

内 容 提 要

本书是非线性科学丛书中的一种。主要介绍退化哈密顿系统相空间的弱混沌结构随机网及其与自然界中各种准规则斑图的联系。全书分四章。首先阐述不可积哈密顿系统的随机层和随机网的有关概念和理论,给出定量估计随机网厚度的方法。着重介绍共振扭转映射产生的均匀随机网,讨论准周期网与准晶体对称铺砌的密切关系,指出随机网的分形生长行为和粒子通过网的随机扩散模式。然后介绍各种准周期铺砌图案的动力学生成方法,研究准对称斑图作为动力学组织的各种性质,并介绍装饰艺术中的平面铺砌方法和生物体中的准晶体对称性。最后讨论流线斑图的对称性与混沌,介绍拉格朗日湍流斑图及三维定态流随机网的解析研究进展。本书可供理工科大学教师、高年级学生、研究生、博士后阅读,也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考。

本书由郑伟谋、孙义燧审阅。

非线性科学丛书

弱混沌与准则斑图

汪秉宏 编著

郑伟谋 孙义燧 审阅

上海科技教育出版社出版发行

(上海市冠生园路393号 邮政编码:200233)

各地新华书店经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 7.75 字数 188,000

1996年1月第1版 1996年1月第1次印刷

印数 1—3,200本

ISBN 7-5428-1209-2/O·89 定价:(精装本)12.50元

目 录

非线性科学丛书出版说明

前 言

第1章	随机层与随机网	1
§ 1	单摆系统的轨道解	1
§ 1.1	可积系统	1
§ 1.2	单摆的相轨图	2
§ 1.3	界轨运动的速度孤子	3
§ 1.4	捕获轨道和非捕获轨道解	4
§ 1.5	单摆的非线性参数	6
§ 1.6	平面波场中的粒子运动	8
§ 1.7	单摆运动的傅里叶谱展开	9
§ 1.8	速度谱的截断模数	10
§ 2	受驱单摆的随机层	12
§ 2.1	随机层概念的提出	13
§ 2.2	受驱单摆	13
§ 2.3	界轨邻域映射	14
§ 2.4	随机性起始判据	16
§ 2.5	零级能量变化	16
§ 2.6	受驱单摆的随机层厚度	18
§ 2.7	双极势驱动单摆	20
§ 2.8	非重叠共振的弱相互作用	21
§ 2.9	多波场中的粒子运动	22
§ 3	标准映射的随机层	23
§ 3.1	脉冲驱动转子	23

§ 3.2	标准映射的导出	24
§ 3.3	标准映射的相轨图	25
§ 3.4	标准映射的主随机层厚度	26
§ 4	极小混沌的存在条件	28
§ 4.1	极小混沌问题	28
§ 4.2	阿诺尔德扩散的存在条件	29
§ 4.3	阿诺尔德网络示例	32
§ 5	非退化系统中的弱混沌与随机海	33
§ 5.1	二自由度非退化系统相空间的一般特征	33
§ 5.2	标准映射的随机海	34
§ 5.3	随机层转变为随机海的临界点	35
§ 5.4	奇里科夫共振重叠法	37
§ 5.5	格林的周期轨道逼近法	38
§ 5.6	康托环	41
§ 5.7	康托环对于随机扩散的屏障作用	42
§ 6	退化系统的弱混沌与网络结构	45
§ 6.1	退化系统存在极小混沌的最低自由度	45
§ 6.2	平面波驱动线性谐振子	46
§ 6.3	共振哈密顿量	48
§ 6.4	共振系统的相轨图分析	50
§ 7	随机网的网格与网环	52
§ 7.1	网环的等效哈密顿量	52
§ 7.2	网环的轨道解	54
§ 7.3	沿网格界轨的运动	55
§ 7.4	网环与 KAM 环的区别	57
§ 8	随机网的随机层宽度	57
§ 8.1	非共振势	57
§ 8.2	共振能量变化率	58
§ 8.3	沿网格界轨的零级能量变化	59

