博雅

21世纪数学精编教材

数学基础课系列

解析几何

Analytic Geometry

丘维声 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

博雅®
21世纪数学精编教材
数学基础课系列

解析几何

丘维声 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

解析几何 / 丘维声编著. — 北京 : 北京大学出版社, 2017. 2
(21 世纪数学精编教材. 数学基础课系列)
ISBN 978-7-301-28005-8

Ⅰ. ①解… Ⅱ. ①丘… Ⅲ. ①解析几何—高等学校—教材 Ⅳ. ① O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 021153 号

书　　名　解析几何
　　　　　　JIEXI JIHE
著作责任者　丘维声　编著
责任编辑　曾琬婷
标准书号　ISBN 978-7-301-28005-8
出版发行　北京大学出版社
地　　址　北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址　http://www.pup.cn　新浪微博 : @ 北京大学出版社
电子信箱　zpup@pup.cn
电　　话　邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62767347
印 刷 者　北京大学印刷厂
经 销 者　新华书店
　　　　　　787 毫米 × 980 毫米　16 开本　11. 5 印张　244 千字
　　　　　　2017 年 2 月第 1 版　2017 年 2 月第 1 次印刷
印　　数　0001—4000 册
定　　价　28. 00 元

作者简介

丘维声 1966年毕业于北京大学数学力学系；北京大学数学科学学院教授、博士生导师、全国高等学校第一届国家级教学名师，美国数学会 *Mathematical Reviews* 评论员，中国数学会组合数学与图论专业委员会首届常务理事，《数学通报》副主编，教育部高等学校数学与力学教学指导委员会（第一、二届）委员.

出版著作44部，发表教学研究论文23篇，编写的具有代表性的优秀教材有：《高等代数（上、下册）——大学高等代数课程创新教材》（清华大学出版社，2010年，"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材，北京市高等教育精品教材重大立项项目），《高等代数（上、下册）（第一、二、三版）》（高等教育出版社，1996年，2002年，2003年，2015年，普通高等教育"九五"教育部重点教材，普通高等教育"十五"国家级规划教材），《高等代数》（科学出版社，2013年，"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材），《解析几何（第一、二、三版）》（北京大学出版社，1988年，1996年，2015年），《抽象代数基础》（高等教育出版社，2003年），《近世代数》（北京大学出版社，2015年），《群表示论》（高等教育出版社，2011年），《数学的思维方式和创新》（北京大学出版社，2011年），《简明线性代数》（北京大学出版社，2002年，普通高等教育"十一五"国家级规划教材，北京高等教育精品教材），《有限群和紧群的表示论》（北京大学出版社，1997年），《高等代数学习指导书（上、下册）》（清华大学出版社，2005年，2009年）等.

从事代数组合论、群表示论、密码学的研究，在国内外学术刊物上发表科学研究论文46篇；承担国家自然科学基金重点项目2项，主持国家自然科学基金面上项目3项.

获全国高等学校第一届国家级教学名师奖，3次被评为北京大学最受学生爱戴的十佳教师，获北京市高等学校教学成果一等奖、宝钢教育奖优秀教师特等奖、北京大学杨芙清-王阳元院士教学科研特等奖，被评为北京市科学技术先进工作者、全国电视大学优秀主讲教师，3次获北京大学教学优秀奖等.

内 容 简 介

本书是具有鲜明特色的解析几何教材：以研究几何空间的结构和图形的性质、分类为主线；运用旋转、压缩、正投影等变换研究图形；处处讲道理并且把道理讲得清清楚楚；每道习题都有详细解答. 全书分五章，内容包括：几何空间的结构、几何空间中的平面和直线、几何空间中的曲面和曲线、坐标变换、二次曲线的类型和不变量等.

本书可作为综合性大学、理工科大学和高等师范院校大学生“解析几何”课程的教材，也可供学习“解析几何”课程的广大读者自学. 本书涵盖了中学数学教师资格考试中“解析几何”部分的内容，可作为该部分内容的复习参考书.

前 言

作者40年来在北京大学讲授“解析几何”“高等代数”“抽象代数”等课程，积累了丰富的教学经验和科研心得，高屋建瓴地审视解析几何的教学内容，写成教材. 本书的主要特色如下：

1. 以研究几何空间的结构和图形的性质、分类为主线.

