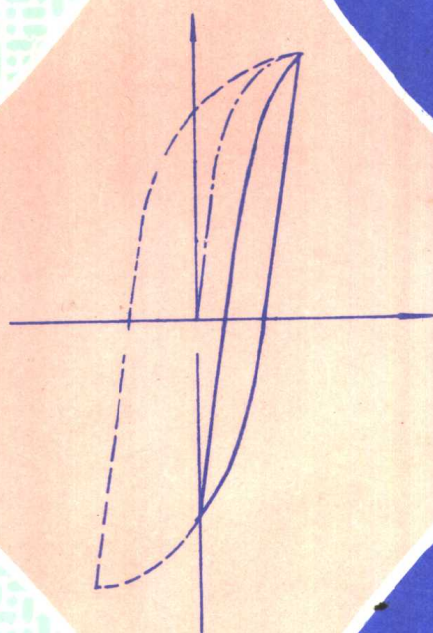


工 程 塑性理论

张 行 吴国勋 编著
徐秉业 审



北京航空航天大学出版社

工程塑性理论

张 行 吴国勋 编著
徐秉业 审

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

《工程塑性理论》是一部研究生教材。它是作者在多年从事塑性理论教学与科研工作基础上写成的,具有一定的学术专著性质。本书内容分为两大部分。第一部分介绍塑性理论的基本内容,共五章,包括屈服准则、本构关系、简单问题解法、滑移线场理论以及极限分析理论。第二部分是为满足结构与机构设计需要而设置的特殊内容,共五章,包括硬化材料构件在单调与循环载荷作用下、在无应力集中与有应力集中情况下弹塑性问题的封闭解法以及弹塑性稳定问题。

本书读者对象为固体力学与飞行器结构、航空发动机构造以及其他多种工程结构与机械设计专业的研究生,并对以上专业的本科生、教师以及科技工作者具有重要参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

工程塑性理论/张行编著. —北京:北京航空航天大学出版社, 1998. 6

ISBN 7-81012-784-5

I. 工… II. 张… III. 工程材料-塑性 IV. TB303

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 06264 号

工 程 塑 性 理 论

张 行 吴国勋 编著

徐秉业 审

责任编辑 王小青

责任校对 张韵秋

*

北京航空航天大学出版社出版发行

(北京市学院路 37 号 100083), 发行部电话 62015720)

涿州新华印刷厂印装 各地书店经销

*

开本: 787×1092 1/16 印张: 12.75 字数: 323 千字

1998 年 7 月第 1 版 1998 年 7 月第 1 次印刷 印数: 2 000 册

ISBN 7-81012-784-5/TB·062 定价: 15.00 元

序 言

到目前为止,在国内、外已经出版了多种关于塑性理论,或称塑性力学的优秀教科书。这些教科书对有关专业的教学、科研与生产曾经发挥了,并正在发挥着巨大的作用。

对于飞行器结构设计,我们不仅需要塑性理论作为力学基础,而且需要进一步考虑如下三方面的情况:

1. 材料在进入塑性状态后具有明显的硬化特性;
2. 对于多次使用的飞行器,构件要负担重复载荷,并多次进入塑性状态;
3. 对于结构设计工程师,闭合形式解答可以提高计算效率、缩短设计周期。

对于以上三种情况,有些教科书考虑到了其中一种或两种情况。但是还缺少一部教科书,全面地考虑以上三种情况。

本书作者在教学与科研过程中为解决以上问题进行了一定的努力,取得了一定的成果,因此试图编写一部同时考虑以上三种情况的塑性理论教科书,以满足飞行器设计专业的需要。

在本书中,我们将塑性理论中传统的基本内容,包括屈服准则、本构关系、简单问题、滑移线理论与极限分析理论作为前五章,并在第六、七两章中分别介绍单调加载硬化材料在无应力集中情况下的能量原理封闭解法以及在有应力集中情况下的守恒积分封闭解法,同时在第八、九两章中分别介绍循环加载硬化材料弹塑性分析的一般原理(包括无应力集中情况下的能量原理封闭解法)以及有应力集中情况下的守恒积分封闭解法(包括安定分析与低周疲劳研究),最后在第十章中介绍杆与板的弹塑性稳定性问题。这种安排可以使得飞行器结构设计的专业需要与塑性理论的基本要求同时得到满足。

除飞行器外,对于车辆、船舶、桥梁以及海洋平台等多次使用的设备,在进行结构设计时,同样需要考虑以上三个方面的情况。因此,本书对这些专业至少具有一定参考价值。

至于塑性理论的数值分析方法与塑性动力学方面的内容,请读者阅读有关专著。

作 者

1998年1月

绪 论

我们知道物体在外力作用下会产生变形。当外力小于某一临界值时,整个物体处于弹性变形阶段,如果移去外力,变形将全部消失,物体完全恢复其原有的状态;但当外力大于上述临界值时,在移去外力后,变形将局部保留,物体不再恢复其原有的状态。

