中学数学综合题

1000例

武汉市先锋学校翻印

中 学 数 学

综合题一千例

武汉市中小学教材编写组
武汉市教师进修学院合编
武汉市洪山区教育局教研室

前　　言

为了满足当前中学数学教学的迫切需要，我们搜集、翻译了国内外数学竞赛试题、高等学校入学试题三千多题，汇编成《中学数学综合题一千例》、《中学数学习题集》两书。

其中，《中学数学综合题一千例》编入1030题，包括：代数部分，400题；几何部分，280题；三角部分，185题；解析几何部分，100题；一般部份，65题。每题都给出了解答，书未还附有武汉市历届数学竞赛题解。

《中学数学习题集》编入2328题，包括：代数部分，1112题；几何部分，529题；三角部分，379题；解析几何部分，308题。大部分题附有答案或提示。

考虑到这两本书是配合中学数学教学使用的，因此在编写时，我们力求做到：巩固学生所学的基础知识，进一步加强基本技能的训练；对常见题的各种类型和一般的解题方法，都有例可循，有题可练，同时也不与现行教材简单重复；通过范例尽可能阐明解题过程中的分析思考过程，通过练习引导学生从

掌握基本的技巧到掌握比较高深、复杂的技巧，逐步提高学生的解题能力；不脱离当前教材的基本要求，同时也作适当的加深和提高，并通过一些饶有趣味的富有启发性的题目，培养学生深入钻研的精神。这是我们的初步想法和尝试，我们殷切希望数学工作者和数学教育工作者对这项工作提出宝贵的意见和建议。

这两本书由武汉市中小学教材编写组、武汉市教师进修学院、武汉市洪山区教育局教研室联合组稿，由熊大寅、成应璟、陈昌祥、陈纪绵、梁法驯、肖若朴、李伯粤、樊恺执笔写成。由于编者水平有限，加之时间仓促，书中缺点错误肯定难免，还望读者及时指出，以便再版时改正。

编者 1978年8月

目　　录

代 数 部 分

1 有多少个四位数，它加上400以后就成为一个自然数的平方数?

解：满足条件的四位数的形式为

$$n^2-400\ (n\text{为自然数}).$$

由 $1000\leqslant n^2-400\leqslant 9999$,

得 $1400\leqslant n^2\leqslant 10399$,

但 $37^2<1400<38^2$, $101^2<10399<102^2$.

故 $38^2\leqslant n^2\leqslant 101^2$.

适合上述不等式的自然数有

$$101-38+1=64(\text{个}).$$

故满足条件的四位数共有64个.

2 求出四位数，等于它的四个数字之和的4次方，并证明解是唯一的.

解：设所求四位数为N，则

$$1000\leqslant N\leqslant 9999.$$

由此得 $5<\sqrt[4]{N}<10.$

故N只可能为6^4，7^4，8^4，9^4即

1296，2401，4076，6561.

其中， $2401=(2+4+0+1)^4$.

其他三数都不等于其数字之和的4次方，所以满足条件的四位数只有一个，即2401.

3 写出十个连续的自然数，个个都要是合数.

解一：这十个连续数可以写成$k+2,k+3,k+4,k+5,\cdots\cdots k+11$的形式. 如果k能够是2、3、4、5、6、7、8、9、10、11的倍数，那末这十个数一定都是合数了. 因此可令$k=11!$，而这十个连续数为$k!+2$，$k!+3$，$k!+4$，$\cdots\cdots k!+11$.

解二：同理这十个数也可以是$h!+2,h!+3,h!+4,\cdots\cdots h!+11(h\geqslant 11)$或$h!+m$，$h!+(m+1),h!+(m+2)$，$\cdots\cdots h!+(m+9)$.〔$h\geqslant 11$，$m\geqslant 2$，$m+9\leqslant h$〕

解三：同解法一，这十个连续数为$k+2$，$k+3,k+4,\cdots\cdots k+11$，但k只需是质数2、3、5、7、11的倍数就可以，因此当$k=2\times 3\times 5\times 7\times 11=2310$，求出的十连续数为2312，2313，2314，……2321.

解四：最小的十个数都是合数的连续数为114,115，116，117,118.119,120,121,122,123.这可以用筛数法求出来，就是写好从1起的自然数列后，划出2的倍数，3的倍数等,看什么时候划出十个连续数为止,即为上述答案.另一种分析方法如下：十个连续数的各个位数字分别是0到9，其中个位数字是0,2,4,6,8的都是2的倍数，显然这五个数都是合数. 剩下的个位数字为1,3,5,7,9的五个数中有一个是5的倍数，至少有一个且最多有两个是3的倍数，可以有但最多只能有一个是7的倍数. 因此如果十个都是合数，其中至少一个，它的最小质因数$\geqslant 11$，就是说最小可能的数是121，从121相邻数中去检查可得到114到123，115到124，116到125，117到126等十个数.