几何空间是由所有点组成的集合，为了把几何空间的结构搞清楚，又可以把几何空间看成由所有向量组成的集合. 由于向量有加法和数量乘法运算，并且满足加法交换律、结合律等8条运算法则，因此几何空间中只要取定了三个不共面向量 $\vec{d}_1,\vec{d}_2,\vec{d}_3$，那么每一个向量都可以表示成 $\vec{d}_1,\vec{d}_2,\vec{d}_3$ 的线性组合，且表示方式唯一. 这样几何空间的结构就清楚了. 这为研究几何空间中各种图形的性质提供了理论基础.

2. 运用几何空间上的变换研究图形的性质.

我们运用几何空间在一条直线上的正投影证明了向量的内积具有线性性，即

$$(\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{b},\quad (\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

内积的线性性使得内积与向量的加法和数量乘法相容，使得可以用向量的坐标来计算向量的内积.

我们运用几何空间绕一条直线的旋转证明了向量的外积的左、右分配律，即

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c},\quad (\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}.$$

外积的左、右分配律使得外积与向量的加法相容. 我们还证明了向量的外积与数量乘法相容. 这些使得可以用向量的坐标来计算向量的外积.

我们运用几何空间绕一条直线的旋转研究了旋转面的方程，然后从特殊的旋转面——圆柱面引出了柱面，从特殊的旋转面——圆锥面引出了锥面.

我们运用几何空间向着一个平面的正压缩研究了椭球面、单(双)叶双曲面和椭圆抛物面：球面在相继向着三个坐标面的正压缩下得到椭球面；旋转单(双)叶双曲面在向着一个坐标面的正压缩下得到单(双)叶双曲面；旋转抛物面在向着一个坐标面的正压缩下得到椭圆抛物面. 选取适当的两条直线 l_1 和 l_2，所有 l_1,l_2 上有相同参数值 t 的点的连线构成的曲面的方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=2z$(见第三章 §3.5 的例 5.1). 这个曲面在相继向着 Oyz 面，Ozx 面的正压缩下得到的曲面的方程为 $\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2z$，由此自然而然地

引出了双曲抛物面(马鞍面).

3. 讲授最基础的内容.

我们精选了"解析几何"的最基础的内容作为本书的主要内容,详见目录.

4. 把道理讲请楚.

我们在书中尽量不用"显然"这个词,每个地方都要讲道理,并且把道理讲请楚. 这可以使同学们容易理解教学内容,并且受到数学思维方式的熏陶和训练.

5. 每道习题都有解答.

建议同学们先自己做习题,做完后再看习题解答. 本书给出习题的解答是为了给同学们提供一个范本,怎样下手做题,怎样规范地写出解题过程.做习题和看习题解答是学习数学的重要环节.

本书可作为普通高等院校大学生"解析几何"课程的教材,教学时数为每周 3 学时,总共 48 学时:第一章 12 学时,第二章 6 学时,第三章 12 学时,第四章 6 学时,第五章 8 学时,复习 4 学时.

作者感谢责任编辑曾琬婷,她为本书的出版付出了辛勤的劳动.

真诚欢迎广大读者对本书提出宝贵意见!

丘维声
北京大学数学科学学院
2016 年 7 月

目　　录

第一章 几何空间的结构

几何空间是由所有点组成的集合. 为了研究几何空间中的各种图形,我们首先需要把几何空间的结构搞清楚. 本章就来研究几何空间的结构.

§1.1 向量的加法和数量乘法,向量的坐标

为了能够研究几何空间的结构,我们需要可以进行运算的量. 现实生活中,汽车行驶的速度、飞机在天空中飞行的位移等都既有大小又有方向. 由此抽象出,既有大小又有方向的量称为**向量**. 常常用符号 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\cdots$ 表示向量. 几何空间中带有箭头的线段称为**有向线段**,它可以用来表示向量,其中箭头的指向表示向量的方向,线段的长度表示向量的大小. 例如,在图 1.1 中,有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示一个向量 $\vec{a}$,A 称为**起点**,B 称为**终点**,起点 A 到终点 B 的指向表示 $\vec{a}$ 的方向,线段 AB 的长度表示 $\vec{a}$ 的大小. 今后我们把向量 $\vec{a}$ 的大小称为 $\vec{a}$ 的**长度**,记作 $|\vec{a}|$.

