

21

高等学校信息工程类专业“十三五”规划教材

电磁场与电磁波

(第二版)

曹祥玉 高 军 编著
马嘉俊 冯奎胜

DIANCHANGYU DIANCIBO



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

高等学校信息工程类专业“十三五”规划教材

电磁场与电磁波

(第二版)

曹祥玉 高 军 编著
马嘉俊 冯奎胜

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书根据“电磁场与电磁波”课程要求而编写,简明扼要地介绍了电磁场与电磁波理论的基础知识,内容包括矢量分析及场论、静电场、恒定电流的电场、恒定磁场、静电场边值问题的解法、时变电磁场、平面电磁波、导行电磁波和规则金属波导等。为了帮助读者掌握和理解所学内容,提高分析问题和解决问题的能力,书中每章末均附有习题,并在附录中收录了矢量分析与正交曲线坐标系的基本公式和特殊函数等内容。

本书可作为电子与通信类专业本科生的教材,也可作为相关工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波/曹祥玉等编著. —2版. —西安:西安电子科技大学出版社,2017.4

高等学校信息工程类专业“十三五”规划教材

ISBN 978-7-5606-4479-0

I. 电… II. 曹… III. ①电磁场—电磁波 IV. O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 065655 号

策 划 臧延新

责任编辑 张 玮

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西华沐印刷科技有限责任公司

版 次 2017年4月第1版 2017年4月第3次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印 张 17

字 数 402千字

印 数 6001~9000册

定 价 30.00元

ISBN 978-7-5606-4479-0/O

XDUP 4771002-3

*** 如有印装问题可调换 ***

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

前 言

在 19 世纪之前,电学和磁学是分别进行研究的,19 世纪之后人们才发现电和磁之间的内在联系。1820 年丹麦物理学家 H. C. Oersted(1777—1851)第一次揭示了电流可以产生磁场。同年法国物理学家 A. M. Ampere(1775—1836)对这一物理现象做出进一步研究,提出了著名的安培定律。1831 年英国物理学家 M. Faraday(1791—1867)首次报道了电磁感应现象,即通过移动磁体可在导线上感应出电流。Oersted、Ampere 和 Faraday 的工作为电磁学的建立提供了物理概念基础。电磁学真正上升为一门理论则应归功于伟大的苏格兰物理学家 J. C. Maxwell(1831—1879)。1864 年 Maxwell 完整地给出了电磁场所满足的方程组,即麦克斯韦方程,并预言了电磁波的存在。麦克斯韦方程是电磁场理论的根基,是研究一切电磁现象的出发点。1887 年德国物理学家 H. R. Hertz(1857—1894)用实验证明了电磁波的存在,后经意大利工程师 M. G. Marconi(1874—1937)进一步的实验研究,电磁波逐渐发展成一种应用范围最广的信息载体,成为当今无线电通信的基础。

电磁场理论经过 100 多年的发展已根深叶茂,以电磁理论为基础、电磁信息的传输和转换为核心的电磁场与电磁波技术在电子工业及国民经济领域中发挥着重要的作用。近代科学的发展表明,电磁场与电磁波基本理论又是一些交叉学科的生长点和新兴边缘学科发展的基础,信息革命和材料革命给人们提出了许多新的电磁问题,使这一古老的学科仍然生机勃勃,充满活力,新的内容层出不穷,可以发展的方向不可胜数。

“电磁场与电磁波”是电子与通信类专业本科生必修的一门专业基础课,课程涵盖的内容是电子与通信类专业本科阶段所应具备的知识结构的重要组成部分。本书从“电磁场与电磁波”课程的教学要求出发,参考了国内使用较为广泛的优秀教材,在编者多年教学实践经验的基础上编写而成。通过对本书的学习,读者可掌握电磁场与电磁波的基本概念、基本性质、基本规律以及求解电磁场问题的基本方法;熟悉一些重要电磁场问题的数学模型(如波动方程、拉普拉斯方程等)的建立过程以及分析方法;培养从“场”的角度分析问题和解决问题的能力,为今后学习其他后续课程或从事电磁场理论与微波技术方面的研究和工程设计工作打下良好的基础。

