[美]W. Rudin 著
赵慈庚 蒋铎 译

数学分析原理

下册

数学分析原理

下　册

[美] W. Rudin 著
赵慈庚　蒋　铎译

本书是根据 W. Rudin 所著《Principles of Mathematical Analysis》一书 1976 年第三版译出的．原书是为数学专业的高年级大学生和一年级研究生写的数学分析教本、译本分上、下册出版．

下册包括原书七至十一章，内容为函数序列与函数项级数、特殊函数、多元函数、微分形式的积分、Lebesgue 理论．

本书可供数学专业高年级学生、研究生和教师参考．

高等学校教学参考书

数 学 分 析 原 理

下　册

［美］W. Rudin 著

赵慈庚　蒋　铎译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 7　字数 170,000

1979 年 11 月第 1 版　1982 年 4 月第 2 次印刷

印数 18,201—26,600

书号 13012·0398　定价 0.52 元

目　　录

重要符号表

下表所列符号附以简短说明及其定义所在之页数.

上　册

下　册

第七章　函数序列与函数项级数

虽然下面的多数定理以及它们的证明不难推广到向量值函数，甚至推广到映入一般度量空间之内的映射，但在这一章里，我们只限于讨论复值函数(自然，它包括实值函数)．我们宁愿停止在这个简单范围之内，为的是把注意力集中在最重要的方面——调换两个极限过程时出现的若干问题.

主要问题的讨论

7.1　定义　假设$n=1,2,3,\cdots$，$\{f_n\}$是一个定义在集E上的函数序列，再假设数列$\{f_n(x)\}$对于每个$x\in E$收敛．我们便可以由

(1)
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\quad(x\in E).$$

确定一个函数f.

这时候，我们说$\{f_n\}$在E上收敛，并且f是$\{f_n\}$的极限或极限函数．有时也用一个带一点描述性的术语，即：如果(1)成立，就说“在E上$\{f_n\}$逐点收敛于f”．类似地，如果对于每个$x\in E$，$\Sigma f_n(x)$收敛，并且如果我们定义

(2)
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\quad(x\in E),$$

便说函数f是级数Σf_n的和.

出现的主要问题是：在极限运算(1)与(2)之下，判断函数的一些重要性质是否能够保留下来．例如，假如函数f_n都是连续的，或可微的，或可积的，这些性质对于极限函数是不是也成立？f'_n与

f' 或 f_n 的积分与 f 的积分之间的关系是什么?

所谓 f 在 x 点连续, 即是说

$$\lim_{t\to x} f(t)=f(x).$$

因此, 问一个连续函数序列的极限是否连续, 就等同于问是否

$$\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t)=\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t), \tag{3}$$

换句话说, 执行这两个极限过程的次序是否无所谓. 在(3)式的左端, 我们先让 $n\to\infty$, 然后让 $t\to x$; 在右端, 先是 $t\to x$, 然后 $n\to\infty$.

现在, 我们用几个实例说明两个极限过程一般不能互相交换而不影响最后结果. 然后证明在某些条件下, 两个极限运算的次序是无所谓的.

第一个也是最简单的例子, 涉及一个"双重序列".

7.2 例 $m=1,2,3,\cdots,\ n=1,2,3,\cdots$, 置

$$s_{m,n}=\frac{m}{m+n},$$

那么对于每个固定的 n,

$$\lim_{m\to\infty} s_{m,n}=1.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} s_{m,n}=1. \tag{4}$$

另一方面, 对于每个固定的 m,

$$\lim_{n\to\infty} s_{m,n}=0.$$

于是

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} s_{m,n}=0. \tag{5}$$

7.3 例 设 x 是实数, $n=0,1,2,\cdots$,

$$f_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n},$$

试看

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}, \tag{6}$$

由于 $f_n(0)=0$，便应该 $f(0)=0$. 当 $x\neq 0$ 时，(6)式中最末的级数是收敛的几何级数，以 $1+x^2$ 为和(定理 3.26). 因此，

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x=0),\\ 1+x^2 & (x\neq 0).\end{cases} \tag{7}$$

所以，连续函数的收敛级数可以有不连续的和.

7.4 例 $m=1, 2, 3, \cdots$，置

$$f_m(x)=\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}.$$

当 $m!x$ 是整数时，$f_m(x)=1$，对于一切其他 x 值，$f_m(x)=0$. 现在令

$$f(x)=\lim_{m\to\infty} f_m(x).$$

当 x 是无理数时，对于每个 m 值，$f_m(x)=0$，因而 $f(x)=0$；当 x 是有理数时，比如说 $x=\frac{p}{q}$，这里 p 和 q 是整数；这时如果 $m\geqslant q$，$m!x$ 便是整数，于是 $f(x)=1$. 因此

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}=\begin{cases}0 & (x\text{ 是无理数}),\\ 1 & (x\text{ 是有理数}).\end{cases} \tag{8}$$

因此就得到了一个处处间断的极限函数，它不是 Riemann 可积的(第六章，习题 4).

