考研数学大纲配套系列用书推荐

高教版

考研数学 综合大题 精编精析100例

（数学一和数学二适用）

主　编　张　宇　副主编　徐　兵　严守权

高等教育出版社

- 按常考知识点分类，归纳常考大题题型特点
- 研究综合大题命题思路，分析题目特点
- 总结解题思想方法，指出考生典型错误

考研数学大纲配套

高教版

考研数学综合大题精编精析100例

（数学一和数学二适用）

KAOYAN SHUXUE ZONGHE DATI JINGBIAN JINGXI 100 LI (SHUXUE YI HE SHUXUE ER SHIYONG)

主 编 张 宇 副主编 徐 兵 严守权

高等教育出版社·北京

- 按常考知识点分类，归纳常考大题题型特点
- 研究综合大题命题思路，分析题目特点
- 总结解题思想方法，指出考生典型错误

内容简介

《考研数学综合大题精编精析100例（数学一和数学二适用）》一书，定位于考研数学强化和冲刺阶段的考生。为在茫茫题海中航行的考生提供一盏导航的灯塔。在总结归纳历年考试题的基础上，本书将高等数学常考综合大题数学一分为32类题型，选讲78例，延伸30例；数学二分为24类题型，选讲57例，延伸28例。将线性代数常考综合大题数学一分为26类题型，选讲26例，延伸57例；数学二分为25类题型，选讲25例，延伸55例。将概率论与数理统计常考综合大题数学一分为30类题型，选讲30例，延伸60例。对各类题型点评、小结解题方法。对多数选例给以详细讲解，侧重解题思路、方法和技巧，并有点拨、延伸。成为考生提高求解综合大题能力的强力推进器。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学综合大题精编精析100例/张宇主编. --北京:高等教育出版社,2015.8

数学一和数学二适用

ISBN 978-7-04-043476-7

Ⅰ.①考… Ⅱ.①张… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第163641号

策划编辑 张耀明　责任编辑 张耀明　封面设计 王　洋　版式设计 余　杨 杜微言
插图绘制 杜晓丹　责任校对 刘　莉　责任印制 朱学忠

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 高教社(天津)印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 14
字　　数 330千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2015年8月第1版
印　　次 2015年8月第1次印刷
定　　价 28.00元

物 料 号 43476-00

前言

考研数学综合大题最常见、最基本的题型有哪些？如何使备考更有针对性？如何能将复习的努力更有成效地转化为应试实战能力，取得理想的效果？作者分析了历年考研试题，集几十年教学经验与考研辅导经验编写此《考研数学综合大题精编精析 100 例》。将此书定位于考研数学强化和冲刺阶段的考生，为在茫茫考研题海中航行的考生提供一盏导航的灯塔。

本书依照考研数学考试大纲，按常考知识点分类，归纳常考大题题型特点，对常考的综合大题题型研究命题思路，分析题目特点，总结解题思路方法，指出考生的典型错误。将常考的综合大题依高等数学、线性代数、概率论与数理统计三部分分别归类：

一、高等数学中综合大题常考题型：

数学一为 32 类题型，选讲 78 例，延伸 30 例。

数学二为 24 类题型，选讲 57 例，延伸 28 例。

二、线性代数中综合大题常考题型：

数学一为 26 类题型，选讲 26 例，延伸 57 例。

数学二为 25 类题型，选讲 25 例，延伸 55 例。

三、概率论与数理统计综合大题常考题型：

数学一为 30 类题型，选讲 30 例，延伸 60 例。

在各题型的分析中，指出题型特点、给出范例分析，大多数选例都有点拨、延伸，并对题型有小结，分析解题方法等。

对常考综合大题题型分类是以题目的关键考查知识点划分，意在使考生明确考试方向，有利于考生理出知识框架。

例题中指出考查的知识点，以利于考生明确试题的立意。

例题中给出分析、解题思路、考生的典型错误，以利于考生理清解题方法与防范错误。

对部分试题给出题目可能的变式，指出识别题目中隐含且常被考生忽略的条件或怎样利用概念、性质的内涵与外延求解问题等，以利于考生深入复习。

对于多数例题给出了难度系数，以利于考生检查自己对知识的掌握程度。

书中例题中标号如(15-1)，(08-2)分别表示 2015 年数学一试题与 2008 年数学二试题。书中标注“本题难度系数 0.358”表示在当年考试中教育部考试中心发布的统计数据中所给题目的难度值，表明这个题目的平均得分率。