全书共分为 9 章。每章前后分别有提要和小结,指出学习要点,总结重点;每章中有典型例题讲解及大量习题,帮助学生加深理解,巩固所学知识,提高分析问题和解决问题的能力。本书可作为电子与通信类专业本科生的教材,也可作为有关工程技术人员的参考书。本书的教学安排参考学时为 40。

本书由空军工程大学信息与导航学院曹祥玉、高军教授担任主编,马嘉俊博士、冯奎胜博士、李桐博士、刘涛博士参与了部分章节的编写和修订。在编写过程中,编者得到了空军工程大学信息与导航学院各级领导和许多同志的支持与帮助,在此表示衷心的感谢。对参考的相关教材作者致以诚挚的谢意。

感谢西安电子科技大学出版社为编者提供了难得的机会，并为本书的出版付出了大量辛勤的劳动。

由于编者水平有限，书中难免有不足之处，恳请读者批评指正。

编 者

2017年1月11日

目

录

第 1 章 矢量分析及场论	1	2.8 静电场的边界条件	58
1.1 矢量分析	1	2.8.1 D 的法向分量	58
1.1.1 矢量和标量	1	2.8.2 E 的切向分量	58
1.1.2 矢量运算	2	2.8.3 电位的边界条件	59
1.2 正交曲面坐标系	6	2.8.4 两种常见情况	59
1.2.1 直角坐标系	6	2.9 泊松方程和拉普拉斯方程	60
1.2.2 圆柱坐标系	8	2.10 电容与部分电容	62
1.2.3 球坐标系	9	2.10.1 电容及电容器	62
1.2.4 圆柱坐标系、球坐标系与直角 坐标系的矢量变换	11	2.10.2 部分电容及多导体系统	64
1.3 场论基础	15	2.10.3 静电屏蔽	65
1.3.1 场的概念	15	2.11 静电场能量和能量密度	66
1.3.2 标量场的梯度	15	2.11.1 带电系统的能量	66
1.3.3 矢量场的散度	20	2.11.2 电场能量密度	69
1.3.4 矢量场的旋度	24	本章小结	71
1.3.5 拉普拉斯算子	29	习题	71
1.3.6 亥姆霍兹定理	30	第 3 章 恒定电流的电场	74
1.3.7 格林定理	33	3.1 电流和电流密度	74
本章小结	33	3.1.1 电流	74
习题	34	3.1.2 电流密度	75
第 2 章 静电场	37	3.2 欧姆定律	76
2.1 电荷	37	3.3 焦耳定律	78
2.2 库仑定律	39	3.4 恒定电流的基本方程	79
2.3 电场强度	40	3.4.1 电流连续性方程	79
2.4 静电场的散度——高斯定理 及其应用	43	3.4.2 电动势	81
2.5 静电场的旋度和电位	46	3.4.3 导体内(电源外)恒定电场的 基本方程	82
2.5.1 电场强度矢量 E 的旋度	46	3.5 恒定电场的边界条件	83
2.5.2 电位函数	46	3.6 恒定电场与静电场的比较	83
2.6 电偶极子	50	本章小结	87
2.7 电场中的物质	52	习题	88
2.7.1 电场中的导体	52	第 4 章 恒定磁场	89
2.7.2 电场中的电介质	53	4.1 恒定磁场的实验定律和磁感应强度	89
2.7.3 电场中的半导体	57	4.1.1 安培定律	89
		4.1.2 毕奥—萨伐尔定律	90