塑性理论是固体力学的一个分支,是研究当物体所受外力大于某一临界值,卸载不能使物体恢复原状时,物体内部的应力、应变和位移的一门学科。这门学科从一开始就分为两大范畴:物理理论和数学理论。物理塑性理论主要是以微观的物质结构为基础,对物体在外力作用下的响应进行定性的研究。因而,它属于金属物理学或固态物理学的范畴。而数学塑性理论则是以宏观实验结果为基础,提出力学模型,给出数学解法,对物体在外力作用下的响应进行定量的研究,以便解决工程实际问题。本书的内容属于数学塑性理论的范畴。

塑性理论是弹性理论的进一步发展,它属于固体力学的范畴,因而,它与弹性理论有着密切的关系。弹性理论中的许多基本方程和求解方法都可以在塑性理论中不同程度地得到应用。在弹性理论中,在小变形条件下所得到的内力与外力之间的平衡关系、应变与位移之间的几何关系是和材料性质无关的,因而,它们在小弹塑性理论中仍然有效。弹性理论和塑性理论之间的根本差别就在于应力与应变之间的物理方程(本书中称为本构方程)。在弹性理论中,应力与应变之间的物理关系是线性的,即使对非线性体而言,物理关系也是单值的,与加载路径无关。但在塑性理论中,应力与应变之间的物理关系不仅是非线性的,而且不是单值的,与加载路径有关。因此,在处理塑性理论问题时,物理关系的非线性与多值性会造成数学方面的困难。为了克服这些困难,就需要针对不同问题的特点提出不同的力学模型,采用不同的数学解法。

以工程实际应用而论,塑性理论又有两个不同的分支。其一是应用于金属成形过程,如锻造、挤压、冷拔和滚轧等。这些加工要求材料具有很大的变形,因此,在处理这类问题时,常常略去弹性变形。其二是应用于结构与机械设计。在这些设计中,往往要求物体只能具有很小的变形,因此,在处理这类问题时,往往还需要考虑弹性变形。本课程的重点在于后者。

塑性理论对于结构设计,特别是飞行器的结构设计,具有重要的实际意义。在飞行器的设计中,为了提高产品的性能,应在保证结构具有高度可靠性的前提下,尽量减轻结构质量。为此,有关的强度规范提出了如下的两方面要求:

1. 在最大使用载荷作用下,结构中的最大应力不得超过材料屈服应力;
2. 在设计载荷作用下,结构中的最大应力不得超过材料强度极限(设计载荷应等于最大使用载荷乘以安全系数,安全系数介于 1.5 至 2.0 之间)。

前一要求需由弹性理论的方法予以满足,而后一要求则需由塑性理论的方法得到解决。

本书的目的在于为结构设计提供必要理论基础。

目 录

绪 论

第 1 章 屈服准则

1-1 初始屈服准则的一般讨论	1
1-2 两个常用的初始屈服准则	4
1-2-1 Tresca 准则	4
1-2-2 Mises 准则	5
1-3 后继屈服准则与加载准则	7
1-4 几种常用的后继屈服准则	9
1-4-1 各向同性后继屈服准则	9
1-4-1-1 加工硬化法则	9
1-4-1-2 应变硬化法则	10
1-4-2 随动后继屈服准则	11
1-4-3 复合后继屈服准则	12
习 题	13

第 2 章 塑性本构关系

2-1 塑性本构关系的增量理论	15
2-1-1 塑性应变增量矢量的方向确定——Drucker 公设	15
2-1-2 塑性应变增量分量的大小确定——自洽原则	18
2-1-2-1 各向同性后继屈服准则	19
2-1-2-2 各向异性后继屈服准则	19
2-1-3 塑性应变增量的几何表示方法	20
2-2 两种常用的增量理论	21
2-2-1 与 Tresca 准则相关的增量理论	22
2-2-2 与 Mises 准则相关的增量理论	23
2-3 塑性本构关系的全量理论	24
2-3-1 全量理论的建立	24
2-3-2 全量理论的能量形式	26
2-3-3 简单加载定理	27
2-3-4 关于全量理论的讨论之一	28
2-3-5 关于全量理论的讨论之二	29
习 题	30

