

美国MCM/ICM竞赛指导丛书

美国大学生数学建模 竞赛题解析与研究

第6辑

余红伟 张莹 肖华勇
蔡力 潘璐璐 周丙常

高等教育出版社

AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY

美国大学生数学建模 竞赛题解析与研究

1500

AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY
第 115 卷 2008 年 1 月

北京理工大学出版社

美国大学生数学建模 竞赛题解析与研究

第 6 辑

余红伟 张莹 肖华勇
蔡力 潘璐璐 周丙常

高等教育出版社·北京

内容提要

本系列丛书是以美国大学生数学建模竞赛(MCM/ICM)赛题为主要研究对象,结合竞赛特等奖的优秀论文,对相关的问题做深入细致的解析与研究。本辑针对2011年及2012年MCM/ICM竞赛的6个题目:单板滑雪场设计问题、中继器协调问题、电动汽车的未来、一棵树的叶子、大隆河露营问题以及抓捕罪犯模型等进行了解析与研究。

本书内容新颖、实用性强,可用于指导学生参加美国大学生数学建模竞赛,也可作为本科生、研究生学习和准备全国大学生、研究生数学建模竞赛的参考书,同时也可供研究相关问题的师生参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

美国大学生数学建模竞赛题解析与研究. 第6辑 / 余红伟等编著. -- 北京: 高等教育出版社, 2018. 3

(美国MCM/ICM竞赛指导丛书 / 王杰主编)

ISBN 978-7-04-049292-7

I. ①美… II. ①余… III. ①数学模型 - 竞赛题 - 研究 IV. ①O141.4-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第020191号

Meiguo Daxuesheng Shuxue Jianmo Jingsaiti Jiexi yu Yanjiu

策划编辑 刘英
插图绘制 于博

责任编辑 刘英
责任校对 王雨

封面设计 李卫青
责任印制 田甜

版式设计 童丹

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印刷 三河市宏图印务有限公司
开本 787mm×1092mm 1/16
印张 13.75
字数 220千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
版 次 2018年3月第1版
印 次 2018年3月第1次印刷
定 价 49.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究
物料号 49292-00

“美国 MCM/ICM 竞赛指导丛书”

编审委员会

顾 问

Sol Garfunkel	美国数学及应用联合会 (COMAP)
Chris Arney	西点军校
Patrick Driscoll	西点军校
William P. Fox	美国海军研究生院

主 编

王 杰	麻省大学罗威尔分校
-----	-----------

副主编

叶其孝	北京理工大学
-----	--------

秘 书

毛紫阳	国防科学技术大学
-----	----------

委 员 (按姓氏拼音排序)

Amanda Beecher	新泽西拉马波学院
Jay Belanger	杜鲁门州立大学
Jerrold R. Griggs	南卡罗来纳大学
Joseph Myers	美国陆军研究部
Rodney Sturdivant	阿兹塞太平洋大学
陈秀珍	乔治华盛顿大学
龚维博	麻省大学阿默斯特分校
韩中庚	解放军信息工程大学
贺明峰	大连理工大学
贺祖国	北京邮电大学
刘深泉	华南理工大学
鲁习文	华东理工大学
谈之奕	浙江大学
谭 忠	厦门大学

王嘉寅	圣路易斯华盛顿大学
吴孟达	国防科学技术大学
叶正麟	西北工业大学
张存权	西弗吉尼亚大学

COMAP 总裁序

美国大学生数学建模竞赛 (the Mathematical Contest in Modeling, MCM) 已经举办近 30 年了, 时间真是快得难以置信。在此期间, 竞赛从最初参赛的 90 支美国队逐渐发展成为一个国际大赛, 今年已有来自世界各地的 25 个国家超过 5000 支队伍参赛。尤其令人感动和鼓舞的是, 我的中国同行们对竞赛赋予的极大热情以及中国参赛队伍的快速增长。COMAP 张开双臂欢迎你们的参与。