把有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 平行移动得到有向线段 $\overrightarrow{CD}$,如图 1.1 所示. 由于 C 到 D 的指向与 A 到 B 的指向一致,且线段 CD 的长度与线段 AB 的长度相等,因此 $\overrightarrow{CD}$ 也表示向量 $\vec{a}$. 于是,我们称向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{CD}$ **相等**,记作 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

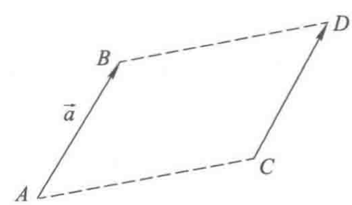

图 1.1

长度为 0 的向量称为**零向量**,记作 $\vec{0}$. 零向量的方向不确定.

长度为 1 的向量称为**单位向量**. 与非零向量 $\vec{a}$ 同向的单位向量记作 $\vec{a}^0$.

与 $\vec{a}$ 长度相等且方向相反的向量称为 $\vec{a}$ 的**反向量**,记作 $-\vec{a}$. 例如,$\overrightarrow{BA}$ 是 $\overrightarrow{AB}$ 的反向量,因此 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

轮船在大海中航行,先由 A 地向东航行到 B 地,接着向东北方向航行到 C 地,如图 1.2 所示. 这两次位移的总效果是位移 $\overrightarrow{AC}$. 由此抽象出

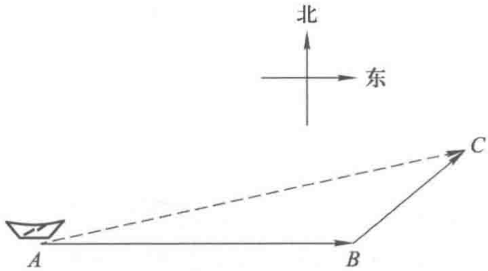

图 1.2

向量的加法运算：

定义 1.1 对于向量 $\vec{a},\vec{b}$，作有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示 $\vec{a}$，作有向线段 $\overrightarrow{BC}$ 表示 $\vec{b}$. 把 $\overrightarrow{AC}$ 表示的向量 $\vec{c}$ 称为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**和**，记作 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$（如图 1.3），也就是

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

这称为**向量加法的三角形法则**.

也可以从同一起点 O 作有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 表示 $\vec{a}$，作有向线段 $\overrightarrow{OB}$ 表示 $\vec{b}$，若 O,A,B 不在一条直线上，则以 OA 和 OB 为边作平行四边形 $OACB$，如图 1.4 所示. 由于 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，因此

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}.$$

这表明，平行四边形 $OACB$ 的对角线 $\overrightarrow{OC}$ 表示 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和. 这称为**向量加法的平行四边形法则**.

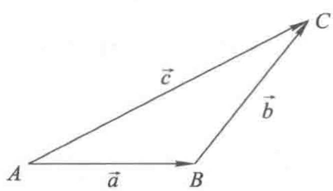

图 1.3

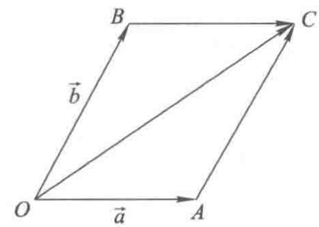

图 1.4

从图 1.4 还看到 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，因此

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\vec{a}.$$

若 O,A,B 在一条直线上，也可以得出 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$. 于是我们证明了：

(1) 向量的加法满足交换律，即对任意向量 $\vec{a},\vec{b}$，有

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}. \qquad \square$$

如图 1.5 所示，作有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 表示 $\vec{a}$，作有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示 $\vec{b}$，作有向线段 $\overrightarrow{BC}$ 表示 $\vec{c}$，则

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$
$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}.$$

由此证明了：

(2) 向量的加法满足结合律，即对任意向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，有

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}). \qquad \square$$

作有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示 $\vec{a}$，$\vec{0}$ 可用 $\overrightarrow{BB}$ 表示，则

$$\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}.$$

这证明了向量加法满足的第三条法则:

(3) 对任意向量 $\vec{a}$,有 $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$. □

作有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示 $\vec{a}$,则 $-\vec{a}=-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$. 于是

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}.$$

这证明了向量加法满足的第四条法则:

(4) 对任意向量 $\vec{a}$,有 $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$. 称 $-\vec{a}$ 为 $\vec{a}$ 的**负向量**. □

容易证明:对于向量 $\vec{a}$,若有 $\vec{b}$ 使得 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$,则 $\vec{b}=-\vec{a}$.

