生玉秋◇编

线性代数与空间解析几何

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS
黑龍江大學出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

生玉秋◇编

线性代数与空间解析几何

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS
黑龙江大学出版社
HEILONGJIANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与空间解析几何 / 生玉秋编. -- 哈尔滨 :
黑龙江大学出版社 ; 北京 : 北京大学出版社, 2015.9(2016.1 重印)
ISBN 978-7-81129-941-0

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①生… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材②立体几何-解析几何-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151.2②O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 201474 号

线性代数与空间解析几何
XIANXING DAISHU YU KONGJIAN JIEXI JIHE
生玉秋 编

责任编辑 高 媛
出版发行 北京大学出版社 黑龙江大学出版社
地　　址 北京市海淀区成府路 205 号 哈尔滨市南岗区学府路 74 号
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 720×1000 1/16
印　　张 10.5
字　　数 206 千
版　　次 2015 年 9 月第 1 版
印　　次 2016 年 1 月第 2 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-81129-941-0
定　　价 20.00 元

前 言

本书是遵照 2014 年版大学数学课程教学基本要求，在 2009 年黑龙江教育出版社出版的《线性代数》基础上增订而成. 本书主要增加了向量和空间解析几何部分，也对上一版发现的错误做了改正，对某些问题的表述做了适当修改.

本书出版之前，承蒙曹重光老师、杨兴云老师对书中的向量和空间解析几何部分做了详细的审阅，肖相武老师通读了全书，张伟、远继霞和巩诚老师也提出了重要的修改意见，赵军生老师在排版方面给了编者极大的帮助，本书责任编辑高媛女士的专业编校为本书增色不少，编者在此一并致谢.

由于编者水平所限，在本书中必定会有许多不当之处，依然恳请读过此书的专家、同行和使用者批评指正.

编　者

2015 年 7 月于哈尔滨

内容简介

本书依据高等学校工科类本科“线性代数”课程教学大纲编写，同时也对其他相关专业适用. 本书主要内容包括行列式、矩阵、向量和空间解析几何、n 维向量与线性方程组、二次型、特征值与特征向量和方阵的对角化. 本书注重概念和理论的引入，突出主线，注意数学思想的渗透和各部分内容的联系. 书中的例题和习题有利于学生线性代数能力的培养. 本书结构严谨，详略适当，叙述简明生动，注重直观性和启发性，便于教和学.

上一版前言

线性代数是本科许多专业的公共基础课，但它却是一门抽象的课程，初学此课的很多同学会明显不适应这门课的思维方式，感觉与中学数学的衔接不明显．为了让读者能够更好地适应线性代数的内容与方法，本书尝试在概念和理论的引入上稍作引导，以期使读者能够觉得这些概念和理论的产生都是自然的，是解决相应问题所必需的．

全书内容可以看做解决两个问题，一个是 n 元线性方程组的求解和解的结构问题，另一个是 n 元二次方程的化简问题．第一个刚好是初等数学中没有解决的问题，第二个可以看成初等数学的后续问题．为了解决这两个问题，我们建立了一系列的理论和方法．这些理论和方法在这种背景下产生，自然能够解决这两个问题，同时它们还具有推广意义，有助于其他问题的研究和解决．线性代数中的理论和方法不仅在数学的其他分支，而且在物理、化学、生物等很多学科中有广泛的应用．

线性代数中的一些概念、公式和习题写起来似乎很麻烦，要写很大的数表，有时还要写很多个，但正是通过这些繁复的过程，我们才会对基本理论有更深刻的理解与记忆，对基本方法有更好的掌握，使我们能更熟练或娴熟地将其应用于实际．考虑到学时和授课对象等方面的因素，本书在内容上尽量减少理论的推导，适当加入了一些有助于理解概念与结论的例子．在习题方面，本书各节后设练习题，各章后设习题，练习题专门针对这一节的理论与方法，通常是一些基础性的习题，每章后的习题多是综合或稍有难度的题．本书中设置标注“$*$”号的部分，包括某些章节、定理及其证明、例题等，供教师根据专业、学时等情况选用，也可供学生根据自身条件与能力选用．

本书的出版得到数学学院的领导和一些教师的大力支持和帮助．本书出版之前，承蒙曹重光教授、张显教授详细审阅了全书，提出了很多中肯的修改意见．唐孝敏教授和张龙老师也通读了全书，提出很多宝贵意见．赵军生院长在排版方面给了作者很大的帮助．这些工作都对提高本书的质量有极大的帮助．没有这些支持和帮助，作者的想法也不能付诸实现．借此机会，对这些前辈、领导和同事致以深深的谢意！作者的愿望是美好的，想写一本引入自然、叙述流畅、体系精简的教材，但由于能力所限，在本书中必定会有许多不当之处，恳请读过此书的专家、同行和使用者批评指正．

2009 年 6 月　编者

目　录

第 1 章　行列式

求方程组的解是古典代数学的一个基本问题，在中学阶段就有所涉及. 下面的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

而三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

当

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

不为 0 时也有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}},$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{13}b_2a_{31} - b_1a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}},$$

$$x_3 = \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}b_3 - a_{11}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}}.$$