COMAP 每年举办三类建模竞赛, 即 MCM、ICM (the Interdisciplinary Contest in Modeling) 和 HiMCM (the High School Mathematical Contest in Modeling) 竞赛。竞赛的目的不仅仅是奖励同学们所作出的努力——无疑这是同样重要的, 我们举办各类数学建模竞赛的目的始终是为了推动在世界各国的各级教育体系中增加应用数学及数学建模的比重。建模是人们为了解世间事物的运作规律所做的尝试, 数学的使用能够帮助我们建立更好的模型。这不是一个国家的任务, 而是所有国家都应该共同关心的问题。COMAP 建模竞赛从孕育到现在已经演变成成为实现这一宏伟目标的有力工具。

我热切地希望同学们通过阅读这套优秀的丛书, 对 COMAP 举办的竞赛有更多的了解, 并且学到更多有关数学建模的方法与过程。我希望同学们尝试自己解决丛书中讨论的所有建模问题, 这些都是令人兴奋并且具有实用价值的问题。我希望更多的同学参加 MCM/ICM 竞赛, 并参与推广和普及数学建模的活动, 这是很有意义的工作。

Sol Garfunkel, 博士

COMAP 总裁

2012 年 11 月

MCM 竞赛主席序

数学建模是一项具有挑战性的活动，不但新手有这样的感觉，已经从事数学建模多年的专家也会有这样的感觉。积累建模经验无疑能提升解题的效率，但绝不可指望照搬前一个问题的解决方法到新问题的求解上。时间和环境的改变会影响模型参数和假设条件的设立，某些参数或许需要放大，某些假设或许需要更改，某些参数或假设或许需要舍弃。原本已经很清楚的问题，即使参数和假设都不变，仍有可能仅仅因为需要回答新的问题而变得难解。

数学建模的这些特点使参加 MCM 竞赛变得意义非凡。无论竞赛结果如何，同学们愿意付出一段自己的时间去思考和解决一个不熟悉的问题，仅此一点就足以体现同学们的强烈求知欲望和进取精神。而参加建模竞赛所体验到的成就感以及所获得的结果对知识的贡献，无疑会吸引更多的同学参加数学建模活动，好比打高尔夫球，击出的好球能改变原本寻常的局面，并希望继续打下一场。

我的一位作家朋友说，小说能使读者获得心灵感应，作者用文字向读者描绘一个场景、表达一个想法或者叙述脑海中的一个情节，如果写得好，就能使世界另一边的读者“看”到作者想要表达的意图和景象。数学教学特别是数学建模的教学，在许多方面也是一个类似的过程。

作为教育者，我们使用各种符号、图表、文本和图像向学生们解释难懂的概念，希望同学们能从其中一些表述方式中对这些概念获得更深刻的认识，并以此为立足点建立自己的符合逻辑的理解。这种理解能帮助同学们在数学、科学及工程领域获得创意，这些创意是无法通过其他手段获得的。模式匹配和模仿，虽然表面上也许能产生类似的结果，但却不能从根本上激发创新。

自 MCM 竞赛开办之初，我们发表了许多评委对如何将数学建模恰如其分地融入竞赛论文方面的建议和评论，其目的是帮助新参加数学建模的团队和机构了解 MCM 竞赛的宗旨及细节、指导教师在帮助团队准备参赛中的重要性以

及如何在有限的时间内完成 MCM 竞赛所要求的各项任务。

建议参加 MCM 竞赛的同学,即使已经受过良好的数学建模训练,在递交论文前也应按这些忠告详细检查论文内容的完整性。这些忠告不是给同学们提供按部就班的取胜秘诀,而是提供一个框架,帮助团队作为努力的起点和努力的方向,取得满意的成绩。

生活中许多事情不可急于求成,没有捷径可走,学习现有的技巧和模板能够有所帮助,但理解需要时间。数学建模也是如此。正因为这样,每个团队的解答都是特别的,我们必须牢记这一点。

Patrick J. Driscoll 博士
美国西点军校运筹学教授
MCM 竞赛主席
2016 年 4 月

ICM 竞赛主席序

数学建模的训练与经验能使同学们在解决问题时更有创意，同时也能帮助同学们成为更为优秀的研究生。“美国 MCM/ICM 竞赛指导丛书”的出版，将通过数学建模竞赛题目和概念的解析，帮助同学们掌握数学建模的技能，并为同学们在今后的工作中获得成功打下坚实的基础。