§ 8.4	随机网的隧道宽度	60
§ 8.5	随机网的拓扑特征	62
§ 9	KAM 环与网环之间的转变	62
§ 9.1	近退化系统	63
§ 9.2	KAM 环与网环的共存及相互转变	65
第 2 章	均匀随机网	69
§ 10	共振扭转映射	70
§ 10.1	脉冲波包驱动线性振子	70
§ 10.2	ZZSUO 二维扭转映射	71
§ 10.3	共振扭转映射	74
§ 11	周期网的网格与网环	75
§ 11.1	四阶共振映射的相轨图	75
§ 11.2	四阶共振网的哈密顿量	76
§ 11.3	四阶共振网的稳定结构	77
§ 11.4	四阶共振网的网环解	79
§ 12	随机网中的分岔行为	82
§ 12.1	方格对称周期网中心椭圆点的倍周期分岔	83
§ 12.2	周期 4 网的同周期分岔	85
§ 12.3	倍周期分岔的普适标度行为	85
§ 12.4	非共振势对于周期 4 网结构的影响	87
§ 12.5	非严格共振引起的网络分解	87
§ 13	周期网与准周期网	88
§ 13.1	均匀周期网的两种对称性	88
§ 13.2	平移对称性与转动对称性的共存条件	90
§ 13.3	均匀准周期网的生成	91
§ 13.4	准晶体对称平面铺砌	93
§ 14	均匀网的骨架分析	95
§ 14.1	q 阶共振哈密顿量	95
§ 14.2	均匀周期网的骨架	97

§ 14.3	五次对称网共振能面结构的奇异性	99
§ 15	均匀网的随机层厚度	102
§ 15.1	四次对称周期网的随机层厚度	102
§ 15.2	三次对称周期网的随机层厚度	105
§ 16	粒子的随机扩散模式	106
§ 16.1	ZZSUC 扭转映射的作用-角变量形式	106
§ 16.2	随机扩散模式的福克-普朗克方程	107
§ 16.3	粒子的随机加热效应	109
§ 16.4	强混沌随机网的分形生长过程	110
§ 17	相对论性均匀网的有限性	111
§ 17.1	朗柯帕-苏丹的相对论性扭转映射	112
§ 17.2	相对论性方格对称随机网的有限性	116
第 3 章	准对称斑图	120
§ 18	斑图的类型与生成	121
§ 18.1	对称性成因与平面铺砌问题	121
§ 18.2	构造五次对称铺砌的彭罗斯方法	123
§ 19	均匀网骨架生成的斑图	125
§ 19.1	q 次转动对称不变集	125
§ 19.2	准对称网的平滑化操作	126
§ 19.3	准周期网共振能面的奇点分布	127
§ 19.4	准周期网的骨架斑图	129
§ 19.5	准周期铺砌的动力学生成方法	129
§ 20	准对称性铺砌与缀饰	130
§ 20.1	准对称性的概念及定量描述	130
§ 20.2	构造铺砌图案的缀饰法	131
§ 20.3	准周期网的多重格栅	132
§ 20.4	阿曼格子	132
§ 21	斑图的局部同构性与范霍夫奇异性	134
§ 21.1	准对称斑图的局部同构性	134

§ 21.2	斑图的傅里叶谱	135
§ 21.3	经典系统的态密度	139
§ 21.4	晶体对称网的范霍夫奇异性	140
§ 21.5	准晶体对称网的范霍夫奇异性	142
§ 21.6	斑图生成与动力学组织	143
§ 21.7	斑图的关联性	144
§ 22	装饰艺术中的二维铺砌	146
§ 22.1	中古世纪的穆斯林装饰艺术	146
§ 22.2	装饰艺术与平面铺砌的联系	150
§ 23	生物体中的准晶体对称性	153
§ 23.1	生物体中的五次对称性	153
§ 23.2	叶序	155
第 4 章	流线斑图的对称性与混沌	158
§ 24	二维定态涡旋流动	159
§ 24.1	冯·卡曼涡街和贝纳德对流斑图	159
§ 24.2	平面涡旋流的旋度方程	160
§ 24.3	流线斑图与流函数等高截面	161
§ 24.4	晶体对称平面流的流函数与斑图	163
§ 24.5	准晶体对称平面流的流函数与斑图	164
§ 24.6	斯图阿特流	165
§ 25	对称定态平面流的稳定性	166
§ 25.1	外力场中平面粘性流的流函数	166
§ 25.2	柯尔莫哥洛夫流的稳定性	167
§ 25.3	方格对称平面流的稳定性	170
§ 26	有...系统中的准对称流	172
§ 26.1	恒定外力场中的准晶体对称平面流	172
§ 26.2	脉冲变化外力场中定态平面流的斑图	173
§ 26.3	周期变化外力场中定态平面流的斑图	176
§ 26.4	变化外力场中平面流的稳定结构	177