观察上面两个方程组的解，我们会发现它们都是商的形式. 在上面每个方程组的解中分母都是一样的，它们分别是如下的数表中的数经过运算得来的.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

而每个方程组的第 i 个解恰好是用常数项去代替上表中的第 i 列，并用与得到分母相同的运算规则所得到的. 我们希望刚才发现的这个规律能推广到 n 元一次方程组上. 为此，需要研究一下方程组解的分母是由上面的数表按什么样的运算规则得到的. 三元一次方程组的解的分母是六项，且每一项恰好都是第二个数表的不同行

不同列的三个数的乘积，当每一项中的数的行指标 (我们称 i 和 j 分别为 a_{ij} 的行指标和列指标) 按 1,2,3 的顺序时，其列指标按前面所带的符号分为两组

$$+: 123;\ 231;\ 312. \qquad -: 321;\ 213;\ 132.$$

很明显，只有带正号的一组中有一个标准次序的数的排列 123, 这里所说的标准次序就是从小到大的次序，其他的数的排列中都有大数在小数的前面，我们称这样的两个数构成一个逆序. 把这种情况统计如下：

$$+: \text{无};\ (2,1),(3,1);\ (3,1),(3,2). \qquad -: (3,2),(3,1),(2,1);\ (2,1);\ (3,2).$$

我们发现带正号的三项中逆序的个数都是偶数 $0,2,2$, 而带负号的三项中逆序的个数都是奇数 $3,1,1$. 这好像在告诉我们，如果在上面的第二个数表中任取位于不同行不同列的三个数做乘积，把它们的行指标按标准次序排列后考察列指标的排法，如果其中的逆序个数为偶数就带正号，如果其中的逆序个数为奇数就带负号，三元一次方程组的解的分母恰好是所有这些项的和. 这样的说法对上面的二元一次方程组显然适用. 一个四元一次方程组在用消元法能解出它的唯一解的条件下，我们发现它的解与上面的二元一次和三元一次方程组的解的构成规律相同. 现在，我们已经很有信心把这几个低元一次方程组的求解规律推广到含有 n 个方程的 n 元一次方程组上 (当然，上面的二元、三元和四元方程组都是有一定限制条件的，可以想象即使推广成功，也只是解决满足某种条件的含有 n 个方程的 n 元一次方程组). 我们已经发现当 n 越来越大时，方程组的解的分母的一般表达式越来越复杂，既然它们都是由方程组的系数按照某种运算规则得到的，为了推广的方便，我们有必要引进一种能够描述它的算子 —— 行列式. 本章将介绍行列式的定义、性质、运算以及用行列式来解一次方程组的方法.

1.1 行列式的定义

由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数组成的一个有序、无重复的 n 元数组称为一个 n **级排列**. 例如， 31524 是一个 5 级排列， 2647153 是一个 7 级排列. 易知，共有 $n!$ 个 n 级排列. 在一个 n 级排列中，如果有两个数其中较大者排在前面，则称它们构成了一个 **逆序**. 例如， 5 级排列 31524 中，数对 $(3,1)$, $(3,2)$, $(5,2)$ 和 $(5,4)$ 均构成逆序. 称一个排列中包含的逆序个数为它的 **逆序数**. 将 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记作 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$. 例如， $\tau(31524)=4, \tau(2647153)=11$. 称逆序数为奇数的排列为 **奇排列**, 称逆序数为偶数的排列为 **偶排列**. 例如， 31524 是偶排列， 2647153 是奇排列.

定义 1.1.1 称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

为一个 n 阶行列式，其中 $\sum\limits_{j_1\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =& a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.\end{aligned}$$

例 1.1.1 计算下列行列式

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \qquad \boldsymbol{D}_2 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 按定义有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_1 &= 1\times 4 - (-2)\times 3 = 10, \\ \boldsymbol{D}_2 &= 2\times 4\times 1 + (-5)\times 6\times(-3) + 3\times 0\times 3 \\ &\quad - 3\times 4\times(-3) - 2\times 6\times 3 - (-5)\times 0\times 1 = 98. \end{aligned}$$

例 1.1.2 计算下列行列式

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} (n \geqslant 2), \qquad \boldsymbol{D}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_1 &= (-1)^{\tau(23\cdots n1)} \times n! = (-1)^{n-1} n!, \\ \boldsymbol{D}_2 &= (-1)^{\tau(4213)} \times 5\times 4\times 1\times 2 = 40. \end{aligned}$$

例 1.1.3 计算下列 n 阶行列式

(1) $\boldsymbol{D}_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$; (2) $\boldsymbol{D}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{D}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

解 (1) 按定义有

$$\boldsymbol{D}_1 = \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

当 $j_n \neq n$ 时, $a_{nj_n} = 0$, 故 $\boldsymbol{D}_1$ 中除 $j_n = n$ 的项外其他项均为 0. 于是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_1 &= \sum_{j_1 \cdots j_{n-1} n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_{n-1} n)} a_{1j_1} \cdots a_{n-1,j_{n-1}} a_{nn} \\ &= \left(\sum_{j_1 \cdots j_{n-1}} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_{n-1})} a_{1j_1} \cdots a_{n-1,j_{n-1}} \right) a_{nn} \\ &= \left(\sum_{j_1 \cdots j_{n-2}} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_{n-2})} a_{1j_1} \cdots a_{n-2,j_{n-2}} \right) a_{n-1,n-1} a_{nn} \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. \end{aligned}$$

(2) 类似于 (1) 可得 $\boldsymbol{D}_2 = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$.