第3章 弹塑性简单问题

3-1 弹塑性力学的边值问题	32
3-1-1 弹塑性全量理论的边值问题	32
3-1-2 弹塑性增量理论的边值问题	33
3-2 受轴对称载荷的厚壁圆筒	33
3-2-1 基本关系	33
3-2-2 理想塑性材料的厚壁筒	34
3-2-2-1 弹性解与塑性屈服	34
3-2-2-2 弹塑性解 Tresca 准则	36
3-2-2-3 弹塑性解 Mises 准则	37
3-2-3 硬化材料的厚壁筒	40
3-2-3-1 一般硬化材料	40
3-2-3-2 幂函数硬化材料	41
3-2-3-3 线性硬化材料	41
3-3 棱柱杆的弹塑性扭转	43
3-3-1 基本关系	43
3-3-2 理想塑性材料的全塑性扭转与 Nadai 沙堆比拟	45
3-3-3 理想塑性材料的弹塑性扭转与 Nadai 薄膜-屋顶比拟	48
3-4 圆柱拉伸试件缩颈处的应力分布	49
习 题	51

第4章 滑移线场理论

4-1 平面应变滑移线场基本方程	53
4-1-1 几何方程	53
4-1-2 本构方程	53
4-1-3 屈服准则	54
4-1-4 平衡方程	54
4-2 滑移线场的概念及其基本方程	55
4-2-1 滑移线场的基本概念	55
4-2-2 平衡方程	56
4-2-3 速度方程	57
4-2-4 应力边界条件	58
4-3 滑移线场的基本特性	59
4-3-1 Hencky 第一定理	59
4-3-2 Hencky 第二定理	60
4-4 基本的滑移线场	61
4-4-1 两族直线滑移线场	61
4-4-2 中心扇形滑移线场	62

4-4-3 轴对称滑移线场	63
4-5 应力和速度场的间断线	65
4-5-1 应力间断线	65
4-5-2 速度间断线	66
4-6 具有双边对称切口的长板条拉伸	67
4-6-1 V形切口情况	67
4-6-2 圆形底边切口情况	69
4-6-2-1 $h/a \leq 3.81$ 的情况	69
4-6-2-2 $h/a > 3.81$ 的情况	70
4-7 具有单侧圆形切口板条的弯曲	71
习 题	73

第5章 极限分析理论

5-1 具有间断场的虚功原理	75
5-1-1 基本概念与基本关系	75
5-1-2 具有应力间断面的虚功率原理	76
5-1-3 具有速度间断面的虚功率原理	76
5-2 极限分析的界限定理	77
5-2-1 极限分析的基本概念	77
5-2-2 下限定理	78
5-2-3 上限定理	79
5-3 具有单边切口板条的弯曲	80
5-4 具有中心圆孔方板的拉伸	81
5-4-1 板极限载荷的下限	81
5-4-2 板极限载荷的上限	83
5-5 轴对称圆板的弯曲	86
5-5-1 基本方程	86
5-5-2 受均布载荷周边简支的圆板	88
5-6 矩形与多边形板的弯曲	89
5-6-1 确定上限的机动法	89
5-6-2 确定下限的静力法	92
5-7 轴对称圆柱壳的极限分析	94
习 题	98

第6章 单调加载硬化材料弹塑性问题的能量解法

6-1 全量理论的势能原理	100
6-1-1 基本关系	100
6-1-2 势能原理	101
6-2 自由扭转的弹塑性分析	103

6-2-1 基本关系和解法原理	103
6-2-2 算 例	105
6-3 平板的弹塑性分析	107
6-3-1 基本关系和解法原理	107
6-3-2 四边固支受均布载荷的板	109
6-4 轴对称圆柱壳的弹塑性分析	111
6-4-1 基本关系及解法原理	111
6-4-2 中间截面受径向线载荷 p 的长柱壳	113
6-5 解法精度的讨论	115
6-6 全量理论的余能原理	119
6-6-1 基本关系	119
6-6-2 余能原理	120
6-7 直梁的弹塑性分析	122
6-7-1 基本关系和解法原理	122
6-7-2 近似封闭解	124
习 题	126

第7章 单调加载硬化材料弹塑性应力与应变集中问题的守恒积分解法

7-1 平面应力问题	128
7-1-1 平面应力问题的基本方程	128
7-1-2 平面应力问题的守恒积分	129
7-1-3 平面应力问题应力与应变集中的封闭解法	130
7-1-4 封闭解法的验证	132
7-1-5 极限拉力的预测	133
7-2 轴对称杆的扭转问题	134
7-2-1 轴对称杆扭转问题的基本方程	134
7-2-2 轴对称杆扭转问题的守恒积分	135
7-2-3 轴对称杆扭转问题应力与应变集中的封闭解法	136
7-2-4 封闭解法的验证	137
7-2-5 极限扭矩的预测	138
7-3 轴对称杆的拉压问题	140
7-3-1 轴对称杆拉压问题的基本方程	140
7-3-2 轴对称杆拉压问题的守恒积分	140
7-3-3 轴对称杆拉压问题应力与应变集中的封闭解法	141
7-3-4 封闭解法的验证	144
7-3-5 极限轴力的预测	147
习 题	148