多年来在考研数学的选择题、填空题、解答题三大部分中，以解答题得分率最低。由此可以得到两点启示：一是意味着解答题这部分提分空间更大些；二是意味着得综合大题者能赢全局。因此在综合大题这部分多花些力气是值得的。综合大题有些是综合考查多个知识点；有些是一道题需要多种方法综合使用才能求解。很多情形是只要认真分析题意，谨慎运算，就能求解。

选例很精彩，越仔细研读，越能品味其精妙之处。

如“(05-2)设函数$f(x)$连续且$f(0)\neq 0$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)\,dt}{x\int_0^x f(x-t)\,dt}$。”

分析　本题考查的知识点　可变限积分求导，洛必达法则，定积分换元积分法，积分中值定理。

原式　$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt}{x\int_0^x f(x-t)\,dt}$

$$\xlongequal[u=x-t]{\text{在分母积分中令}}\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt}{x\int_0^x f(u)\,du}\qquad ①$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)\,du+xf(x)}$$

$$\xlongequal[(\xi\text{在}0\text{与}x\text{之间})]{\text{积分中值定理}}\lim_{x\to 0}\frac{xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}\qquad ②$$

$$=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}。$$

点拨　典型运算错误　(1)有一些考生没有对所给表达式的分母积分换元，而是在①处直接利用洛必达法则。

(2)一些考生在②处没有利用积分中值定理，而是再次利用洛必达法则求解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{\int_0^x f(u)\,du+xf(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f(x)+f(x)+xf'(x)}=\frac{f(0)}{2f(0)}=\frac{1}{2}。$$

这是不正确的。因为题目的条件只给出$f(x)$连续，并没有给出$f(x)$可导，这表明上式分母的表达式不能求导运算。

如果仔细研读上述解法，则可以品味出更多的精妙之处：

1°　原式为求极限。表达式为可变限积分形式的分式。由于$f(x)$连续，$x\to 0$，可知所给极限为“$\dfrac{0}{0}$”型。通常求可变限积分这种形式的极限多采用洛必达法则。

2°　所给可变限积分的被积函数中含有可变限的变元，因此不能直接利用可变限积分求导公式。对于表达式的分子利用积分关于被积函数的可加性之后，可将前者被积函数中可变限变元的因子游离出积分号。

3°　对于分母中可变限的变元含于被积函数的抽象函数中，只能对其进行积分换元。

4° 变为①之后可以利用洛必达法则。但是一次洛必达法则之后，所求极限依然为$\frac{0}{0}$型，且分子与分母中仍为可变限积分形式。由于题设条件为$f(x)$连续，并没有说其可导，因此所给表达式不能第二次利用洛必达法则。

5° 由于$f(x)$为连续函数，因此可以对$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$与$\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$分别利用定积分中值定理。由于定积分的值与其积分变元无关，可知上述两式利用定积分中值定理之后都可以表示为$f(\xi)(x-a)$，从而得到②。

6° 由于$f(x)$连续，$f(0)\neq 0$，因此②取极限之后得$\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}$。

希望考生对每个例题都能仔细研读，相信一定能发现每个题设条件的作用，每一步演算的法理依据何在，其结果必然提高求解综合大题的能力，为取得好成绩打下良好基础，登上读研殿堂。