§ 27	三维空间中的定态流	179
§ 27.1	三维空间中定态流的流线	179
§ 27.2	贝尔特拉米流	181
§ 27.3	拉格朗日湍流	182
§ 27.4	磁力线混沌与磁流体发电机	183
§ 27.5	ABC 流的速度场	185
§ 27.6	ABC 流的对称结构与哈密顿形式	185
§ 27.7	ABC 流的流线混沌	187
§ 28	三维准对称流构造的随机网	188
§ 28.1	定态三维流中的准对称性结构	188
§ 28.2	流线扩散与拉格朗日湍流斑图	191
§ 28.3	流体动力学随机网的解析研究	192
参考文献		199

Contents

Preface

Introduction

Chapter 1. Stochastic Layer and Stochastic Web 1

§ 1 Orbit Solution of Pendulum System1

§ 1.1 Integrable system1

§ 1.2 Phase portrait of pendulum2

§ 1.3 Velocity soliton along separatrix.....3

§ 1.4 Trapped orbit and untrpped orbit4

§ 1.5 Nonlinear parameter of pendulum6

§ 1.6 Particle's movement in a plane wave field
.....8

§ 1.7 Fourier spectrum of pendulum movement
.....9

§ 1.8 Effective number of harmonics in velocity
spectrum10

§ 2 Stochastic Layer of Driven Pendulum12

§ 2.1 Concepts of stochastic layer13

§ 2.2 Driven pendulum13

§ 2.3 The mapping in the vicinity of a
separatrix.....14

§ 2.4 Onset condition of stochasticity16

§ 2.5 First order energy change16

§ 2.6 Width of stochastic layer.....18

§ 2.7 The pendulum driven by double pole

	potential	20
§ 2.8	Weak interaction of two non-overlapping resonances	21
§ 2.9	Particle's movement in a field of multiple plane wave	22
§ 3	Stochastic Layer of Standard Mapping	23
§ 3.1	Rotator driven by a periodic sequence of δ -pulses	23
§ 3.2	Derivation of standard mapping	24
§ 3.3	Phase portrait of standard mapping	25
§ 3.4	Width of the main stochastic layer	26
§ 4	Minimal Chaos	28
§ 4.1	Problem of minimal chaos	28
§ 4.2	Existence condition of Arnol'd diffusion	29
§ 4.3	Examples of Arnol'd web	32
§ 5	Weak Chaos and Stochastic Sea in Nondegenerate Systems	33
§ 5.1	General characteristic of phase portrait of nondegenerate systems with degree of freedom equal to two	33
§ 5.2	Stochastic sea of standard mapping	34
§ 5.3	Critical point of transition from stochastic layer to stochastic sea	35
§ 5.4	Chirikov's resonance overlapping criterion	37
§ 5.5	Greene's periodic orbits approximation technique	38
§ 5.6	Cantor	41
§ 5.7	Cantor as a barrier for stochastic diff-	

	usion.....	42
§ 6	Minimal Chaos and Web Structure in Degenerate Systems.....	45
§ 6.1	The lowest degree of freedom for existence of minimal chaos in degenerate systems ...	45
§ 6.2	Linear harmonic oscillator driven by plane wave	46
§ 6.3	Resonant hamiltonian	48
§ 6.4	Phase portrait analysis of the resonant system	50
§ 7	Web-Cells and Web-Tori in a Stochastic Web.....	52
		52
§ 7.1	Effective hamiltonian of web-tori	54
§ 7.2	Orbit solution of web-tori	55
§ 7.3	Movement along the separatrix between webcells.....	57
§ 7.4	Difference between web-tori and KAM-tori.....	57
§ 8	Layer Width of Stochastic Web	57
§ 8.1	Unresenance potential	
§ 8.2	Variation rate of resonance energy	58
§ 8.3	First order energy change along separatrix between web-cells	59
§ 8.4	Channel width of stochastic web	60
§ 8.5	Topological characteristic of stochastic web	62
§ 9	Transition from KAM-Tori to Web-Tori	62
§ 9.1	Near-integrable system.....	63
§ 9.2	Coexistence of KAM-tori and web-tori	