(3) 由 (1) 得 $\boldsymbol{D}_3 = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$.

上面例题中的行列式分别称为 **上三角行列式**、**下三角行列式** 和 **对角行列式**.

例 1.1.4 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & d_{n1} & \cdots & d_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

证明* 记

$$D=\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} & c_{1,n+1} & \cdots & c_{1,n+m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & c_{n,n+1} & \cdots & c_{n,n+m} \\ c_{n+1,1} & \cdots & c_{n+1,n} & c_{n+1,n+1} & \cdots & c_{n+1,n+m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n+m,1} & \cdots & c_{n+m,n} & c_{n+m,n+1} & \cdots & c_{n+m,n+m} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & d_{n1} & \cdots & d_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix},$$

其中

$$c_{ij}=\begin{cases} a_{ij}, & 1\leqslant i,j\leqslant n, \\ b_{i-n,j-n}, & n+1\leqslant i,j\leqslant n+m, \\ d_{i,j-n}, & 1\leqslant i\leqslant n \text{ 且 } n+1\leqslant j\leqslant n+m, \\ 0, & n+1\leqslant i\leqslant n+m \text{ 且 } 1\leqslant j\leqslant n, \end{cases}$$

则

$$D=\sum_{j_1\cdots j_nj_{n+1}\cdots j_{n+m}}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_nj_{n+1}\cdots j_{n+m})}c_{1j_1}\cdots c_{nj_n}c_{n+1,j_{n+1}}\cdots c_{n+m,j_{n+m}}.$$

由于当 $j_k\leqslant n$ 时，$c_{n+1,j_k}=\cdots=c_{n+m,j_k}=0$, 所以 $j_{n+1},\cdots,j_{n+m}$ 只需从 $\{n+1,\cdots,n+m\}$ 里面取，此时 $(j_{n+1}-n),\cdots,(j_{n+m}-n)$ 为 $\{1,\cdots,m\}$ 里面的 m 个不同的数，即 $(j_{n+1}-n)\cdots(j_{n+m}-n)$ 为一个 m 级排列，且 $c_{n+i,j_{n+i}}=b_{i,j_{n+i}-n}, i=1,\cdots,m$. 又由于第 $n+1,\cdots,n+m$ 行已从第 $n+1,\cdots,n+m$ 列选取元素，所以第 $1,\cdots,n$ 行只能从第 $1,\cdots,n$ 列选取元素，即 $j_1,\cdots,j_n$ 只能从 $\{1,\cdots,n\}$ 里面取，此时 $j_1\cdots j_n$ 为一个 n 级排列，且 $c_{ij_i}=a_{ij_i}, i=1,\cdots,n$. 于是

$$D=\left(\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}\right)$$
$$\left(\sum_{(j_{n+1}-n)\cdots(j_{n+m}-n)}(-1)^{\tau(j_{n+1}-n\cdots j_{n+m}-n)}b_{1,j_{n+1}-n}\cdots b_{m,j_{n+m}-n}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}\right)\left(\sum_{i_1\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}b_{1i_1}\cdots b_{mi_m}\right)\\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m}\\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm}\end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

例 1.1.5 计算行列式 $\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -4 & 2 & -3\\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2\end{vmatrix}$.

解 由例 1.1.4 知

$$
\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 6\\ 0 & 3 & -4\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix} -3 & 5\\ 2 & -2\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} 3 & -4\\ 2 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix} -3 & 5\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-176.
$$

练习 1.1

1. $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{15}\\ \vdots & & \vdots \\ a_{51} & \cdots & a_{55}\end{vmatrix}$ 的展开式中含 $a_{42}a_{13}a_{35}a_{54}a_{21}$ 及 $a_{25}a_{31}a_{14}a_{52}a_{43}$ 的项前面应分别带什么符号?

2. 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 7\\ 5 & 9\end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2\\ 5 & 3 & 6\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} n & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}$ $(n\geqslant 2)$;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6\\ 3 & 4 & 7 & 8\\ 0 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 5 & 8\end{vmatrix}$.

1.2 行列式的性质

单从行列式的定义来计算一个一般的行列式显然比较麻烦, 因此有必要深入研究行列式, 寻找简化行列式计算的方法. 本节介绍行列式的若干性质.

性质 1.2.1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 由行列式定义得

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= k\sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= \text{右端}. \end{aligned}$$

性质 1.2.2 如果行列式中有两行对应元素相同，则行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

证明参见参考文献 [1].

由上面的两个性质立即可得

性质 1.2.3 如果行列式中有两行元素对应成比例，则行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$