编者

2015.4

郑重声明

反盗版举报电话　(010)58581897　58582371　58581879

反盗版举报传真　(010)82086060

反盗版举报邮箱　dd@ hep.com.cn

通信地址　北京市西城区德外大街 4 号

　　　　　高等教育出版社法务部

邮政编码　100120

特别提醒："高校考试培训网络学院"http://px.hep.edu.cn 是高教版考试用书专用网站。网站本着真诚服务广大考生的宗旨，为考生提供资料下载、在线练习、在线考试、网上商城、网络课程等多项增值服务。高教版考试用书配有本网站的增值服务卡，该卡为高教版考试用书正版书的专用标识，广大读者可凭此卡上的卡号和密码登录网站获取增值信息，并以此辨别图书真伪。

目　录

高等数学

一、函数、极限、连续 …… 1
1. 数列极限的运算 …… 1
2. 函数极限的运算 …… 6
3. 无穷小量阶的比较 …… 9
4. 连续性 …… 11
二、一元函数微分学 …… 13
1. 导数与微分运算 …… 13
2. 与微分中值定理相关的证明题 …… 16
3. 利用导数研究函数性态 …… 17
4. 利用导数研究曲线性态 …… 20
5. 利用导数判定方程根的存在性 …… 23
6. 利用导数证明不等式或等式 …… 25
三、一元函数积分学 …… 28
1. 不定积分运算 …… 28
2. 利用定积分的性质计算 …… 29
3. 可变限积分函数的性态判定 …… 31
4. 定积分运算 …… 33
5. 定积分形式的证明题 …… 35
6. 反常积分运算 …… 38
7. 定积分的应用 …… 40
四、多元函数微分学 …… 43
1. 偏导数与全微分运算 …… 43
2. 多元函数的极值 …… 45
3. 平面、曲面、直线及相关几何问题 …… 48
4. 方向导数与梯度运算 …… 50
五、多元函数积分学 …… 52
1. 利用二重积分性质计算 …… 52
2. 二重积分运算 …… 55
3. 三重积分运算(数学二不作要求) …… 60
4. 曲线积分运算(数学二不作要求) …… 64
5. 曲面积分运算(数学二不作要求) …… 69
6. 空间曲线积分与斯托克斯公式 …… 72
六、无穷级数(数学二不作要求) …… 74
1. 数项级数 …… 74
2. 幂级数 …… 77
七、常微分方程 …… 79
1. 一阶微分方程 …… 79
2. 可降阶的微分方程 …… 83
3. 常系数线性微分方程 …… 86

线性代数

一、行列式 …… 88
1. 用行列式性质和降阶法计算行列式 …… 88
2. 特定类型的行列式计算 …… 91
3. 利用矩阵与行列式关系计算行列式 …… 93
二、矩阵 …… 95
1. 伴随矩阵及其性质 …… 95
2. 矩阵的可逆性及可逆矩阵的性质 …… 97
3. 由 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 乘积构造的矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 及其性质 …… 98
4. 正交矩阵及其性质 …… 99
5. 初等矩阵及其性质 …… 102
6. 由矩阵方程求未知矩阵 …… 103
7. 用设定线性方程组求未知矩阵 …… 104

三、向量 …… 106
1. 单一数值向量组线性相关性的讨论 …… 106
2. 两个数值向量组线性相关性的讨论 …… 109
3. 由线性无关向量组表出的向量组线性无关性的讨论 …… 111
4. 与线性方程组的解向量相关联的向量组的线性相关性的讨论 …… 113
5. 由 $AB=O$ 确定的矩阵的秩的讨论 …… 115
6. n 维向量空间的基、基变换及过渡矩阵 …… 116
四、线性方程组 …… 118
1. 齐次线性方程组的基础解系及非齐次方程组解的结构 …… 118
2. 线性方程组的基本解法及其解的讨论 …… 120
3. 两个线性方程组同解的充要条件及求解 …… 123
4. 两个线性方程组的存在公共解的充要条件及解法 …… 126
五、矩阵的特征值与特征向量 …… 129
1. 特征值与特征向量的性质及计算 …… 129
2. 矩阵的相似性及对角化的判别 …… 133
3. 实对称矩阵的性质及其对角化 …… 136
六、二次型 …… 138
1. 化二次型为标准形、规范性 …… 138
2. 二次型的正定性概念及用概念判别正定性 …… 141
3. 二次型的正定性的顺序主子式的判别法和特征值判断法 …… 143

