高等学校教材

工程数学

线性代数

同济大学数学教研室编

高等教育出版社

高等学校教材

工程数学

线性代数

同济大学数学教研室 编

高等教育出版社

出 版 前 言

本书是由同济大学数学教研室主编的《高等数学》(1978年第1版)第十三章线性代数改编而成的. 改编者系同济大学骆承钦同志,他参照了1980年高等学校工科数学教材编审委员会审订的《工程数学教学大纲》,对原教材作了较多的修改与补充,以期更适合高等工业院校作为教材使用,也可作为工程技术人员自学用书. 本书修订稿仍由陆子芬教授任主审,参加一起审稿的还有盛骤、孙玉麟等同志.

本书内容为 n 阶行列式、矩阵及其运算、向量组的线性相关性与矩阵的秩、线性方程组、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换等,书末还附有习题答案。

责任编辑 丁鹤龄

本书原由人民教育出版社出版。1983 年 3 月 9 日,上级同意恢复"高等教育出版社";本书今后改用高等教育出版社名义继续印行。

高等学校教材

工程数学

线 性 代 数

同济大学数学教研室 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 4.875 字数 116,000

1982 年 3 月第 1 版 1984 年 2 月第 4 次印刷

印数 186,701—311,700

书号 13010·0732 定价 0.50 元

编者的话

同济大学数学教研室主编的《高等数学》(1978年第1版) 年前决定修订再版,其中的第十三章线性代数决定单独成书,以便应用. 为此,由同济大学骆承钦同志把《高等数学》第十三章改编成本书. 在改编时,对原教材作了较多的修改与补充,以期能较为符合1980年制订的教学大纲的要求.

本书介绍线性代数的一些基本知识,可作为高等工业院校工程数学《线性代数》课程的试用教材或教学参考书. 本书前五章教学时数约34学时,第六章较多地带有理科的色彩,供对数学要求较高的专业选用. 各章配有少量习题,书末附有习题答案.

参加本书审稿的有上海海运学院陆子芬教授(主审)、浙江大学盛骤、孙玉麟等同志. 他们认真审阅了原稿,并提出了不少改进意见,对此我们表示衷心感谢.

编　　者

一九八一年十一月

目　录

第一章 n 阶行列式

在初等数学中讨论过二阶、三阶行列式，并且利用它们来解二元、三元线性方程组. 为了研究 n 元线性方程组，需要把行列式推广到 n 阶，即讨论 n 阶行列式的问题. 为此，下面先介绍全排列等知识，然后引出 n 阶行列式的概念.

§1 全排列及其逆序数

先看一个例子.

引例 用 1、2、3 三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数?

解 这个问题相当于说，把三个数字分别放在百位、十位与个位上，有几种不同的放法?

显然，百位上可以从 1、2、3 三个数字中任选一个，所以有 3 种放法；十位上只能从剩下的两个数字中选一个，所以有 2 种放法；而个位上只能放最后剩下的一个数字，所以只有 1 种放法. 因此，共有 $3\times2\times1=6$ 种放法.

这六个不同的三位数是:

123, 132, 213, 231, 312, 321.

在数学中，把考察的对象，例如上例中的数字 1、2、3 叫做元素. 上述问题就是：把 3 个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法?

对于 n 个不同的元素，也可以提出类似的问题：把 n 个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法?

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列(也简称排列).

n 个不同元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示. 由引例的结果可知 $P_3=3\cdot2\cdot1=6$.

为了得出计算 P_n 的公式，可以仿照引例进行讨论:

从 n 个元素中任取一个放在第一个位置上，有 n 种取法；

又从剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个放在第二个位置上，有 $n-1$ 种取法；

这样继续下去，直到最后只剩下一个元素放在第 n 个位置上，只有 1 种取法. 于是

$$P_n=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n!.$$

对于 n 个不同的元素，我们规定各元素之间有一个标准次序(例如 n 个不同的自然数，可规定由小到大为标准次序)，于是在这 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有 1 个逆序. 一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

下面我们来讨论计算排列的逆序数的方法.