and transition between them	65
Chapter 2. Uniform Stochastic Web.....	69
§ 10 Resonant Twist Mapping	70
§ 10.1 Linear hamonic oscillator driven by a pulse wave packet.....	70
§ 10.2 ZZSUC twist mapping	71
§ 10.3 Resonant twist mapping	74
§ 11 Web-Cell and Web-Tori of Periodic Web.....	75
§ 11.1 Phase portrait of $q=4$ resonant web	75
§ 11.2 Hamiltonian of $q=4$ resonant web.....	76
§ 11.3 Stable structure of $q=4$ resonant web ...	77
§ 11.4 Web-tori solution of $q=4$ resonant web.....	79
§ 12 Bifurcation Behavior of Stochastic Web.....	82
§ 12.1 Periodic bifurcation of the elliptic points located at the center of web-cells in square lattice symmetric periodic web.....	83
§ 12.2 Equal periodic bifurcation of period-4 web	85
§ 12.3 Universal scaling behavior of period- doubling bifurcation	85
§ 12.4 Effect of unresonant potential on stru- cture of period-4 web	87
§ 12.5 A web's decay due to mismatch of reson- ance.....	87
§ 13 Periodic Web and Quasi-Periodic Web	88
§ 13.1 Two kinds of symmetry in uniform periodic web	88
§ 13.2 Coexistence condition for translational	

	and rotational symmetries.....	90
§ 13.3	Growth of uniform quasi-periodic web	91
§ 13.4	Quasi-crystal symmetrical plane tilings	93
§ 14	Skeleton Analysis of Uniform Web.....	95
§ 14.1	The q th order resonant hamiltonian ...	95
§ 14.2	Skeleton of the uniform periodic web.....	97
§ 14.3	Singularities of resonant energy surface of the $q=5$ web.....	99
§ 15	Layer Width of Uniform Web	102
§ 15.1	Layer width of $q=4$ web	102
§ 15.2	Layer width of $q=3$ web	105
§ 16	Patterns of a Particle's Diffusion	106
§ 16.1	Action-angle variable form of ZZSUC twist mapping.....	106
§ 16.2	The Fokker-Planck equation of stochastic diffusion	107
§ 16.3	Stochastic heating effect on particles.....	109
§ 16.4	Fractal growth process of the stochastic web with strong chaos	110
§ 17	Finite Uniform Web in Relativistic Case.....	111
§ 17.1	Longcope-Sudan's relativistic twist map- ping.....	112
§ 17.2	Finite relativistic square-lattice stoch- astic web.....	116
Chapter 3.	Quasi-Symmetrical Pattern	120
§ 18	Types and Generation of Patterns	121
§ 18.1	Origins of symmetry and problem of	

	plane tiling	121
§ 18.2	Penrose' technique constructing fifth order symmetry tiling	123
§ 19	Pattern Generated by Skeleton of Uniform Web	125
§ 19.1	Invariant set with the q th order rotation symmetry.....	125
§ 19.2	Smearing manipulation of quasi-periodic web	126
§ 19.3	Distribution of singular points on resonant energy surface for quasi- periodic web.....	127
§ 19.4	Skeleton pattern of quasi-periodic web	129
§ 19.5	Dynamical generation of quasi-periodic tiling	129
§ 20	Quasi-Symmetrical Tiling and Decoration	130
§ 20.1	Concept of quasi-symmetry and its quantitative characterizing.....	130
§ 20.2	Decoration technique constructing tiling...	131
§ 20.3	Multigrid of quasi-periodic web.....	132
§ 20.4	Ammann's lattice	133
§ 21	Local Isomorphism and Van Hove Singularities of Pattern.....	134
§ 21.1	Local isomorphism of a quasi-symmetric pattern	134
§ 21.2	Fourier spectrum of pattern	135
§ 21.3	Density of states of classical system	139