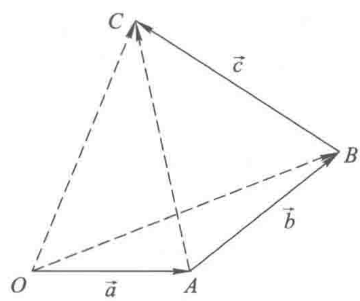

图 1.5

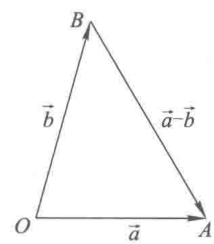

图 1.6

本书中用符号"$A:=B$"表示用 B 来规定 A,读作"A 定义成 B".

向量减法的定义为

$$\vec{a}-\vec{b}:=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

若 $\vec{a},\vec{b}$ 分别用同一起点的有向线段 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 表示,如图 1.6 所示,则

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+(-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA},$$

即起点相同的向量 $\overrightarrow{OA}$ 减去 $\overrightarrow{OB}$ 的差等于 $\overrightarrow{BA}$,其中差向量 $\overrightarrow{BA}$ 的起点是减向量 $\overrightarrow{OB}$ 的终点,差向量 $\overrightarrow{BA}$ 的终点是被减向量 $\overrightarrow{OA}$ 的终点.

如图 1.3 所示,三点 A,B,C 不在一条直线上,于是有 $\triangle ABC$. 由于三角形的两边之和大于第三边,因此

$$|\vec{a}|+|\vec{b}|>|\vec{c}|=|\vec{a}+\vec{b}|.$$

若向量 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向,如图 1.7 所示,则

$$|\vec{a}|+|\vec{b}|=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|=|\vec{a}+\vec{b}|.$$

若向量 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 方向相反,如图 1.8 所示,则

$$|\vec{a}|=|\overrightarrow{AB}|,\quad |\vec{b}|=|\overrightarrow{BC}|,$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|=|\overrightarrow{AC}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|.$$

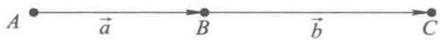

图 1.7

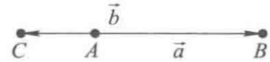

图 1.8

若向量 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 中有一个为 $\vec{0}$,不妨设 $\vec{b}=\vec{0}$,则

$$|\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{0}|=|\vec{a}|=|\vec{a}+\vec{0}|=|\vec{a}+\vec{b}|.$$

综上所述,我们证明了:对任意向量 $\vec{a},\vec{b}$,都有

$$|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|,$$

等号成立的充分必要条件是 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向或它们中有零向量. 上述不等式称为**三角形不等式**.

如图 1.9 所示,小李用 1 kgf 的力 $\vec{F}$ 拉一个箱子,小张用与 $\vec{F}$ 的方向相同的 1.5 kgf 的力拉这个箱子. 于是小张用的力为 $1.5\vec{F}$. 从这类例子抽象出下述概念:

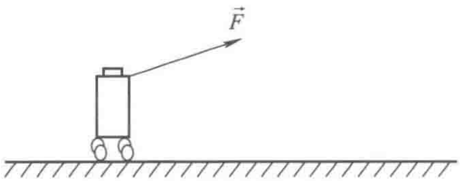

图 1.9

定义 1.2 实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积 $\lambda\vec{a}$ 是一个向量,它的长度为

$$|\lambda\vec{a}|:=|\lambda||\vec{a}|,$$

它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\vec{a}$ 相同,当 $\lambda<0$ 时与 $\vec{a}$ 相反.

对于任意向量 $\vec{a}$,由于 $|0\vec{a}|=0|\vec{a}|=0$,因此 $0\vec{a}=\vec{0}$.