用同样方法可以在143（11×13），169（13×13），187（11×17），209（11×19），221（13×17），253（11×23），247

(13×19)，289 (17×17)，……等数的相邻数中去找寻，如在209相邻数中可得到200到210的十一个连续数都是合数. 而在221相邻数中可以得到212到222的十一个连续数都是合数.

但须注意，这样的分析仅说明它的可能，没有说明它必定可找到，因此有时会失败的.

4 证明：对于任意两个有理数，一定存在一个介于这两个有理数之间的有理数.

证：设$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$为任意两分数，这里a、b、c、d为整数，且$b>0$，$d>0$.（显然，任何一个有理数都可以写成这种形式.）

如果$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$，则$ad<bc$.

故有 $ab+ad<ab+bc$,

$a(b+d)<b(a+c)$.

$$\therefore \quad \frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}.$$

同理可证 $\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$.

因此，分数$\frac{a+c}{b+d}$介于$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$之间，原命题得证.

又证：设数轴上任意两有理点M、N的坐标为$\frac{a}{b}$、$\frac{c}{d}$，则MN的中点的坐标为

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}=\frac{ad+bc}{2bd}.$$

显然，$\frac{ad+bc}{2bd}$是一个有理数，它介于$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$之间，原命题得证

5 求证不存在这样两个既约分数，它们的乘积与它们的和均为整数．

证：设$\frac{m_1}{n_1}$和$\frac{m_2}{n_2}$是两个既约分数（m_1、m_2、n_1、n_2是整数），且有

$$\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}=p,\quad \frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=q,$$

这里，p、q是整数．

此时，$\frac{m_1}{n_1}$和$\frac{m_2}{n_2}$即为二次方程$x^2-px+q=0$的两个根．

但由 $$\frac{m_1^{\ 2}}{n_1^{\ 2}}-p\cdot\frac{m_1}{n_1}+q=0,$$

就有 $$\frac{m_1^{\ 2}}{n_1}=pm_1-qn_1.$$

上式左边不是整数，而右边是整数，这是不可能的．

同样，$\frac{m_2}{n_2}$也不可能是$x^2-px+q=0$的根．

所以，不存在两个既约分数，它们的乘积与它们的和均为整数．

6 试证$\lg\frac{6}{7}$ 是一个无理数．

证：$\lg\frac{6}{7}<0$，若$\lg\frac{6}{7}$是一个有理数，设

$$\lg\frac{6}{7}=-\frac{n}{m}.\ (m、n为正整数)$$

则 $$10^{-\frac{n}{m}}=\frac{6}{7},$$

$$10^{n}=(\frac{7}{6})^{m},$$

$$10^{n}\cdot(2\cdot3)^{m}=7^{m},$$

即 $$2^{m+n}\cdot3^{m}\cdot5^{n}=7^{m}.$$

但上式左边含有质因数2、3、5，而右边只含有质因数7，不可能相等，所以$\lg\frac{6}{7}$不可能是有理数，一定是无理数.

7　试证明：如果$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$中的a，b，c是有理数，那么$a=b=c=0$.

证：记$\sqrt[3]{2}=z$，因此$z^{3}=2$，已知的等式变形为

$$cz^{2}+bz+a=0. \qquad (1)$$

用2乘这个等式的两边，用z^{3}替换最后一项的2，得

$$2cz^{2}+2bz+az^{3}=0.$$

或 $$az^{2}+2cz+2b=0. \qquad (2)$$

由(1)和(2)消去z^{2}项，得

$$(ab-2c^{2})z+a^{2}-2bc=0. \qquad (3)$$

若一次方程(3)的系数不等于0，则

$$z=\frac{2bc-a^{2}}{ab-2c^{2}}$$

是有理数，这是不可能的.

所以，一次方程(3)的系数恒等于0，即

$$ab-2c^{2}=0,$$

和　$a^2-2bc=0$，

由此可得　$ab=2c^2$　和$a^4=4b^2c^2$.

如果$a\neq0$和$b\neq0$，逐项用第一个式子除第二个式子，

得　$a^6=2b^6$.　　(4)

即　$\frac{a}{b}=\sqrt[3]{2}$. 但$\sqrt[3]{2}$不等于有理数$\frac{a}{b}$，因此，除非$a=0$和$b=0$以外，等式(4)不能成立．而这时$c=0$．证毕

8　求$(1+i)^{10000}+(1-i)^{10000}$的值.

解：$(1+i)^{10000}+(1-i)^{10000}$

$=[(1+i)^2]^{5000}+[(1-i)^2]^{5000}$

$=(2i)^{5000}+(2i)^{5000}$

$=2\cdot2^{5000}$

$=2^{5001}$.