第 8 章 循环载荷作用下的弹塑性分析

8-1 单轴受力循环加载下的应力-应变关系	149
8-2 多轴受力循环加载下的本构关系	153
8-3 循环载荷作用下的应力分析	154
8-4 塑性滞后回环与低周疲劳	156
习 题	158

第 9 章 循环加载硬化材料弹塑性应力与应变集中问题的守恒积分解法

9-1 含缺口板在循环载荷作用下的守恒积分	159
9-2 含缺口板在循环载荷作用下的应力与应变集中分析	160
9-3 循环理想模型下的应力与应变集中分析	164
9-4 独立硬化模型下的应力与应变集中分析	166
9-5 独立硬化模型下的安定状态分析	167
9-6 独立硬化模型下的低周疲劳分析	173
习 题	175

第 10 章 弹塑性平衡的稳定性

10-1 恒载荷作用下压杆的塑性临界应力	176
10-2 变载荷作用下压杆的塑性临界应力	180
10-3 受压平板的临界载荷	185
10-3-1 基本方程和边界条件	185
10-3-2 单向受压两边简支板条的临界压力	188
10-3-3 单向受压四边简支矩形板的临界压力	189
习 题	190

参考文献	191
------------	-----

第1章 屈服准则

1-1 初始屈服准则的一般讨论

图 1.1 表示在单轴受力情况下塑性材料的拉压实验。由该图可知当应力 σ 达到屈服应力 σ_s 时,材料便由初始弹性状态进入塑性状态。 $\sigma = \pm \sigma_s$ 就是单轴应力状态下的初始屈服准则。在一般应力状态下,存在着无限多个应力组合,故不可能单纯依靠实验确定初始屈服准则。因而,必须从理论上建立初始屈服准则的一般形式,即材料屈服时应力分量应满足的方程。

在任一可能应力组合下定义初始弹性极限的准则,称为初始屈服准则。初始屈服准则可写为

$$f(\sigma_{ij}) = k \quad (1.1.1)$$

或

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \alpha, \beta, \gamma) = k \quad (1.1.2)$$

其中, σ_i 为主应力; α, β, γ 为确定主方向的几何量; f 称为屈服函数; k 为材料常数。

为确定屈服函数的形式,我们采用以下关于材料性质的简化假设:

1. 材料是初始各向同性的;
2. 屈服与静水应力(即应力球量)无关。

由假设 1,材料的初始屈服与主应力的方向无关,故初始屈服函数具有如下形式:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = k \quad (1.1.3)$$

或

$$f(I_1, I_2, I_3) = k \quad (1.1.4)$$

其中, I_i 为应力分量的坐标变换不变量,并以主应力表示如下:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.5)$$

由假设 2,材料的初始屈服与应力球量无关,因而,有

$$f(s_1, s_2, s_3) = k \quad (1.1.6)$$

这里, s_i 为应力的主偏量,即 $s_i = \sigma_i - \sigma_m$; σ_m 是三个主应力的平均值,即平均应力,亦称之为应力球量。进一步,上式亦可改写如下:

$$f(J_2, J_3) = k \quad (1.1.7)$$

其中, J_i 为应力偏量的不变量,并有如下表达式:

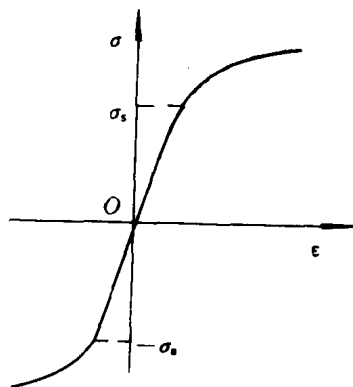


图 1.1 单轴受力屈服

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= s_1 + s_2 + s_3 = 0 \\ J_2 &= \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \\ J_3 &= \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} = \frac{1}{3} (s_1^3 + s_2^3 + s_3^3) \\ s_{ij} &= \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_m = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{rs} \sigma_{rs} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.8)$$

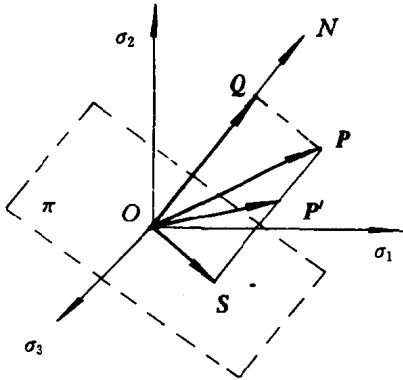


图 1.2 应力矢量

由于初始屈服准则只与三个主应力分量有关,所以可以利用一个主应力为直角坐标系的三维空间中的应力矢量 OP 表示体元的应力状态。点 P 的坐标为 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$,如图 1.2 所示。