不失一般性，不妨设 n 个元素为 1 至 n 这 n 个自然数，并规定由小到大为标准次序. 设

$$p_1p_2\cdots p_n$$

为这 n 个自然数的一个排列，考虑元素 $p_i(i=1, 2, \cdots, n)$，如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个，就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i. 全体元素的逆序数之总和

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n} t_i$$

即是这个排列的逆序数.

例 1 求排列 32514 的逆序数.

解 在排列 32514 中,

3 排在首位, 逆序数总为 0;

2 的前面比 2 大的数有一个(3), 故逆序数为 1;

5 是最大数, 逆序数总为 0;

1 的前面比 1 大的数有三个(3、2、5), 故逆序数为 3;

4 的前面比 4 大的数有一个(5), 故逆序数为 1;

于是排列的逆序数为

$$t=0+1+0+3+1=5.$$

§2 n 阶行列式的定义

为了作出 n 阶行列式的定义, 我们先研究三阶行列式的结构. 三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1}$$

容易看出:

(i) (1)式右边的每一项都恰是三个元素的乘积, 这三个元素位于不同的行、不同的列. 因此, (1)式右端的任意项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$. 这里第一个下标(称行标)排成标准排列123, 而第二个下标(称列标)排成 $p_1p_2p_3$, 它是 1、2、3 三个数的某个排列. 这样的排列共有 6 种, 对应(1)式右端共含 6 项.

(ii) 各项的正负号与列标的排列对照:

带正号的三项列标排列是: 123, 231, 312;

带负号的三项列标排列是: 132, 213, 321.

经计算可知前三个排列都是偶排列,而后三个排列都是奇排列.因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^t$,其中 t 为列标排列的逆序数.

总之,三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3},$$

其中 t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数,$\sum$ 表示对 1、2、3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 取和.

仿此,我们可以把行列式推广到一般情形.

定义 设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}, \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积,并冠以符号 $(-1)^t$,得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{2}$$

的项,其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列,t 为这个排列的逆序数. 由于这样的排列共有 $n!$ 个,因而形如(2)式的项共有 $n!$ 项. 所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

称为 n 阶行列式,记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记作 $\Delta(a_{ij})$. 数 a_{ij} 称为行列式 $\Delta(a_{ij})$ 的元素.

用此定义的二阶、三阶行列式，与用对角线法则定义的二阶、三阶行列式，显然是一致的．当 $n=1$ 时，$|a|=a$，注意不要与绝对值记号相混淆．

例 2 证明对角行列式（其中对角线上的元素是 λ_i，未写出的数都是 0）

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

证 第一式是显然的，下面只证第二式．

若记 $\lambda_i=a_{i,n-i+1}$，则依行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^t a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^t\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

其中 t 为排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数，故

$$t=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$ 证毕

对角线以下(上)的元素都为 0 的行列式叫做上(下)三角行列式，它的值与对角行列式一样．

例 3 证明下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 由于当 $j>i$ 时，$a_{ij}=0$，故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ip_i} 其下标应有 $p_i\leqslant i$，即 $p_1\leqslant 1,\ p_2\leqslant 2,\ \cdots,\ p_n\leqslant n$.

在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12\cdots n$，所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 此项的符号 $(-1)^t=(-1)^0=1$，所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

§3 对　　换

为了研究 n 阶行列式的性质，我们先来讨论对换以及它与排列的奇偶性的关系.

在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的手续叫做对换. 将相邻两个元素对调，叫做相邻对换.

定理 1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设排列 $a_1\cdots a_lab b_1\cdots b_m$，对换 a 与 b 排列变为 $a_1\cdots a_lbab_1\cdots b_m$. 显然，$a_1,\ \cdots,\ a_l;\ b_1,\ \cdots,\ b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变，而 $a,\ b$ 两元素的逆序数改变为：当 $a<b$ 时，经对换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1. 所以排列 $a_1\cdots a_lab b_1\cdots b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_lbab_1\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_lab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_n$，把它作 m 次相邻对换，调成 $a_1\cdots a_lab b_1\cdots b_mc_1\cdots c_n$，再调成 $a_1\cdots a_lbb_1\cdots b_mac_1\cdots c_n$，作了 $m+1$ 次相