7.5 例 设 x 是实数，$n=1, 2, 3, \cdots$，

$$f_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, \tag{9}$$

于是

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0.$$

那么 $f'(x)=0$，另外

$$f_n'(x)=\sqrt{n}\cos nx$$

所以，$\{f_n'\}$不收敛于f'. 例如，当$n\to\infty$时，

$$f_n'(0)=\sqrt{n}\to+\infty.$$

而 $f'(0)=0$.

7.6 例 设 $0\leqslant x\leqslant 1, n=1,2,3,\cdots$. 令

(10) $$f_n(x)=n^2x(1-x^2)^n$$

对于 $0<x\leqslant 1$，根据定理 3.20(*d*)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0.$$

又因为 $f_n(0)=0$，所以

(11) $$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0 \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

略加计算就能证明

$$\int_0^1 x(1-x^2)^n dx=\frac{1}{2n+2},$$

因此，虽然有(11)式，但是当 $n\to\infty$ 时，

$$\int_0^1 f_n(x)dx=\frac{n^2}{2n+2}\to+\infty$$

如果在(10)式中用 n 代替 n^2，(11)式仍然成立. 但是现在得到的是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2}=\frac{1}{2}$$

而

$$\int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx=0$$

所以，积分的极限和极限的积分，即使两者都是有限的，也未必相等.

这些例题说明，如果粗心地对调了两个极限过程会错误到什么样子. 鉴于这一点，我们定义一个新的收敛方式，它比定义 7.1 中规定的逐点收敛性要强些. 这种新的收敛方式能使我们达到正

面的结果.

一致收敛性

7.7 定义 如果对每一个 $\varepsilon>0$, 有一个整数 N, 使得 $n\geqslant N$ 时, 对于一切 $x\in E$, 成立

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon, \tag{12}$$

我们就说, 函数序列 $\{f_n\}$, $n=1, 2, 3, \cdots$, 在 E 上一致收敛于函数 f.

显然, 每个一致收敛序列一定逐点收敛. 很明显, 这两个概念之间的差异在于: 如果 $\{f_n\}$ 在 E 上逐点收敛, 那便存在着这样的函数 f, 它对于每个 $\varepsilon>0$, 又对于每个 $x\in E$, 有一个整数 N. 如果 $n\geqslant N$, (12)式就成立, 这里的 N 既依赖于 ε, 又依赖于 x. 如果 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛, 便对于每个 $\varepsilon>0$, 能够对于一切 $x\in E$, 找出一个整数 N, 当 $n\geqslant N$ 时, (12)式成立.

级数 $\Sigma f_n(x)$ 的部分和, 规定为

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x)=s_n(x)$$

如果部分和序列 $\{s_n\}$ 在 E 上一致收敛, 我们就说级数 $\Sigma f_n(x)$ 在 E 上一致收敛.

下面是关于一致收敛性的 Cauchy 准则:

7.8 定理 定义在 E 上的函数序列 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛, 当且仅当: 对于每个 $\varepsilon>0$, 存在着一个整数 N, 使得 $m\geqslant N$, $n\geqslant N$ 和 $x\in E$ 时, 成立

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\varepsilon. \tag{13}$$

证 假设 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛, 并且令 f 是极限函数. 那么, 有一个整数 N, 使得 $n\geqslant N$ 和 $x\in E$ 时成立

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是 $n\geqslant N, m\geqslant N, x\in E$ 时

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant|f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f_m(x)|\leqslant\varepsilon.$$

反之，假设 Cauchy 条件成立. 根据定理 3.11，序列 $\{f_n\}$ 对于每个 x 收敛于一个极限，我们可称它为 $f(x)$. 于是，序列 $\{f_n\}$ 在 E 上收敛于 f. 我们必须证明这个收敛是一致的.

假设给定了 $\varepsilon>0$，再选定使(13)式成立的 N. 在(13)里把 n 固定了，而让 $m\to\infty$. 由于当 $m\to\infty$ 时，$f_m(x)\to f(x)$，这就得到了对于个个 $n\geqslant N$ 和个个 $x\in E$ 都能适用的

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon. \tag{14}$$

这就完成了证明.