对于任意实数 λ,由于 $|\lambda\vec{0}|=|\lambda||\vec{0}|=0$,因此 $\lambda\vec{0}=\vec{0}$.

若 $\lambda\neq0$ 且 $\vec{a}\neq\vec{0}$,则 $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|\neq0$,从而 $\lambda\vec{a}\neq\vec{0}$.

综上所述,我们证明了下述命题 1.1:

命题 1.1 $\lambda\vec{a}=\vec{0}$ 当且仅当 $\lambda=0$ 或 $\vec{a}=\vec{0}$. □

设 $\vec{a}\neq\vec{0}$,则 $\left|\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\right|=\dfrac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}|=1$,且 $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向,从而 $\vec{a}^{0}=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$. 这表明,把一个非零向量 $\vec{a}$ 乘以它的长度的倒数,便得到与 $\vec{a}$ 同向的单位向量 $\vec{a}^{0}$. 这称为把 $\vec{a}$ **单位化**.

从定义 1.2 立即得到向量的数量乘法满足的第一条法则:

(1) $1\vec{a}=\vec{a}$,其中 $\vec{a}$ 是任意一个向量.

当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时,从定义 1.2 并且分 $\lambda\mu=0,\lambda\mu>0$ 和 $\lambda\mu<0$ 三种情况可以证明向量的数量乘法满足的第二条和第三条法则(当 $\vec{a}=\vec{0}$ 时,从命题 1.1 立即得到这两条法则):

(2) $(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$,其中 $\vec{a}$ 是任一向量,λ,μ 是任意实数.

(3) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$,其中 $\vec{a}$ 是任一向量,λ,μ 是任意实数.

命题 1.2 $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$,其中 $\vec{a}$ 是任意一个向量.

证明 $\vec{a}+(-1)\vec{a}=1\vec{a}+(-1)\vec{a}=[1+(-1)]\vec{a}=0\vec{a}=\vec{0}$,于是

$$(-1)\vec{a}=-\vec{a}.$$ □

命题 1.3 设 $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$. 若 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向或反向，则存在唯一的实数 μ，使得 $\vec{b}=\mu\vec{a}$.

证明 *存在性* 若 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向，则 $\vec{b}^0=\vec{a}^0$，从而

$$\vec{b}=|\vec{b}|\vec{b}^0=|\vec{b}|\vec{a}^0=|\vec{b}|\left(\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\right)=\left(|\vec{b}|\frac{1}{|\vec{a}|}\right)\vec{a}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}.$$

若 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向，则 $\vec{b}^0=-\vec{a}^0$，从而

$$\vec{b}=|\vec{b}|\vec{b}^0=|\vec{b}|(-\vec{a}^0)=|\vec{b}|[(-1)\vec{a}^0]=[|\vec{b}|(-1)]\vec{a}^0=-|\vec{b}|\left(\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\right)=\frac{-|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}.$$

因此，若 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向或反向，则存在实数 μ，使得 $\vec{b}=\mu\vec{a}$.

唯一性 假如 $\vec{b}=\mu\vec{a},\vec{b}=\lambda\vec{a}$，则 $\mu\vec{a}=\lambda\vec{a}$. 由此得出 $\mu\vec{a}-\lambda\vec{a}=\vec{0}$，从而 $(\mu-\lambda)\vec{a}=\vec{0}$. 由于 $\vec{a}\neq\vec{0}$，因此运用命题 1.1 得 $\mu-\lambda=0$，即 $\mu=\lambda$. □

向量的数量乘法还满足第四条法则：

(4) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$，其中 λ 是任意实数，$\vec{a},\vec{b}$ 是任意向量.

证明 若 $\lambda=0$，则运用命题 1.1 得上述式子成立. 若 $\vec{a}=\vec{0}$ 或 $\vec{b}=\vec{0}$，则用命题 1.1 得上述式子成立. 下面设 $\lambda\neq0$，且 $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$.

作有向线段 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB}$ 分别表示 $\vec{a},\vec{b}$.