邻对换．总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，排列 $a_1\cdots a_l a b_1\cdots b_m b c_1\cdots c_n$ 调成排列 $a_1\cdots a_l b b_1\cdots b_m a c_1\cdots c_n$，所以这两个排列的奇偶性相反．

推论 **奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数．**

证 由定理知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列(逆序数为 0)，因此知推论成立．　　证毕

利用定理 1，我们来讨论行列式定义的另一种表示法．

对于行列式的任一项

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列，t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数，对换 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 成

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n},$$

这时，行标排列与列标排列同时作了一次相应的对换，设新的行标排列 $1\cdots j\cdots i\cdots n$ 的逆序数为 r，则 r 为奇数；设新的列标排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1，则 $(-1)^{t_1}=-(-1)^t$．故 $(-1)^t=(-1)^{r+t_1}$，于是

$$(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}=(-1)^{r+t_1}a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}.$$

这就表明，对换乘积中两元素的次序，从而行标排列与列标排列同时作了相应的对换，则行标排列与列标排列的逆序数之和并不改变奇偶性．经一次对换是如此，经多次对换当然还是如此．于是，经过若干次对换，使：

列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$(逆序数为 t) 变为自然排列 (逆序数为 0)；

行标排列则相应地从自然排列变为某个新的排列，设此新排列为 $q_1q_2\cdots q_n$，其逆序数为 s，则有

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^s a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

又，若 $p_i=j$，则 $q_j=i$(即 $a_{ip_i}=a_{ij}=a_{q_jj}$)．可见排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 所唯一确定．

由此可得

定理 2 n **阶行列式也可定义为**

$$D=\sum(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

其中 t 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

证 按行列式定义有

$$D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

记
$$D_1=\sum(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}.$$

按上面讨论知：对于 D 中任一项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，总有且仅有 D_1 中的某一项 $(-1)^s a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$ 与之对应并相等；反之，对于 D_1 中的任一项 $(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$，也总有且仅有 D 中的某一项 $(-1)^s a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$ 与之对应并相等，于是 D 与 D_1 中的项可以一一对应并相等，从而 $D=D_1$.

§4 行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D' 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

证 记 $D=\Delta(a_{ij})$ 的转置行列式

$$D'=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij}=a_{ji}$ $(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，按定义

$$D'=\sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}.$$

而由定理 2, 有

$$D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

故

$$D'=D.$$

证毕

由此性质可知,行列式中的行与列具有同等的地位,行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立,反之亦然.

性质 2　互换行列式的两行(列), 行列式变号.

证　设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D=\Delta(a_{ij})$ 交换 i、j 两行得到的, 即当 $k\neq i, j$ 时, $b_{kp}=a_{kp}$; 当 $k=i, j$ 时, $b_{ip}=a_{jp}$, $b_{jp}=a_{ip}$. 于是

$$\begin{aligned} D_1&=\sum(-1)^t b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &=\sum(-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}, \end{aligned}$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列, t 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数. 设排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 t_1, 则 $(-1)^t=-(-1)^{t_1}$, 故

$$D_1=-\sum(-1)^{t_1}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D.$$

证毕

以 r_i 表示行列式的第 i 行, 以 c_i 表示第 i 列. 交换 i, j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$, 交换 i, j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

推论　如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式为零.

证　把这两行互换, 有 $D=-D$, 故 $D=0$.

性质 3　行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k, 等于用数 k 乘此行列式. (第 i 行乘以 k, 记作 $r_i\times k$)

推论　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面. (第 i 行提出公因子 k, 记作 $r_i\div k$)

性质 4 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为零.

性质 5 若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和（例如第 i 列的元素都是两数之和）：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列（行）对应的元素上去，行列式不变．即（例如以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上，并记作 c_i+kc_j）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_i+kc_j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (i\neq j).$$

以上诸性质请读者证明之．利用这些性质可简化行列式的计算．

例4 计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix}=40.$$

例5 计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 这个行列式的特点是各列4个数之和都是6．今把第2、3、4行同时加到第1行，提出公因子6，然后各行减去第一行：