下面的判别准则往往有用:

7.9 定理 假设

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\quad(x\in E).$$

令

$$M_n=\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|.$$

那么，在 E 上 $f_n\to f$ 是一致的，当且仅当: $n\to\infty$ 时，$M_n\to 0$.

这是定义 7.7 的直接结果. 证明从略.

对于级数，有一个判别一致收敛性十分方便的方法，它归功于 Weierstrass.

7.10 定理 假设 $\{f_n\}$ 是定义在 E 上的函数序列. 并且，假设

$$|f_n(x)|\leqslant M_n\quad(x\in E.\ \ n=1,2,3,\cdots).$$

如果 $\sum M_n$ 收敛，那么，$\sum f_n$ 便在 E 上一致收敛.

注意，并没有说它的逆命题怎样(而实际上是不真的).

证 如果 $\sum M_n$ 收敛，那么，对于任意的 $\varepsilon>0$，只要 m 和 n 都充分地大，便能够

$$\left|\sum_{i=n}^{m} f_i(x)\right| \leqslant \sum_{i=n}^{m} M_i \leqslant \varepsilon \quad (x \in E).$$

根据定理 7.8，就得出一致收敛性.

一致收敛性与连续性

7.11 定理 假设在度量空间内的集 E 上 f_n 一致收敛于 f. 设 x 是 E 的极限点. 再假设

(15) $$\lim_{t \to x} f_n(t) = A_n \quad (n=1, 2, 3, \cdots).$$

那么 $\{A_n\}$ 收敛，并且

(16) $$\lim_{t \to x} f(t) = \lim_{n \to \infty} A_n.$$

换句话说，这结论就是

(17) $$\lim_{t \to x} \lim_{n \to \infty} f_n(t) = \lim_{n \to \infty} \lim_{t \to x} f_n(t).$$

证 假设给定了 $\varepsilon > 0$. 按 $\{f_n\}$ 的一致收敛性，存在着 N，使得 $n \geqslant N$, $m \geqslant N$ 和 $t \in E$ 时成立

(18) $$|f_n(t) - f_m(t)| \leqslant \varepsilon$$

在(18)式中，让 $t \to x$. 得到的是，当 $n \geqslant N$, $m \geqslant N$ 时

$$|A_n - A_m| \leqslant \varepsilon.$$

于是 $\{A_n\}$ 是Cauchy 序列，因而收敛. 比如说收敛于 A.

其次

(19) $$|f(t) - A| \leqslant |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - A_n| + |A_n - A|.$$

先选取 n，要求对于一切 $t \in E$ 使得

(20) $$|f(t) - f_n(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

（根据一致收敛性，这是能做到的），并且使得

(21) $$|A_n - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

然后对于这个 n，选取 x 的一个邻域 V，使得 $t \in V \cap E$, $t \neq x$ 能保证

(22) $$|f_n(t)-A_n|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

将(20)到(22)的三个不等式代入(19)式，结果就是：只需 $t\in V\cap E, t\neq x$ 便有

$$|f(t)-A|\leqslant\varepsilon.$$

这和(16)式等价.

7.12 定理 如果$\{f_n\}$是E上的连续函数的序列. 并且在E上，f_n一致收敛于f. 那么，f在E上连续.

这个非常重要的结果是定理7.11的直接推论.

它的逆命题不真. 也就是说，虽然收敛不是一致的，但是，一个连续函数的序列也可以收敛于一个连续函数. 例题7.6就属于这一类(为看清这一点，需要应用定理7.9). 但是，有一种情形，我们可以断定逆命题是正确的：

7.13 定理 假定K是紧集. 并且

(a) $\{f_n\}$是K上的连续函数序列，

(b) $\{f_n\}$在K上逐点收敛于连续函数f，

(c) 对于一切$x\in K$和$n=1,2,3,\cdots,f_n(x)\geqslant f_{n+1}(x)$.

那么在K上$f_n\to f$是一致的.

证 令$g_n=f_n-f$，于是g_n是连续的，在每点上$g_n\to 0$并且$g_n\geqslant g_{n+1}$. 现在要证明g_n在K上一致收敛于0.

假设给定了$\varepsilon>0$，假设K_n是使$g_n(x)\geqslant\varepsilon$的一切$x\in E$的集. 由于$g_n$连续，那么$K_n$是闭的(定理4.8)，所以是紧的(定理2.35). 由于$g_n\geqslant g_{n+1}$，我们得到$K_n\supset K_{n+1}$. 固定了$x\in K$. 由于$g_n(x)\to 0$，我们知道只需n充分大，便能使$x\notin K_n$，所以$x\notin\cap K_n$. 换句话说，$\cap K_n$是空的，从而对应于某个N的K_N是空的(定理2.36). 必然对于一切$x\in K$和一切$n\geqslant N$，有$0\leqslant g_n(x)<\varepsilon$. 这就证明了这定理.