情形 1 三点 O,A,B 不在一条直线上. 当 $\lambda>0$ 时，如图 1.10 所示，把 OA 延长至 C，使得 $OC=\lambda OA$，把 OB 延长至 D，使得 $OD=\lambda OB$，则 $\triangle OAB\backsim\triangle OCD$，从而 $CD=\lambda AB$，$\angle OAB=\angle OCD$. 于是 $AB\parallel CD$. 因此 $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{AB}$，从而

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AB}=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}.$$

当 $\lambda<0$ 时，先看 $\lambda=-1$ 的情形：

$$\begin{aligned}(-1)(\vec{a}+\vec{b})&=(-1)\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OA}\\&=-\vec{b}-\vec{a}=-\vec{a}-\vec{b}=(-1)\vec{a}+(-1)\vec{b},\end{aligned}$$

其中 $\vec{a},\vec{b}$ 是任意向量.

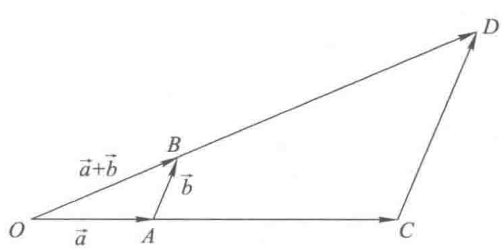

图 1.10

再看一般的 $\lambda<0$ 的情形. 此时 $-\lambda>0$，于是

$$\begin{aligned}\lambda(\vec{a}+\vec{b})&=[(-1)(-\lambda)](\vec{a}+\vec{b})=(-1)[(-\lambda)(\vec{a}+\vec{b})]\\&=(-1)[(-\lambda)\vec{a}+(-\lambda)\vec{b}]\end{aligned}$$

$$=(-1)[(-\lambda)\vec{a}]+(-1)[(-\lambda)\vec{b}]$$
$$=[(-1)(-\lambda)]\vec{a}+[(-1)(-\lambda)]\vec{b}$$
$$=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}.$$

情形 2　三点 O,A,B 在一条直线上. 此时 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向或反向，根据命题 1.3 得，存在唯一的实数 μ，使得 $\vec{b}=\mu\vec{a}$. 于是

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda(1\vec{a}+\mu\vec{a})=\lambda[(1+\mu)\vec{a}]=[\lambda(1+\mu)]\vec{a}=(\lambda+\lambda\mu)\vec{a}$$
$$=\lambda\vec{a}+(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\lambda(\mu\vec{a})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}.$$

综上所述，对任意向量 $\vec{a},\vec{b}$，任意实数 λ，都有

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}.$$ □

几何空间中的向量有加法和数量乘法两种运算，并且满足 8 条运算法则，这样就可以来研究几何空间的结构了.

几何空间 V 是由所有点组成的集合. 取一个点 O，以 O 为起点的向量称为**定位向量**. 所有定位向量组成的集合与 V 有一个一一对应：$\overrightarrow{OM}$ 对应于终点 M. 于是 V 也可以看成由所有定位向量组成的集合. 由于向量 $\overrightarrow{OM}$ 经过平行移动得到的向量与 $\overrightarrow{OM}$ 相等，因此 V 也可以看成由所有向量组成的集合，其中经过平行移动得到的向量是相等的向量.

为了研究几何空间 V 的结构，首先需要研究向量之间的关系.

设 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_s$ 是一组向量，$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 是一组实数，则

$$k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+\cdots+k_s\vec{a}_s$$

是一个向量，称它是向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_s$ 的一个**线性组合**，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 称为**系数**.

对于向量 $\vec{b}$ 和向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_s$，如果存在一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得

$$\vec{b}=k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+\cdots+k_s\vec{a}_s,$$

那么称 $\vec{b}$ 可以由向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_s$ **线性表出**.

定义 1.3　向量组用同一个起点的有向线段表示后，若它们在一条直线上，则称这个向量组**共线**；若它们在一个平面内，则称这个向量组**共面**.

由定义 1.3 知，$\vec{0}$ 与任意向量 $\vec{a}$ 共线；共线的向量组一定共面；两个向量一定共面.