数学建模是一种过程，也是一种理念，或者说是一种哲学。作为过程，学生在理解及使用建模过程或框架时需要指导并积累经验。作为经验，学生需要使用不同的数学方法（离散、连续、线性、非线性、随机、几何及分析）构造数学模型，从中体验不同的细节及复杂程度。作为理念，学生需要发现各种相关的、具有挑战性的及有趣的实际问题，从中培养数学建模的兴趣，并认识到数学建模在实际生活中的作用。数学建模的主要目的是指导学生用建模的方法解决实际问题。尽管在实际中，有些问题或许可以使用已有的算法和公式来求解，但数学建模的方法比简单使用已有算法和公式能解决更多的问题，特别是解决新的、没有固定答案及没有被解决过的问题。

为了积累经验，同学们应尽早地接受数学建模的训练，至少应该在大学低年级就开始，这样可以在以后的课程学习中进一步强化数学建模能力。由于数学建模的综合与交叉特性，所以各个专业的学生都能够从数学建模活动中受益。

本套丛书将数学模型作为研究工具的角度出发，包括介绍模型的构造，分析建模过程，这些都是帮助学生更好地掌握数学建模技能的重要因素。数学建模是充满挑战的高级技能，更重要的是能够帮助学生更快地成长。当今世界需要解决的问题往往很复杂，所以建立的数学模型也很复杂，通常需要通过精细的计算和模拟才能获得解答或得到对模型结果的分析与检验。由于数据可视化技术的普及，解题方法的增加，所以现在是培养更多数学建模高手的最佳时期。

我希望同学们在数学建模探索中取得进步，也希望指导教师在使用这套丛

书提供的例子及方法指导学生时取得更好的效果。尽管学生的层次可能不同,但我对你们的忠告是同样的: 树立你的信心、发挥你的技能, 用你的才能解决社会中最具挑战性及最重要的问题。祝各位建模好运!

Chris Arney, 博士

美国西点军校数学系教授

ICM 竞赛主席

2011 年 10 月

从书简介

美国大学生数学建模竞赛 (the Mathematical Contest in Modeling, MCM/the Interdisciplinary Contest in Modeling, ICM), 即“数学建模竞赛”和“交叉学科建模竞赛”, 是一项国际级的竞赛活动, 为现今各类数学建模竞赛的鼻祖。

1985 年, 在美国教育部的资助下, 美国数学与应用联合会 (the Consortium for Mathematics and Its Application, COMAP) 针对在校大学生创办了一个名为“数学建模竞赛”的赛事, 其宗旨是鼓励大学师生对不同领域的各种实际问题进行阐明、分析并提出解决方案。它是一种完全公开的竞赛, 当时共 2 道题目, 参赛形式为学生 3 人组成一队, 在 3 天 (72 小时。近年改为 4 天, 即 96 小时) 内任选一题, 完成数学建模的全过程, 并就问题的重述、简化和假设及其合理性的论述、数学模型的建立和求解 (包括软件)、检验和改进、模型的优缺点及其可能的应用范围与自我评价等内容写出论文。MCM/ICM 非常重视解决方案的原创性、团队合作与交流以及结果的合理性。由专家组成的评阅组进行评阅, 评出优秀论文。除了不允许在竞赛期间与团队外的任何人 (包括指导教师) 讨论赛题之外, 允许使用图书资料、互联网上的资料、任何类型的计算机程序和软件等各种资料和途径, 为参赛学生提供了广阔的创作空间。第一届竞赛时, 只有美国的 158 个队报名参加, 其中只有 90 个队提交了解答论文。2017 年 MCM/ICM 共有 16 928 个队参加, 其中 MCM 有 8843 个队, ICM 有 8085 个队, 遍及五大洲。MCM/ICM 已经成为最著名的国际大学生竞赛之一, 影响极其广泛。