概率论与数理统计

一、随机事件与概率 …… 146
1. 随机事件的独立性 …… 146
2. 古典概型 …… 147
3. 全概和贝叶斯概型 …… 149
4. 二项概型 …… 150
二、随机变量及其分布 …… 152
1. 离散型随机变量的概率分布 …… 152
2. 离散型随机变量函数的概率分布 …… 154
3. 连续型随机变量的分布 …… 155
4. 连续型随机变量函数的分布 …… 156
5. 一般类型随机变量的分布函数 …… 159
三、多元随机变量及其分布 …… 160
1. 二维离散型随机变量的联合分布及边缘分布、条件分布 …… 160
2. 二维离散型随机变量函数的分布、条件分布和数字特征 …… 164
3. 二维连续型随机变量的联合密度，边缘密度与条件密度及其关系 …… 168
4. 二维连续型随机变量的联合密度与分布函数转换关系 …… 170
5. 二维连续型随机变量的独立性与相关性的讨论 …… 172
6. 二维正态分布及其性质的讨论 …… 174
7. 二维连续性随机变量函数的分布 …… 176
8. 一般类型的随机变量及其分布 …… 179
四、随机变量的数字特征 …… 182
1. 一维离散型随机变量的数字特征 …… 182
2. 一维连续型随机变量及其函数的数字特征 …… 184
3. 一维随机变量数学期望的应用问题 …… 185
4. 二维连续型随机变量及其函数的数字特征 …… 187
五、大数定律与中心极限定理 …… 190
1. 以正态总体为极限的极限分布及其应用 …… 190
六、数理统计的基本概念 …… 192
1. 正态总体下常见统计量的分布模式及类型识别 …… 192

2. 抽样分布及统计量的数字特征 ……… 194

七、参数估计 ……………………………… 197

1. 连续型总体单参数的点估计 ………… 197

2. 连续型总体双参数的点估计 ………… 201

3. 离散型总体总体参数的点估计法 …… 203

4. 点估计量的优良性的判别 …………… 205

5. 总体未知参数的区间估计 …………… 207

八、假设检验 ……………………………… 209

1. 正态总体的均值和方差的检验 ……… 209

高 等 数 学

一、函数、极限、连续

1. 数列极限的运算

数列极限是考研中常考内容之一，其变化形式多样.考试试题包括数列极限的定义及其性质、极限的运算、极限存在的两个准则及重要极限公式.

对于极限的定义与性质的内涵与外延常常由选择题形式给出.对于无穷多项和的极限或一些简单的极限运算常由填空题形式给出.对于由递推公式给出通项的极限问题多年来常常出现于解答题中，常可由极限存在准则等方法求解.这类题目多为中等难度题.

例 1(96-1)　设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\,(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 存在极限，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

分析　*本题考查的知识点*　“单调有界数列必有极限”准则的运用.

数列 $\{x_n\}$ 是由递推公式形式表示的，判定其极限是否存在通常利用数列极限的存在准则：单调有界数列必有极限.其要点为

判定数列 $\{x_n\}$ 的单调性.若其单调增加，应判定其有上界；若其单调减少，则应判定其有下界.

判定数列 $\{x_n\}$ 的有界性与单调性的顺序可以随意.它们是两个独立得分点.