命题 1.4　两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线的充分必要条件是，存在不全为 0 的实数 k_1,k_2，使得

$$k_1\vec{a}+k_2\vec{b}=\vec{0}. \tag{1.1}$$

证明　*必要性*　设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线. 若 $\vec{a}=\vec{0}$，则有

$$1\vec{a}+0\vec{b}=\vec{0}.$$

下面设 $a\neq\vec{0}$. 若 $\vec{b}=\vec{0}$，则有 $0\vec{a}+1\vec{b}=\vec{0}$. 若 $\vec{b}\neq\vec{0}$，由于 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，因此 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向或反向. 运用命题 1.3 得，存在唯一的实数 μ，使得 $\vec{b}=\mu\vec{a}$，从而 $\mu\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$，于是

$$\mu\vec{a}+(-1)\vec{b}=\vec{0}.$$

充分性 若有不全为 0 的实数 k_1,k_2,使得 $k_1\vec{a}+k_2\vec{b}=\vec{0}$,不妨设 $k_2\neq 0$,则 $\vec{b}=-\frac{k_1}{k_2}\vec{a}$. 若 $k_1=0$,则 $\vec{b}=\vec{0}$,从而 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 共线. 若 $k_1\neq 0$,则 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向或反向,从而 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 共线. □

推论 1.1 两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线的充分必要条件是从 $k_1\vec{a}+k_2\vec{b}=\vec{0}$ 可以推出

$$k_1=k_2=0.$$ □

命题 1.5 设有三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

(1) 若 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$,则 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面;

(2) 若 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面,且 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线,则存在唯一的一对实数 λ,μ,使得 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$.

证明 (1) 若 $\vec{a},\vec{b}$ 共线,则 $\vec{c},\vec{a},\vec{b}$ 共线,从而它们共面. 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线,从同一起点 O 作有向线段 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE}$ 分别表示 $\vec{a},\vec{b},\lambda\vec{a},\mu\vec{b}$,如图 1.11 所示. 两条相交直线 OA, OB 确定一个平面. 在这个平面上以 OD,OE 为边作平行四边形 $ODFE$,则

$$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{c},$$

从而 $\overrightarrow{OF}$ 表示 $\vec{c}$. 于是 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面.

(2) *存在性* 设 $\vec{c}\neq\vec{0}$. 从同一起点 O 作有向线段 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 分别表示 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. 由于 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面,且 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线,因此 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 在由两条相交直线 OA 和 OB 所确定的一个平面内,如图 1.12 所示. 在这个平面内,过点 C 作 $CD\parallel OB$,且与直线 OA 交于点 D;作 $CE\parallel OA$,且与直线 OB 交于点 E. 由于 $\overrightarrow{OD}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 共线,$\overrightarrow{OE}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 共线,因此根据命题 1.3 知,存在实数 λ,μ,使得 $\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OA}=\lambda\vec{a}$,$\overrightarrow{OE}=\mu\overrightarrow{OB}=\mu\vec{b}$,从而

$$\vec{c}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}.$$

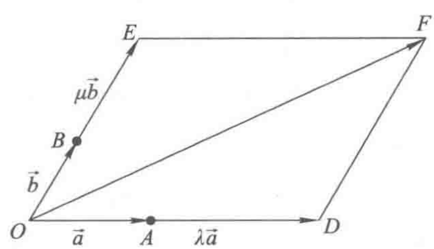

图 1.11

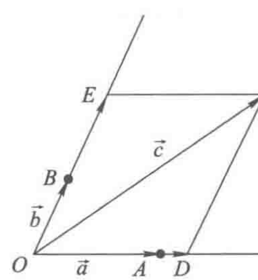

图 1.12

唯一性 假如还有一对实数 λ_1,μ_1,使得 $\vec{c}=\lambda_1\vec{a}+\mu_1\vec{b}$,则

$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\lambda_1\vec{a}+\mu_1\vec{b},\quad \text{从而}\quad (\lambda-\lambda_1)\vec{a}+(\mu-\mu_1)\vec{b}=\vec{0}.$$

由于 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线,因此根据推论 1.1 得 $\lambda-\lambda_1=0,\mu-\mu_1=0$. 于是 $\lambda=\lambda_1,\mu=\mu_1$. □

命题 1.6 三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面的充分必要条件是,存在不全为 0 的实数 k_1,k_2,k_3,使得

$$k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}=\vec{0}. \tag{1.2}$$

证明 必要性 设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面. 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线，则根据命题 1.5 知，存在实数 λ,μ，使得 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$，从而