近年来, 已有越来越多的中国学生组队参加美国大学生数学建模竞赛, 涌现出很多被评为优胜论文 (Outstanding Winners) 的佼佼者, 这充分显示出我国大学生参加 MCM/ICM 的积极性与实力。同学们在准备竞赛的时候, 除了在指导教师的帮助下阅读和研究以往竞赛的优胜论文以外, 普遍希望能有一些专门针对美国大学生数学建模竞赛的书籍, 指导和帮助备赛。

“美国 MCM/ICM 竞赛指导丛书”就是为了满足读者的这一需求而出版的,目的是帮助学生从全局出发,不受固定模式的限制,用建模的手段解决开放型问题的研究方法,并提高写作能力。丛书的读者对象包括参赛学生及对数学建模与算法感兴趣的研究生、专业人员和业余爱好者。

我们邀请到 COMAP 中国合作总监、美国麻省大学罗威尔分校王杰教授担任丛书主编,他曾为 MCM/ICM 命题并多次参加竞赛论文的终评,对竞赛具有很多独到的认识。丛书作者来自美国和中国各高校,他们都是有经验的指导教师,有的担任过 MCM/ICM 竞赛论文的评委,有的曾多次带队获奖。

丛书包括 3 个子系列。第一个子系列包括《正确写作美国大学生数学建模竞赛论文》及其第 2 版和若干辑《美国大学生数学建模竞赛题解析与研究》,前者为指导学生如何正确写作 MCM/ICM 论文的工具书,后者中的每一辑将讨论若干赛题,包括问题的背景、分析技巧、建模与测试方法及算法设计,并引导读者列出进一步研究的课题。第二个子系列包括若干辑《数学建模思想与方法》,每个专辑结合 MCM/ICM 赛题将数学建模中的某种方法做全面和深入的讲解。第三个子系列为英文系列,对每年的赛题进行全面和综合的讲解,每年一辑,这个子系列同时由 COMAP 负责在海外发行。丛书的最终目标是培养学生多方面的能力,如数学、编程、写作及课题研究等,提高学生分析问题、解决问题的水平。丛书相关信息请参考网页 www.mcmbooks.net。

丛书的出版计划得到了美国数学建模专家的广泛支持,COMAP 执行总监 Sol Garfunkel 博士, MCM 竞赛主席、美国西点军校运筹学教授 Patrick Driscoll 博士,以及 ICM 竞赛主席(也是 ICM 的发起人)、美国西点军校数学系教授 Chris Arney 博士受邀担任丛书顾问并为丛书作序,担任丛书顾问的还有 MCM 竞赛前主席、美国海军研究生院工业数学教授 William Fox 博士。我们热切希望通过这套丛书的出版,进一步调动我国大学生参加 MCM/ICM 的积极性,增强信心,并取得满意的成绩。更为重要的是,提高学生研究和解决实际问题的能力。

前言

美国大学生数学建模竞赛分为 MCM (Mathematical Contest in Modeling) 和 ICM (Interdisciplinary Contest in Modeling) 两种。该竞赛自 1985 年开始, 至今已经 30 余年。在 2015 年前, 每年赛题都为 3 题, 其中 MCM 2 题, ICM 1 题。自 2016 年开始变为 6 题, 其中 MCM 3 题, ICM 也为 3 题。美国大学生数学建模竞赛的宗旨是鼓励大学生运用所学的知识 (包括数学知识及其他方面的知识) 去参与解决实际问题。这些实际问题并不限于某个特定领域, 可以涉及非常广泛的、并不固定的范围。一般没有事先设定的标准答案, 有充分的空间供参赛者展示其聪明才智和创造精神, 可促进应用型与创造型人才的培养。美赛题目的特点是题材广泛, 通常与实际问题联系密切, 具有应用性、探究性、开放性和挑战性。