9　求$-7-24i$的平方根.

解：设所求之根为$a+bi$,则

$(a+bi)^2=-7-24i$.

得$a^2-b^2=-7$，$2ab=-24$.

联立解之，得

$a_1=-3$，$b_1=4$；$a_2=3$，$b_2=-4$.

∴　所求之平方根为$3-4i$和$-3+4i$.

10　求1的立方根（实根及虚根），并证明任一虚根的平方等于另一虚根.

解：　$x^3-1=0$.

即$(x-1)(x^2+x+1)=0$.

$\therefore$ 1的立方根为1，$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$.

而 $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2=\dfrac{1+2\sqrt{3}\,i+3i^2}{4}$

$=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$,

$\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2=\dfrac{1-2\sqrt{3}\,i+3i^2}{4}$

$=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$,

故任一虚根的平方等于另一虚根.

11 n为整数，试证

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n$$

$$=\begin{cases}2,\ (n\text{是3的倍数})\\-1.\ (n\text{不是3的倍数})\end{cases}$$

证：设 $\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}=\omega$，由上题知

$\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}=\omega^2$.

且 $1+\omega+\omega^2=0$，$\omega^3=1$.

（1） 当$n=3k$（k为整数），则

$\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n+\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n$

$=\omega^{3k}+\omega^{6k}$

$=1+1$

$= 2.$

（2） 当$n = 3k + 1$，则

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n$$

$= \omega^{3k+1} + \omega^{6k+2}$

$= \omega + \omega^2$

$= -1.$

（3） 当$n = 3k + 2$，与（2）同样可以得证.

12 已知：$x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$，求证：$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha$.

证： $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$可以化成

$x^2 - 2\cos\alpha \cdot x + 1 = 0.$

解得 $x = \cos\alpha \pm i\sin\alpha,$

所以 $x^n + \frac{1}{x^n} = (\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^n + (\cos\alpha \pm i\sin\alpha)^{-n}$

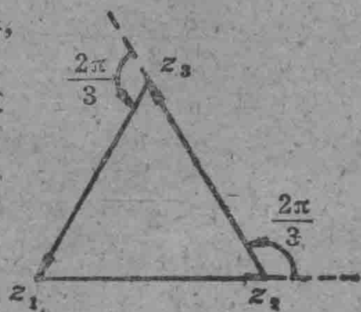
$= \cos n\alpha \pm i\sin n\alpha + \cos n\alpha \mp i\sin n\alpha$

$= 2\cos n\alpha.$

13 求证：三个复数z_1、z_2、z_3在复平面上组成一正三角形的充要条件是$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_2z_3 + z_3z_1 + z_1z_2$.

证：若$\triangle z_1z_2z_3$为正三角形，

则三外角都等于$\frac{2\pi}{3}$，故



$$\arg\left(\frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

并且三边都相等，即

$$|z_2-z_1|=|z_3-z_2|=|z_1-z_3|.$$

由此可推出

$$\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_3-z_2}.$$

$\therefore$ $$(z_3-z_2)^2=(z_1-z_3)(z_2-z_1).$$

即 $$z_1{}^2+z_2{}^2+z_3{}^2=z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2.$$

反过来，若等式$z_1{}^2+z_2{}^2+z_3{}^3=z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2$成立，照上面的步骤反推回去可得等式

$$\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_3-z_2}=\frac{z_2-z_1}{z_1-z_3}.$$

这说明$\triangle z_1z_2z_3$三外角相等，故为正三角形.

14　证明多项式$3x^4+1$是三个多项式平方的和.

证：$3x^4+1=(x^4+2x^3+x^2)+(x^4-2x^3+x^2)+(x^4-2x^2+1)$

$=(x^2+x)^2+(x^2-x)^2+(x^2-1)^2.$

15　证明：(1) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(a+c)(b+c)$；

(2) $(x+y+z)^3-[(x+y-z)^3+(x+z-y)^3+(y+z-x)^3]=24xyz.$

证：(1) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

$=[(a+b+c)^3-a^3]-(b^3+c^3)$

$=[(a+b+c)-a][(a+b+c)^2+(a+b+c)a+a^2]-(b+c)(b^2-bc+c^2)$

$=(b+c)(a^2+2ab+b^2+b^2+2ac+c^2+2bc+a^2+a^2+ab+ac+a^2-b^2+bc-c^2)$

$=3(b+c)(a^2+ab+ac+bc)$

$=3(a+b)(a+c)(b+c).$

（2）设$x+y-z=a$，$x+z-y=b$，$y+z-x=c$，则

$x+y+z=a+b+c$，这时，

左边$=(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$；

右边$=3(a+b)(a+c)(b+c)$.