§ 21.4	Van Hove singularities of crystal symmetric web	140
§ 21.5	Van Hove singularities of quasi-crystal symmetric web	142
§ 21.6	Generation of pattern and Dynamical orga nization	143
§ 21.7	Correlation of a pattern	144
§ 22	Two Dimensional Tilings in Ornament Art.....	146
§ 22.1	Musslim ornamental art in Central Asia of Middle Ages	146
§ 22.2	Connection between ornamental art and plane tiling.....	150
§ 23	Quasi-Crystal Symmetry among Biological Objects	153
§ 23.1	The fifth-order symmetries in animals...	153
§ 23.2	Phyllotaxis	155
Chapter 4.	Symmetry and Chaos of Hydrodynamic Pattern	153
§ 24	Two-dimensional Steady-State Vortex Flows.....	159
§ 24.1	Von Karman's vortex street and Benard convection cell	159
§ 24.2	Vorticity equation of a plane vortex flow...	160
§ 24.3	Pattern of stream lines and level of stream function	161
§ 24.4	Stream function and pattern of plane flows with crystal symmetry	163

§ 24.5	Stream function and pattern of plane flows with quasi-crystal symmetry	164
§ 24.6	Stuart flow	165
§ 25	Stability of Steady-state Plane Flows with Symmetrical Structure	166
§ 25.1	Stream function of plane viscous flow in field of external force	166
§ 25.2	Stability of Kolmogorov flow	167
§ 25.3	Stability of plane flow with square-lattice symmetry	170
§ 26	Quasi-Symmetrical Flow in Finite System ...	172
§ 26.1	Plane flow with quasi-crystal symmetry in constant external force field	172
§ 26.2	Pattern of steady-state plane flow in pulse-oscillating external force field	173
§ 26.3	Pattern of steady-state plane flow in periodic oscillating external force field ..	176
§ 26.4	Stable structure of plane flow in oscillating external force field	177
§ 27	Steady-State Three-Dimensional Flows	179
§ 27.1	Stream lines of steady-state flow in space	179
§ 27.2	Beltrami flow	181
§ 27.3	Lagrangian turbulence	182
§ 27.4	Chaos of magnetic force stream lines and hydromagnetic dynamo	183
§ 27.5	Velocity field of ABC flow	185
§ 27.6	Symmetrical structure and Hamiltonian form of ABC flow	185

§ 27.7	Chaos of stream lines of ABC flow	187
§ 28	Stochastic Web Constructed by Three-Dimen sional Quasi-Symmetrical Flow.....	188
§ 28.1	Quasi symmetrical structure of three dimen sional steady-state flow	188
§ 28.2	Stream line diffusion and Lagrangian turbulence patterns	191
§ 28.3	Analytical study of hydrodynamical stocha stic web.....	192
References		199

第 1 章

随机层与随机网

非线性动力学在 70 年代的一个重要发现是:不可积哈密顿系统的相空间中,包含着运动以混合方式出现的区域。规则运动与混沌共存于相空间中,是非线性保守系统的一种最迷人的特征。尽管关于这种动力学的奇异性尚有许多疑难的问题等待人们去解决,但人们已认识到破裂界轨邻域的随机层是保守系统混沌的发源地。

可积系统界轨环面邻域的运动是极不稳定的。任何微小的不可积扰动作用将使界轨环面破裂,而导致附近的轨道具有极其复杂和随机的行为,这就是随机层的形成。对于 KAM 定理所适用的一般非退化系统,当自由度不超过 2 时,弱混沌仅能以很薄的彼此不相重叠的随机层的形式存在,亦即是一种局域的不稳定性。然而,对于退化系统,薄的随机层可以编织成布满整个相空间的网络结构——随机网。随机网是一种全局性的混沌,它是 $3/2$ 自由度退化保守系统中弱混沌的特有存在形式。

本章首先说明什么是随机层,介绍两个典型系统的随机层;然后给出不可积保守系统的极小混沌与阿诺尔德扩散的存在条件,讨论非退化系统与退化系统中弱混沌结构的区别,阐明随机网的基本概念;最后描述一个 $3/2$ 自由度退化系统的随机网的相空间拓扑,给出网络宽度的估计方法,并分析网格内部的结构。

§ 1 单摆系统的轨道解

§ 1.1 可积系统

任何宏观的耗散系统,微观地考察,均属于保守系统。耗散性