取直线 ON 和三轴成等倾角,则 ON 的方向余弦为

$$l_1 = l_2 = l_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (1.1.9)$$

令 OP 在 ON 上的投影为 OQ ,则

$$|OQ| = \sigma_i l_i = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sqrt{3} \sigma_m \quad (1.1.10)$$

过原点并垂直于 ON 的平面称为 π 平面。 OP 在 π 平面上的投影为 OS 。显然

$$OP = OS + OQ \quad (1.1.11)$$

若以 i, j, k 分别表示 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 方向的单位矢量,则

$$OP = \sigma_1 i + \sigma_2 j + \sigma_3 k \quad (1.1.12)$$

$$OQ = \sigma_m i + \sigma_m j + \sigma_m k \quad (1.1.13)$$

从而

$$\begin{aligned} OS &= OP - OQ \\ &= (\sigma_1 - \sigma_m) i + (\sigma_2 - \sigma_m) j + (\sigma_3 - \sigma_m) k \\ &= s_1 i + s_2 j + s_3 k \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

因此,点 S 的坐标就是偏量的主分量,点 Q 的坐标是球量的分量。

显然, π 平面的方程为

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad (1.1.15)$$

当应力矢量位于 π 平面上时, $\sigma_m = 0$,故 OS 的三个分量自然满足以下关系:

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0 \quad (1.1.16)$$

屈服函数式(1.1.7)可用应力空间的曲面表示。该曲面称为屈服曲面。为了研究屈服曲面的形状,我们考虑过点 P 平行于直线 ON 的直线 PS 上另一应力状态的点 P' 。显然, OP' 在 π 平面上的投影也是 OS 。因此,点 P 和 P' 所代表的两个应力状态具有相同的偏量,而不同的只是它们的球量。从而可知,在过点 P 平行于直线 ON 的直线 PS 上所有点的应力状态都具有相同的偏量。根据假设 2 可以断定:如果过点 P 平行于直线 ON 上的一点在屈服曲面上,则该直线上的所有点必然均在此屈服曲面上,因为它们具有相同的偏量。从而可知,屈服曲面必然是母线

平行于 ON 的柱状曲面。这样,只要确定屈服曲面与 π 平面交线 C 的形状就可知道该屈服曲面的形状。曲线 C 称为屈服曲线或屈服轨迹。它是屈服曲面在 π 平面内的投影。

下面,研究屈服曲线 C 的形状。在图 1.3 中以纸平面为 π 平面,并以 σ_i^* 表示坐标轴 σ_i 在 π 平面上的投影。显然, $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*$ 三轴之间的夹角均为 120° , 而且有 $\sigma_i^* = \sqrt{2/3}\sigma_i$ 。

根据假设 1, 若点 $S(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*)$ 在曲线 C 上, 则点 $S'(\sigma_1^*, \sigma_3^*, \sigma_2^*)$ 也应在曲线 C 上。这就是说, 如果施加 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 会使材料屈服, 则将 σ_2 与 σ_3 互换也会使材料屈服。因此, 屈服曲线 C 对称于轴 σ_1^* 。同理, 屈服曲线 C 也应对称于轴 σ_2^* 与轴 σ_3^* 。进一步, 根据假设 1, 若点 $S(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*)$ 在屈服曲线 C 上, 则点 $S''(-\sigma_1^*, -\sigma_2^*, -\sigma_3^*)$ 也应在屈服曲线 C 上, 即屈服曲线 C 对称于原点。由于屈服曲线 C 对称于轴 σ_1^* 、轴 σ_2^* 和轴 σ_3^* , 同时也对称于点 O , 从而屈服曲线 C 应对称于过点 O 垂直于轴 σ_1^* 、轴 σ_2^* 和轴 σ_3^* 的三条直线。

综上所述可知: 在被六条直线分割的 12 个 30° 辐角中屈服曲线具有相同的形状, 因此, 只研究其中一个就可以了。

下面, 确定屈服曲面上点 P 在 π 平面上投影点 S 的位置。以 r 和 θ 表示点 S 在 π 平面内的极坐标, 令 a, b 为点 S 的直角坐标, 如图 1.4 所示。

