_{J_2-1,m}(x)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{J_2,k} (\phi_{J_2,k}(x), \phi_{J_2-1,m}(x)) \\&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{J_2,k} \bar{h}_{k-2m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{h}_{k-2m} C_{J_2,k}\end{aligned}\quad (1.2.6)$$

同理

$$D_{J_2-1,m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{g}_{k-2m} C_{J_2,k} \quad (1.2.7)$$

引入无穷矩阵

$$H = (H_{m,k}), \quad G = (G_{m,k}),$$

其中 $H_{m,k} = \bar{h}_{k-2m}$, $G_{m,k} = \bar{g}_{k-2m}$ 。则 (1.2.6) 和 (1.2.7) 可以表示为

$$C_{J_2-1} = H C_{J_2} \quad (1.2.8)$$

$$D_{J_2-1} = G C_{J_2} \quad (1.2.9)$$

这样一直做下去, 我们有

$$f(x) = A_{J_1}f(x) + \sum_{j=J_1}^{J_2-1} D_j f(x) \quad (J_1 < J_2) \quad (1.2.10)$$

其中

$$A_j f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{j,k} \phi_{j,k}(x) \quad (1.2.11)$$

$$D_j f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_{j,k} \psi_{j,k}(x) \quad (1.2.12)$$

而

$$\begin{aligned} C_{j-1} &= HC_j \\ D_{j-1} &= GC_j \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

$j = J_2, J_2 - 1, \dots, J_1 + 1$ 。

式 (1.2.13) 称为 Mallat 塔式分解算法。我们称 $A_j f$ 为 f 在 2^j 分辨率下的连续逼近, $D_j f$ 为 f 在 2^j 分辨率下的连续细节; 而称相应的 C_j 和 D_j 为分辨率 2^j 下的离散逼近和离散细节。 $A_j f$ 可理解为函数 f 的频率不超过 2^{-j} 的成份; 而 $D_j f$ 是 f 的频率介于 2^{-j} 和 2^{-j-1} 之间的成分, 因此式 (1.2.8)-(1.2.13) 表明, 按 Mallat 分解算法, 我们将函数 f 分解成了不同的频率通道成分。并将每一频率通道成分又按相位进行了分解——频率越高者, 相位划分愈细, 反之则愈疏。在式 (1.2.5) 的两端同时与函数作内积得:

$$C_{J_2, k} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{k-2m} C_{J_2-1, m} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_{k-2m} D_{J_2-1, m} \quad (1.2.14)$$

即

$$C_{J_2} = H^* C_{J_2-1} + G^* D_{J_2-1} \quad (1.2.15)$$

一般地, 我们有

$$C_j = H^* C_{j-1} + G^* D_{j-1} \quad (1.2.16)$$

$j = J_2 + 1, \dots, J_1 (J_2 < J_1)$, 这就是 Mallat 重构算法。

第 3 节 紧支集小波

本节的目的是介绍具有紧支集小波的结构。设 $H(\omega)$ 为一给定的多分辨分析的传递函数, 则可以证明这时 $H(\omega)$ 必满足

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (1.3.1)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-ik\omega} \quad (1.3.2)$$