由（1），即得左边=右边.

16 求证：$(a-x)^4(y-z)^4+(a-y)^4(z-x)^4+(a-z)^4(x-y)^4$

$$=2[(a-y)^2(a-z)^2(x-y)^2(x-z)^2+(a-z)^2(a-x)^2(y-z)^2(y-x)^2+(a-x)^2(a-y)^2(z-x)^2(z-y)^2].$$

证：设$(a-x)(y-z)=\alpha$，$(a-y)(z-x)=\beta$，

$(a-z)(x-y)=\gamma$.

则只需证，$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2-2\alpha^2\beta^2=0$.

但 $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2-2\alpha^2\beta^2$

$$=-(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma),$$

而 $\alpha+\beta+\gamma=(a-x)(y-z)+(a-y)(z-x)+(a-z)(x-y)=0$,

故原式可得证.

17 分解因式

$y^3(a-x)-x^3(a-y)+a^3(x-y)$.

解：原式$=ay^3-xy^3-ax^3+x^3y+a^3(x-y)$

$=xy(x^2-y^2)-a(x^3-y^3)+a^3(x-y)$

$=(x-y)[x^2(y-a)+xy(y-a)-a(y^2-a^2)]$

$=(x-y)(y-a)(x^2+xy-ay-a^2)$

$=(x-y)(x-a)(y-a)(a+x+y)$.

18　分解因式：

$$4(x^2+3x+1)^2-(x^2+x-4)^2$$
$$-(x^2+5x+6)^2$$

解：原式 $=[(2x^2+6x+2)-(x^2+x-4)]$

$$\times[(2x^2+6x+2)+(x^2+x-4)]$$
$$-(x^2+5x+6)^2$$
$$=(x^2+5x+6)(3x^2+7x-2)$$
$$-(x^2+5x+6)^2$$
$$=2(x+2)(x+3)(x^2+x-4).$$

19　分解因式：$(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2$.

解：当 $y\neq 1$ 时，

$$x^2=\frac{(1+y^2)\pm\sqrt{(1+y^2)^2-(1-y)^2(1+y)^2}}{(1-y)^2}$$

$$=\frac{(1+y^2)\pm 2y}{(1-y)^2}=\begin{cases}\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)^2,\\ 1.\end{cases}$$

$$\therefore\quad x=1,\ -1,\ \frac{1+y}{1-y},\ -\frac{1+y}{1-y}.$$

故原式 $=(1-y)^2(x-1)(x+1)\left(x-\dfrac{1+y}{1-y}\right)\left(x+\dfrac{1+y}{1-y}\right)$

$$=(x-1)(x+1)(x-y-xy-1)(x+y-xy+1).$$

当 $y=1$ 时，容易验证，其分解式仍具有上述形式.

20　分解因式：$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$.

解：设　$f=(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$.

当 $y=-z$ 时，$f=0$，故 $y+z$ 为 f 的一个因式.

同理，$z+x$与$x+y$也为f的因式，所以$(x+y)(y+z)(z+x)$为f的因式，但f为五次式，因此其余的因式为两次式，又f关于x，y，z为对称，故有

$$f=(x+y)(y+z)(z+x)[a(x^2+y^2+z^2)+b(xy+yz+zx)].$$

令 $x=1$，$y=1$，$z=0$，得 $2a+b=15$；

令 $x=y=z=1$， 得 $a+b=10$.

联立解之，得$a=5$，$b=5$. 故

$$\begin{aligned} f&=(x+y)(y+z)(z+x)[5(x^2+y^2+z^2)\\ &\qquad+5(xy+yz+zx)]\\ &=5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx). \end{aligned}$$

即$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5=5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$.

21 分解因式：$x^{10}+x^5+1$.

解：
$$\begin{aligned} x^{10}+x^5+1&=(x^{10}+x^9+x^8)-(x^9+x^8+x^7)+(x^7+x^6+x^5)\\ &\quad-(x^6+x^5+x^4)+(x^5+x^4+x^3)-(x^3+x^2+x)\\ &\quad+(x^2+x+1)\\ &=(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1). \end{aligned}$$

22 分解因式：$x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$.

解：
$$\begin{aligned} x^{12}+x^9+x^6+x^3+1&=\frac{x^{15}-1}{x^3-1}=\frac{x^5-1}{x-1}\cdot\frac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1}\\ &=(x^4+x^3++x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1). \end{aligned}$$

23 设$f(x,y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$，求$f(x,y)$可分为两个一次因式之条件.

解：若$a\neq0$，令$f(x,y)=0$，并写为下述形式：

$$ax^2+2x(hy+g)+by^2+2fy+c=0.$$