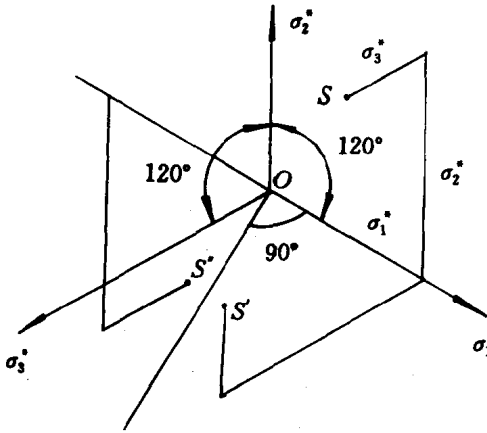
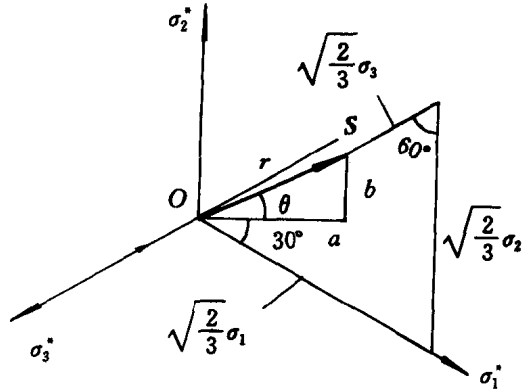


图 1.3 初始屈服轨迹

图 1.4 π 平面

由该图可知

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_1 \cos 30^\circ - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_3 \cos 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1 - \sigma_3) \\ b &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_2 - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_1 \sin 30^\circ - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_3 \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.17)$$

从而

$$\left. \begin{aligned} r &= |\mathbf{OS}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{s_i s_i} \\ &= \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} = \sqrt{2J_2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_e \\ \tan \theta &= \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \mu_\sigma \end{aligned} \right\} \quad (1.1.18)$$

这里, σ_e 称为等效应力, 并可表示为

$$\begin{aligned} \sigma_e &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

μ_σ 称为 Lode 应力参数, 并有

$$\mu_\sigma = \sqrt{3} \tan \theta = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{2s_2 - s_1 - s_3}{s_1 - s_3} \quad (1.1.20)$$

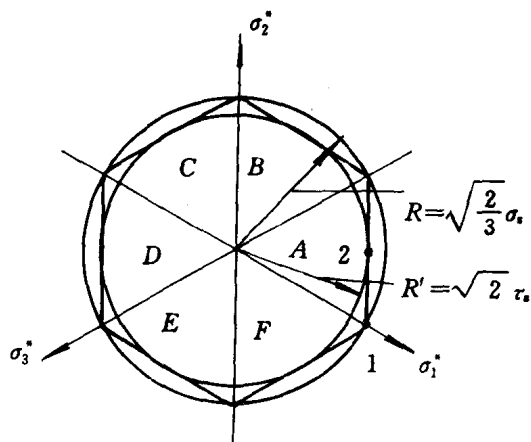
1-2 两个常用的初始屈服准则

1-2-1 Tresca 准则

Tresca 认为当主应力差的最大值达到某一临界值时, 材料开始屈服, 即

$$\max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\} = 2k \quad (1.2.1)$$

为研究 Tresca 屈服曲线 C 的形状, 将 π 平面分为六个区域: A, B, C, D, E, F , 如图 1.5 所示。显然



在区域 A 中, $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$;

在区域 B 中, $\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3$;

在区域 C 中, $\sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_1$;

在区域 D 中, $\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1$;

在区域 E 中, $\sigma_3 > \sigma_1 > \sigma_2$;

在区域 F 中, $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$ 。

在区域 A 中, 根据式 (1.2.1) 和式 (1.1.17), 有

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1 - \sigma_3) = \sqrt{2} k$$

上式表明: 在区域 A 中, 屈服曲线 C 是一条平

行于轴 σ_2^* 的直线。

在区域 B 中, 根据式 (1.2.1) 及式 (1.1.17), 有

$$\sigma_2 - \sigma_3 = 2k$$

图 1.5 Tresca 正六边形

$$\sqrt{2}a + \sqrt{6}b = 2(\sigma_2 - \sigma_3) = 4k$$

上式表明:在区域 B 中,屈服曲线也是一条直线。容易证明,该直线平行于轴 σ_1^* 。

类似地,可以得到其它各区中的屈服曲线。结果表明,这六个区中的屈服曲线形成一个正六边形,如图 1.5 所示。在主应力空间中,屈服曲面构成一个正六面棱柱。

下面,确定正六边形的大小。在简单拉伸屈服时,

$$\sigma_1 = \sigma_s, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

这里, σ_s 为单轴拉伸屈服应力。由式(1.1.18)可知对应点 1 在 π 平面内的极坐标为

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s = R, \quad \theta = -30^\circ \quad (1.2.2)$$