由于 $x_1=10, x_2=\sqrt{6+10}=4$，可以猜测 $\{x_n\}$ 为单调减少数列.设 $x_k>x_{k+1}$，则

$$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2},$$

由归纳法可知 $\{x_n\}$ 为单调减少数列，又 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\geqslant 0$，可知 $\{x_n\}$ 为单调减少有下界的数列.由极限存在准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{6+x_n},$$

从而 $A=\sqrt{6+A}$，可解得 $A=3$ 或 -2.由 $x_n>0$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\geqslant 0$，故舍掉 -2，可得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=3.$$

本题难度系数　0.530

延伸　本题在命制时，曾考虑以下两个变式：

变式 1　设 $x_1=0, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$，证明数列 $\{x_n\}$ 存在极限，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

此变式较例 1 难在判断 $\{x_n\}$ 有界.

变式 2　设 $x_1>-6, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$，证明数列 $\{x_n\}$ 存在极限，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

此变式的难度在于应该将 x_1 的初值分为几种情形讨论.

由于

$$x_2-x_1=\sqrt{6+x_1}-x_1=\frac{6+x_1-x_1^2}{\sqrt{6+x_1}+x_1}=\frac{(3-x_1)(2+x_1)}{\sqrt{6+x_1}+x_1},$$

可分为$-6<x_1<-2$,$-2<x_1<3$,$x_1>3$三种情形分别讨论$\{x_n\}$的单调性.

此变式较例1难度明显更大.

上述命题中变式的思想在后来的年份中得以显现.

例2(02-2)　设$0<x_1<3$,$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ $(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{x_n\}$存在极限,并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

分析　**本题考查的知识点**　“单调有界数列必有极限”准则的应用.

所给问题也需利用“单调有界数列必有极限”的准则.本题与例1不同之处是本题中x_1介于某个范围之内,与例1变式2相仿.

由于$0<x_1<3$,可知$3-x_1$为正数,从而

$$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\frac{1}{2}[x_1+(3-x_1)]=\frac{3}{2}.$$

设$0<x_k\leqslant\frac{3}{2}$($k>1$且$k\in\mathbf{N}^+$),则

$$0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\leqslant\frac{1}{2}[x_k+(3-x_k)]=\frac{3}{2}.$$

由归纳法可知对任意正整数$n>1$,总有$0<x_n\leqslant\frac{3}{2}$,即$\{x_n\}$为有界数列.

当$n>1$时,有

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n&=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}\,(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n})\\&\xlongequal{(*)}\frac{\sqrt{x_n}\,(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\geqslant0,\end{aligned}$$

可知$\{x_n\}$为单调增加数列.

由极限存在准则可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,可得$A=\sqrt{A(3-A)}$,可解得$A=\frac{3}{2}$或0(舍掉),故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}$.

> **点拨**　**典型运算错误**　在证明$\{x_n\}$有界时,相当多考生这样考虑:因$0<x_1<3$,有$0<3-x_1<3$,故$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}<3$,类似可证得对$n>1$时,有$0<x_n<3$.对于有界性而言,证明正确.但是在(*)处,要分$0<x_n\leqslant\frac{3}{2}$与$\frac{3}{2}<x_n<3$讨论,而导致证明单调性的错误.
>
> 这表明判定出数列有界可能还不够,如本例还需要判断出其“最精确”的上界.这是本题得分率低的主要原因.

本题难度系数　0.350

延伸　又如(06-1,2)设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi$,$x_{n+1}=\sin x_n$,$n=1,2,\cdots$.

(1) 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,并求该极限;

(2) 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

分析　本题考查的知识点　极限存在准则，幂指函数的极限，极限与子列极限的性质.