$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+(-1)\vec{c}=\vec{0}.$$

若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，则根据命题 1.4 知，存在不全为 0 的实数 k_1,k_2，使得 $k_1\vec{a}+k_2\vec{b}=\vec{0}$，从而

$$k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+0\vec{c}=\vec{0}.$$

充分性 设有不全为 0 的实数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}=\vec{0}.$$

不妨设 $k_3\neq 0$，则 $\vec{c}=-\frac{k_1}{k_3}\vec{a}-\frac{k_2}{k_3}\vec{b}$. 根据命题 1.5 知，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面. □

推论 1.2 三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面的充分必要条件是从 $k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}=\vec{0}$ 可以推出 $k_1=k_2=k_3=0$. □

现在我们可以把几何空间 V 的结构搞清楚了，即我们有下述定理：

定理 1.1 几何空间 V 中取定三个不共面的向量 $\vec{d}_1,\vec{d}_2,\vec{d}_3$，则 V 中每一个向量 $\vec{c}$ 可以由 $\vec{d}_1,\vec{d}_2,\vec{d}_3$ 线性表出，且表出方式唯一.

证明 可表性 以 O 为起点作有向线段 $\overrightarrow{OD_1},\overrightarrow{OD_2},\overrightarrow{OD_3}$ 分别表示 $\vec{d}_1,\vec{d}_2,\vec{d}_3$. 由于 $\vec{d}_1$ 与 $\vec{d}_2$ 不共线，因此相交直线 OD_1 与 OD_2 确定一个平面 π. 由于 $\vec{d}_1,\vec{d}_2,\vec{d}_3$ 不共面，因此点 D_3 在平面 π 外，如图 1.13 所示. 对任一向量 $\vec{c}$，作有向线段 $\overrightarrow{OC}$ 表示 $\vec{c}$.

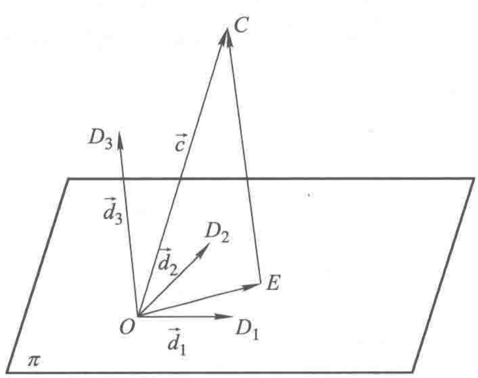

图 1.13

若点 C 不在平面 π 内，也不在直线 OD_3 上，则过点 C 作直线平行于 OD_3 且与平面 π 相交于点 E. 由于 $\overrightarrow{OE},\vec{d}_1,\vec{d}_2$ 共面，且 $\vec{d}_1,\vec{d}_2$ 不共线，因此根据命题 1.5 知，存在实数 k_1,k_2，使得 $\overrightarrow{OE}=k_1\vec{d}_1+k_2\vec{d}_2$. 又由于 $\overrightarrow{EC}$ 与 $\overrightarrow{OD_3}$ 共线，因此存在实数 k_3，使得 $\overrightarrow{EC}=k_3\overrightarrow{OD_3}=k_3\vec{d}_3$，从而

$$\vec{c}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EC}=k_1\vec{d}_1+k_2\vec{d}_2+k_3\vec{d}_3.$$

若点 C 在平面 π 内，则存在实数 l_1,l_2，使得

$$\vec{c}=\overrightarrow{OC}=l_1\vec{d}_1+l_2\vec{d}_2=l_1\vec{d}_1+l_2\vec{d}_2+0\vec{d}_3.$$

若点 C 在直线 OD_3 上，则

$$\vec{c}=\overrightarrow{OC}=\lambda\vec{d}_3=0\vec{d}_1+0\vec{d}_2+\lambda\vec{d}_3.$$

唯一性 假如 $\vec{c}$ 还有一种线性表出方式 $\vec{c}=h_1\vec{d}_1+h_2\vec{d}_2+h_3\vec{d}_3$，则

$$k_1\vec{d}_1+k_2\vec{d}_2+k_3\vec{d}_3=h_1\vec{d}_1+h_2\vec{d}_2+h_3\vec{d}_3,$$