2011 年和 2012 年的赛题同样具有这样的特点。2011 年 MCM 的 A 题是 “Snowboard Course”, 探讨的是如何设计优化一个单板滑雪场, 使得一个熟练的单板滑雪选手在离开 U 型池的边缘后, 最大限度地产生垂直腾空高度来保证完成各种空中技巧。该年 MCM 的 B 题是 “Repeater Coordination”, 需要参赛者研究的是信号传输领域的中继器部署问题, 并考虑山区情形。该年 ICM 的 C 题是 “How environmentally and economically sound are electric vehicles?”, 要求参赛者探讨电动汽车未来的发展, 以及对电动汽车和燃油汽车对环境污染的对比分析, 电动汽车未来带来的经济效益和便利之处。2012 年 MCM 的 A 题是 “The Leaves of a Tree”, 要求参赛者建立模型估计一棵树上叶子的质量, 并对不同的叶子进行分类, 探讨叶子形状与树的轮廓和分支结构的关系。该年 MCM 的 B 题为 “Camping along the Big Long River”, 该问题要求合理安排到大隆河漂流的游客露营问题, 需要参赛者建立数学模型给出最优方案, 并向管理者提出合理建议。该年 ICM 的 C 题为 “Modeling for Crime Busting”, 要求参赛者建立网络模型有效地识别罪犯, 并将该方法推广到其他网络。

这些问题具有很强的前沿性、现实性和应用性。参赛者需要查找很多资料和数据,在组内进行充分的讨论,经过艰苦的4天4夜才能完成赛题。在参赛过程中,既需要建立合适的数学模型,也需要大量的编程计算,最后还要用英文写成一篇漂亮的论文。通过这样一次参赛,锻炼了参赛者的多种能力,参赛者如同进行了一次小型的科研项目。很多参赛者一次参赛,终身受益和难忘。

本辑就2011、2012年MCM/ICM的A、B和C题共6道赛题的若干数学建模方法,结合当年获奖的优秀论文进行了介绍和分析。本辑由余红伟撰写第1章,张莹撰写第2章,肖华勇撰写第3章,蔡力撰写第4章,潘璐璐撰写第5章,周丙常撰写第6章。肖华勇负责组稿和统稿。

希望本书对参加美国数学建模竞赛的同学和老师有所帮助。书中不妥之处,敬请读者批评指正。

肖华勇

2017年12月

目录

COMAP 总裁序

MCM 竞赛主席序

ICM 竞赛主席序

丛书简介

前言

第 1 章 单板滑雪场设计问题	1
1.1 问题的综述	1
1.1.1 问题的提出	1
1.1.2 问题的分析	2
1.2 问题的数学模型与结果分析	3
1.2.1 模型一: 基于能量守恒的力学模型	4
1.2.2 模型二: 基于横截面轮廓曲线设计的力学模型	11
1.3 问题的综合分析与进一步研究的问题	24
1.3.1 问题的综合分析	24
1.3.2 进一步研究的问题	26
参考文献	27
第 2 章 中继器协调问题	28
2.1 问题的综述	28
2.1.1 问题的提出	28
2.1.2 问题的背景资料	30

2.1.3 问题的现实意义	31
2.2 问题的数学模型与结果分析	31
2.2.1 模型一: 基于泰森多边形的迭代优化模型	32
2.2.2 模型二: 基于聚类分析的蛇形模型和分支模型	46
2.2.3 模型三: 基于聚类分析的网络质心搜索模型	54
2.3 问题的综合分析 with 进一步研究的问题	62
2.3.1 问题的综合分析	62
2.3.2 进一步研究的问题	64
参考文献	64
第 3 章 电动汽车的未来	66
3.1 问题的综述	66
3.1.1 问题的提出	66
3.1.2 问题的背景资料	70
3.2 问题的数学模型与结果分析	72
3.2.1 模型一: 燃油型、电动型以及混合型汽车的对比	73
3.2.2 模型二: 静态模型和动态模型	88
3.3 问题的综合分析 with 进一步研究的问题	100
3.3.1 问题的综合分析	100
3.3.2 进一步研究的问题	101
参考文献	101
第 4 章 一棵树的叶子	103
4.1 问题的综述	103
4.1.1 问题的提出	103
4.1.2 问题的背景资料	104
4.2 问题的数学模型与结果分析	106
4.2.1 叶形分类模型	106
4.2.2 叶形与重叠区域的相关模型	110
4.2.3 叶形与树叶分布的相关模型	114