(1) 与变式 2 相仿，x_1 也是位于某个范围之内.由题设可知 $0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n$，因此

$$x_2=\sin x_1>0, x_2=\sin x_1<x_1<\pi,$$

利用单调有界的极限存在准则不难证出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.但是本题(2)的难点有两个：一是利用对数性质转化幂指函数为初等函数的形式；二是要利用数列极限与子列极限的性质.(2)中的极限为 1^∞ 型，但它为数列极限，可以先将所给表达式变形.设 $z=\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$，则由题设可知 $z=\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$，$\ln z=\dfrac{1}{x_n^2}(\ln\sin x_n-\ln x_n)$.考查 $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\ln\sin y-\ln y}{y^2}$，利用洛必达法则求解，得

$$\lim_{y\to0}\frac{\ln\sin y-\ln y}{y^2}=-\frac{1}{6},$$

由极限子列的性质可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln z=-\dfrac{1}{6}$，因此原式 $=e^{-\frac{1}{6}}$.

> **点拨**　上述例题 1 与 2 可以提示考生，复习中要认真考虑题目条件是否可以改变？此时将给解题带来什么变化？这样易于开拓思路.在延伸的(06-1,2)中将点列极限转化为连续型问题处理，利用极限的子列性质，曾多次出现这类问题.

例 3(02-2)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\dfrac{n}{n}\pi}\right)=$________.

分析　本题考查的知识点　利用定积分的定义求极限.

所给极限为无穷多项求和的极限问题.这里不能利用夹逼定理，因此考虑利用定积分的定义.

记 $\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$，意味着区间长度为 1.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n}{n}\pi}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{i}{n}\pi}\,\frac{1}{n},$$

因此若取第一个点 $\xi_1=\dfrac{1}{n}$，则区间左端点 $a=0$，右端点 $b=1$.

$$f(\xi_i)=\sqrt{1+\cos(\xi_i\pi)}, f(x)=\sqrt{1+\cos(\pi x)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n}{n}\pi}\right)$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+\cos(\pi x)}\,dx=\int_0^1\sqrt{2\cos^2\frac{\pi x}{2}}\,dx$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

本题难度系数　0.360

说明　虽然本题为填空题，但这是一类典型的运算.此类问题曾出现过解答题中.

点拨 **本题解题技巧** 利用定积分的定义求无穷多项和的极限是常见的方法.在上述运算中,Δx_i 的取法不唯一.注意到 $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{i}{n}\pi}$,若取第一个点为 $\xi_1=\frac{\pi}{n}$,那么应取 $\Delta x_i=\frac{\pi}{n}$,这意味着区间长度为 π.因此区间左端点 $a=0$,右端点 $b=\pi$.而

$$f(\xi_i)=\sqrt{1+\cos\xi_i},f(x)=\sqrt{1+\cos x},$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2}{n}\pi}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n}{n}\pi}\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos x}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{\cos^2\frac{x}{2}}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

延伸 在其他年份中也曾出现此类题目:

如(04-2) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}=$________.

分析 **本题考查的知识点** 利用定积分的定义求极限.

与例 2 相仿,所给极限也属于无穷多项求和的极限.但与例 2 不同的是式中没有出现 $\frac{1}{n}$.可以先将求极限的表达式变形:

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\frac{2}{n}.$$

若取 $\xi_1=\frac{1}{n}$,则取 $f(x)=\ln(1+x)$,$\Delta x_i=\frac{1}{n}$,区间左端点 $a=0$,右端点 $b=1$,可得

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}=2\int_0^1\ln(1+x)\,dx.$$

若取 $\xi_1=1+\frac{1}{n}$,则取 $f(x)=\ln x$,$\Delta x_i=\frac{1}{n}$,区间左端点 $a=1$,右端点 $b=2$,可得

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}=2\int_1^2\ln x\,dx.$$

同样(12-2)又出现此类题:$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=$________.

此题仍依上例方法处理.

又如(98-1)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{i}{n}}$.

本题考查的知识点　利用夹逼定理和定积分的定义两种方法综合使用.还利用了适当的放缩技巧.

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{i}{n}}<\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi\cdot\frac{1}{n},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}.$$

而

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{i}{n}}>\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi$$

$$=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi$$

$$=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.$$

由夹逼准则可知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i}{n}\pi}{n+\frac{i}{n}}=\frac{2}{\pi}.$$

但是运算结果表明技巧性太强不适于研究生招生考试的试题.本题难度系数为 0.080,是历年来研究生招生试题中难度最高的题,满分 6 分,平均得分不到 1 分,得满分的约为 3%.但是本题的放缩技巧值得学习.