如图 1.5 所示。显然, R 是 Tresca 正六边形的外接圆半径。同时,由式(1.2.1)可知

$$\sigma_1 = 2k = \sigma_s, \quad k = \sigma_s/2 \quad (1.2.3)$$

在纯剪屈服时,则有

$$\sigma_1 = \tau_s, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau_s$$

这里, τ_s 为纯剪屈服应力。由式(1.1.18)可知对应点 2 在 π 平面内的极坐标为

$$r' = \sqrt{2}\tau_s = R', \quad \theta' = 0 \quad (1.2.4)$$

如图 1.5 所示。显然, R' 是 Tresca 正六边形的内切圆半径。同时,由式(1.2.1)可知

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k = 2\tau_s, \quad k = \tau_s \quad (1.2.5)$$

对比式(1.2.3)和式(1.2.5),则有

$$\sigma_s = 2\tau_s \quad (1.2.6)$$

上式即为由 Tresca 准则得到的 σ_s 与 τ_s 的关系式。

在 $\sigma_3 = 0$ 的平面应力状态下,考虑到式(1.2.3)或式(1.2.5),式(1.2.1)变为

$$\max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2|\} = \sigma_s = 2\tau_s \quad (1.2.7)$$

该方程构成了 σ_1, σ_2 平面中一个不等边的六边形,如图 1.6 所示。它是 Tresca 六面柱和 $\sigma_3 = 0$ 平面的交线。

1-2-2 Mises 准则

在 Tresca 准则中,没有考虑中间主应力对屈服的影响,而且在主应力顺序未知的情况下, Tresca 准则也难于应用,因此, Von Mises 提出了另一个屈服准则。该准则认为当材料屈服时, J_2 达到某一临界值,即

$$J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = k^2 \quad (1.2.8)$$

由式(1.1.18)可知

$$r = \sqrt{2J_2} = \sqrt{2}k = R \quad (1.2.9)$$

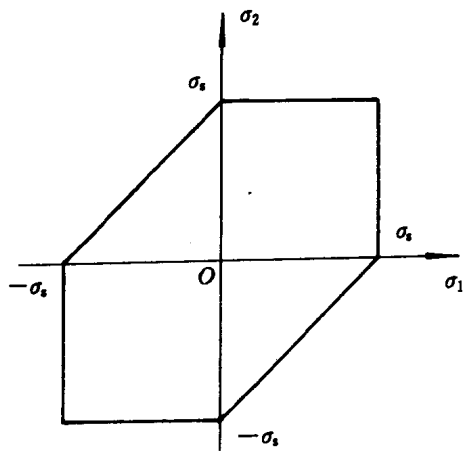


图 1.6 平面应力状态 Tresca 六边形

因此,在 π 平面内,Mises 屈服曲线 C 是一个圆,如图 1.7 所示。在主应力空间中,屈服曲面是一个圆柱面。

下面,确定该圆柱面的半径。根据简单拉伸屈服实验,由式(1.2.2)可知该圆的半径为

$$R = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_s \quad (1.2.10)$$

同时,由式(1.2.9),可知

$$J_2 = k^2 = \frac{1}{3} \sigma_s^2, \quad k = \sqrt{\frac{1}{3}} \sigma_s \quad (1.2.11)$$

根据纯剪屈服实验,由式(1.2.4)可知该圆的半径为

$$R = \sqrt{2} \tau_s \quad (1.2.12)$$

同时,由式(1.2.9),可知

$$J_2 = k^2 = \tau_s^2, \quad k = \tau_s \quad (1.2.13)$$

对比式(1.2.10)与式(1.2.12),可知

$$\tau_s = \sqrt{\frac{1}{3}} \sigma_s \quad (1.2.14)$$

对比式(1.2.11)与式(1.2.13),可得相同结论。

在 $\sigma_3=0$ 的平面应力状态下,考虑到式(1.2.11)和式(1.2.13),式(1.2.8)变为

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_s^2 = 3\tau_s^2 \quad (1.2.15)$$

该方程代表在 σ_1, σ_2 平面内的一个椭圆。它被称为 Mises 椭圆,如图 1.8 所示。它是 Mises 圆柱面与 $\sigma_3=0$ 平面的交线。