注意紧性是必不可少的. 例如:

$$f_n(n)=\frac{1}{nx+1}, \quad (0<x<1, \quad n=1,2,3,\cdots)$$

在(0, 1)里 $f_n(x)$单调地趋于零, 然而不是一致收敛.

7.14 定义 如果X是度量空间, $\mathscr{C}(X)$就表示以X为定义域的复值连续有界函数的集.

[注意, 如果X是紧集, 有界性就是多余的(定理4.15). 所以如果X是紧集, $\mathscr{C}(X)$就由X上的一切复值连续函数组成.]

我们给每个 $f\in\mathscr{C}(X)$ 配置上它的上确范数

$$\|f\|=\sup_{x\in X}|f(x)|.$$

因为假定了f是有界的, 那么$\|f\|<\infty$. 显然只有当$f(x)=0$(对于每个$x\in X$)时, 才有$\|f\|=0$. 如果$h=f+g$, 那么对于一切$x\in X$,

$$|h(x)|\leqslant|f(x)|+|g(x)|\leqslant\|f\|+\|g\|.$$

所以

$$\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|.$$

如果定义$f\in\mathscr{C}(X)$与$g\in\mathscr{C}(X)$之间的距离是$\|f-g\|$, 那么它就满足关于度量的公理2.15.

于是我们使$\mathscr{C}(X)$变成了度量空间.

定理7.9可以重述为

对于$\mathscr{C}(X)$的度量来说, 序列$\{f_n\}$收敛于f, 当且仅当f_n在X上一致收敛于f.

因此$\mathscr{C}(X)$的闭子集有时叫做一致闭的, 集$\mathscr{A}\subset\mathscr{C}(X)$的闭包叫做它的一致闭包, 等等.

7.15 定理 上边说的度量使得$\mathscr{C}(X)$变成了完备度量空间.

证 设$\{f_n\}$是$\mathscr{C}(X)$里的Cauchy序列. 这就是说, 对应于每个$\varepsilon>0$有一个N使得$\|f_n-f_m\|<\varepsilon$在$n\geqslant N$及$m\geqslant N$时成立.

于是根据定理 7.8 有一个函数 f，它以 X 为定义域，而 $\{f_n\}$ 一致收敛于它. 根据定理 7.12，f 是连续的. 不仅如此，由于总有一个 n，使得 $|f(x)-f_n(x)|<1$ 对于一切 $x\in X$ 成立，而 f_n 又有界，那么 f 是有界的.

所以 $f\in\mathscr{C}(X)$，而且由于 f_n 在 X 上一致收敛于 f，那么当 $n\to\infty$ 时 $\|f-f_n\|\to 0$.

一致收敛性与积分

7.16 定理 设 α 在 $[a,b]$ 上单调递增. 假定在 $[a,b]$ 上 $f_n\in\mathscr{R}(\alpha)$，$n=1,2,3,\cdots$，再假定在 $[a,b]$ 上 $f_n\to f$ 是一致的，那么在 $[a,b]$ 上 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$，而且

$$\int_a^b f d\alpha=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n d\alpha. \tag{23}$$

（极限的存在性是本结论的一部分.）

证 只对于实函数证明这定理就够了. 令

$$\varepsilon_n=\sup|f_n(x)-f(x)|, \tag{24}$$

这上确界是在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上取的. 这时

$$f_n-\varepsilon_n\leqslant f\leqslant f_n+\varepsilon_n,$$

所以 f 的上下积分（参阅定义 6.2）满足

$$\int_a^b (f_n-\varepsilon_n)d\alpha\leqslant\underline{\int} f d\alpha\leqslant\overline{\int} f d\alpha\leqslant\int_a^b (f_n+\varepsilon_n)d\alpha. \tag{25}$$

从而

$$0\leqslant\overline{\int} f d\alpha-\underline{\int} f d\alpha\leqslant 2\varepsilon_n[\alpha(b)-\alpha(a)].$$

由于 $n\to\infty$ 时，$\varepsilon_n\to 0$（定理 7.9），可见 f 的上下积分相等.

所以 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$. 现在再一次运用(25)，就得到

$$\left|\int_a^b f d\alpha-\int_a^b f_n d\alpha\right|\leqslant\varepsilon_n[\alpha(b)-\alpha(a)] \tag{26}$$