这也提示考生不必花大力气于技巧过分高的题目.

小结

1. 对于无穷多项和式的极限问题通常可以考虑:利用夹逼准则将其转化为有限项极限问题,或利用定积分定义将其转化为定积分求解,或两种方法结合使用.

2. 对于通项由递推公式表示的极限问题,在往年研究生招生考试中多次出现.其中利用单调有界数列必有极限准则时,证明数列单调性与证明数列有界性是两个独立得分点,通常不分先后次序.往年题目中又常出现证明 $\{x_n\}$ 存在极限,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$,其中证明 $\{x_n\}$ 存在极限与求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 也是两个独立得分点,也可以不分先后次序求之.

2. 函数极限的运算

函数极限几乎是每年必考的知识，其题目涵盖了极限性质、极限四则运算法则、重要极限公式、未定型极限运算等内容，这类题目大多为中等难度题.

例 1(97-2)　求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

分析　本题考查的知识点　无穷小量的性质；无穷大量的倒数为无穷小量；有界变量与无穷小量之积为无穷小.

所给极限为"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型问题，不能利用极限四则运算法则，也不能利用洛必达法则求之. 通常对无穷大量运算的基本原则是转化为无穷小量运算.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}\overset{①}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x+1}{-x\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}=1.$$

点拨　本题解题技巧　在上述①处，将无穷大量的运算转化为无穷小量运算.

典型运算错误　上述运算①处，忽略了条件 $x\to-\infty$，得出

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x+1}{x\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}},$$

导致了错误，当 $x\to-\infty$ 且 $|x|$ 足够大时，$\sqrt{x^2}=|x|=-x$，这是解题中的关键.相当多的考生在此处出现错误，误答为 3.

本题难度系数　0.450

延伸　在试题命制中，曾考虑以下两种变式：

变式 1　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=$________.

此变式较例 1 简单，可以免掉出现 $\sqrt{x^2}$ 去掉平方根符号时产生的符号错误.

变式 2　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

此变式较例 1 复杂，需分别讨论 $x\to-\infty$ 与 $x\to+\infty$ 两种情形.

例 1 的难度位于变式 1 与变式 2 之间.

这表明运算时,应该关注题设条件,这往往能关系到全局.如(91-5)求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.本题考查的知识点为利用洛必达法则求解"$\infty^0$"型极限.在试题命制时,曾考虑以下两种变式:

变式 1 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

此式不为"∞^0"型,不能直接依标准形式求解.

此式为$(\infty-\infty)^0$型,需先作变换,令 $x=-t$,则 $x\to-\infty$ 时,$t\to+\infty$,因此

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to+\infty}(\sqrt{1+t^2}-t)^{-\frac{1}{t}}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}-t}\right)^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to+\infty}(t+\sqrt{1+t^2})^{\frac{1}{t}}.$$

可仿上述试题求解.

变式 2 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

此式也不属于"∞^0"型的标准形式,需分别考虑 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 两种情形,并利用 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 来讨论.

例 2(11-2) 已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)\,dt}{x^\alpha}$.设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$,试求 α 的取值范围.

分析 **本题考查的知识点** 等价无穷小量代换,可变限积分求导,洛必达法则.

本题所给极限为"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型.

由题设 $F(x)$ 的表达式可知,$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ 为"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型.因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}F(x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\ln(1+t^2)\,dt}{x^\alpha}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2}{1+x^2}}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\\&=\frac{2}{\alpha(\alpha-1)}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-1}},\end{aligned}$$

由题意 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$,得 $\alpha>1$.

又因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}F(x)&=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\ln(1+t^2)\,dt}{x^\alpha}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}\end{aligned}$$