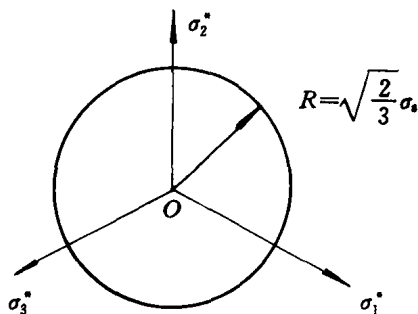


图 1.7 Mises 圆

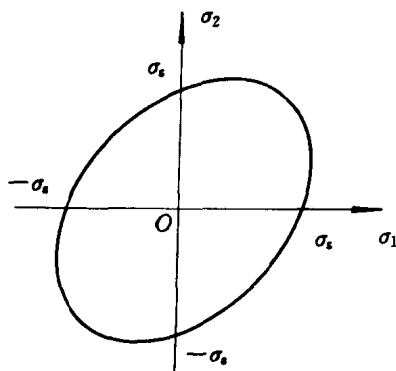


图 1.8 平面应力状态 Mises 椭圆

根据式(1.1.19),Mises 准则亦可改写如下:

$$\sigma_e = \sigma_s = \sqrt{3} \tau_s = \sqrt{3} k \quad (1.2.16)$$

由图 1.9 可见:若 Mises 准则和 Tresca 准则在单向拉伸条件下一致,则 Tresca 正六边形内接于 Mises 圆;若两准则在纯剪条件下一致,则 Tresca 正六边形外切于 Mises 圆。在平面应力状态下,两者具有类似的关系,如图 1.10 所示。

综上所述,可知:

1. 在已知主应力顺序的情况下,Tresca 准则呈现线性形式,便于应用;

2. 在未知主应力顺序的情况下,则 Mises 准则便于应用。
实验表明:Mises 准则比 Tresca 准则更为接近真实情况。

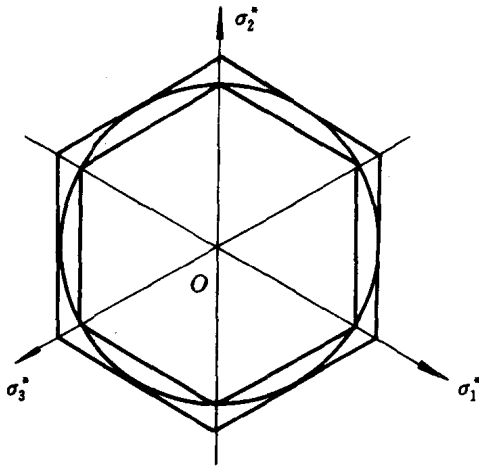
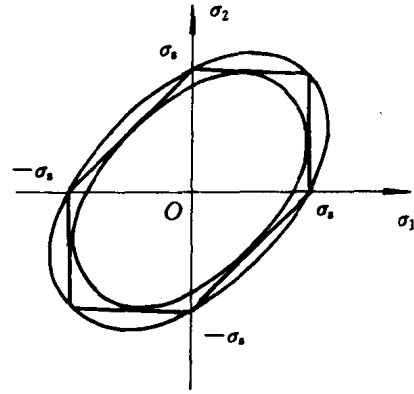
图 1.9 两准则在 π 平面上的比较

图 1.10 两准则在平面应力状态下的比较

1-3 后继屈服准则与加载准则

首先通过单轴受力情况,建立后继屈服准则的概念。图 1.11 表示硬化材料在单轴受力情况下进入塑性后弹性范围的变化。

硬化材料在进入塑性后弹性范围变化判据被称为后继屈服准则。由图 1.11 可见,在单轴受力情况下,由于材料的不同,后继屈服准则具有如下三种类型:

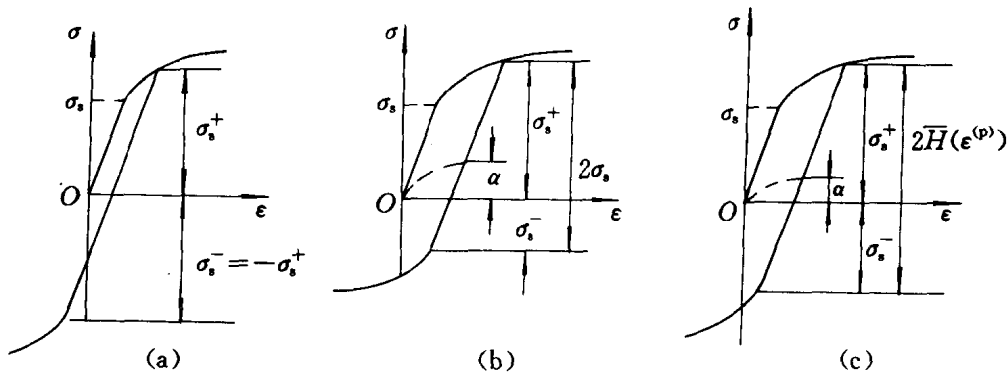


图 1.11 单轴受力的后继屈服

1. 各向同性后继屈服准则。这个准则认为,当材料进入塑性后,弹性范围的中心不变,而弹性范围的大小增加,如图 1.11(a)所示;

2. 随动后继屈服准则。这个准则认为,当材料进入塑性后,弹性范围的大小保持不变,而弹性范围的中心移动,如图 1.11(b)所示;