4.2 恒定磁场的基本方程	94	6.3 麦克斯韦方程组	148
4.2.1 磁通连续性原理	94	6.3.1 麦克斯韦方程组中的独立方程 与非独立方程	149
4.2.2 矢量磁位的微分方程	95	6.3.2 麦克斯韦方程组的限定形式 与非限定形式	150
4.2.3 安培环路定律	96	6.3.3 麦克斯韦方程组的物理意义	150
4.3 磁偶极子	99	6.4 电磁场的边界条件	151
4.4 磁介质中的场方程	101	6.4.1 场矢量 D 和 B 的法向分量的 边界条件	152
4.4.1 磁化强度	101	6.4.2 场矢量 E 和 H 的切向分量的 边界条件	153
4.4.2 磁化电流	103	6.5 电磁能量——坡印廷定理	154
4.4.3 磁场强度	104	6.6 波动方程	157
4.4.4 磁导率	105	6.6.1 电磁场的波动性	157
4.4.5 磁介质中恒定磁场基本方程	106	6.6.2 电磁场的位	158
4.5 恒定磁场的边界条件	107	6.7 正弦电磁场	159
4.5.1 磁感应强度 B 的边界条件	107	6.7.1 麦克斯韦方程组的复数形式	160
4.5.2 磁场强度 H 的边界条件	108	6.7.2 坡印廷定理的复数形式	160
4.5.3 标量磁位及其边界条件	109	6.7.3 亥姆霍兹方程	162
4.6 自感和互感	110	本章小结	162
4.6.1 自感	110	习题	165
4.6.2 互感	112	第7章 平面电磁波	168
4.7 磁场的能量和能量密度	113	7.1 引言	168
4.7.1 磁场的能量	113	7.1.1 正弦电磁场在线性、各向同性和 均匀媒质中满足的方程	168
4.7.2 磁场能量密度	115	7.1.2 电磁波的基本类型	170
本章小结	117	7.2 电磁波在非导电媒质中的传播	170
习题	118	7.2.1 沿 $\pm z$ 轴传播的均匀平面 电磁波	171
第5章 静电场边值问题的解法	122	7.2.2 沿任意方向传播的均匀平面 电磁波	173
5.1 边值问题分类	122	7.3 均匀平面电磁波在导电媒质 中的传播	176
5.2 积分法	123	7.4 电磁波的极化	180
5.3 唯一性定理	124	7.4.1 均匀平面电磁波电场矢量端点 描绘的轨迹	180
5.4 分离变量法	125	7.4.2 电磁波极化的分类	181
5.4.1 直角坐标系中的二维场问题	125	7.4.3 电磁波极化在工程中的应用	184
5.4.2 圆柱坐标系中的二维场问题	127	7.5 均匀平面电磁波在介质分界面上的 反射和折射	185
5.5 镜像法	129	7.5.1 入射波、反射波和折射波方向 之间的关系	185
5.5.1 对无限大接地导电平面的镜像	130		
5.5.2 对无限大介质平面的镜像	132		
5.6 有限差分法	133		
5.6.1 差分表示式	133		
5.6.2 差分方程的数值解法	134		
本章小结	137		
习题	139		
第6章 时变电磁场	142		
6.1 法拉第电磁感应定理	142		
6.2 位移电流和麦克斯韦第一方程	145		

7.5.2	均匀平面电磁波在媒质交界面上的垂直投射	187	8.3.3	波导波长	214
7.5.3	均匀平面电磁波对介质的斜入射	191	8.3.4	波阻抗	214
7.5.4	平行极化无反射时对应的布儒斯特角	194	8.3.5	传输功率、损耗与衰减	215
7.5.5	全反射	195	本章小结		216
7.5.6	表面波	196	习题		218
7.6	均匀平面电磁波在导电媒质分界面上的反射和折射	197	第9章 规则金属波导		219
7.7	相速度和群速度	199	9.1 矩形波导		219
本章小结		200	9.1.1 矩形波导中的导模及其场分量		220
习题		201	9.1.2 矩形波导中导模的场结构		223
第8章 导行电磁波		205	9.1.3 矩形波导的管壁电流		227
8.1	引言	205	9.1.4 矩形波导的传输特性		228
8.2	规则导行系统的导波方程及其求解方法	206	9.2 圆波导		235
8.2.1	导波方程	206	9.2.1 圆波导中的导模		235
8.2.2	纵向场所满足的导波方程	207	9.2.2 圆波导中导模的传输特性		239
8.2.3	边界条件	209	9.2.3 圆波导中三个主要导模及其应用		240
8.2.4	横向场与纵向场之间的关系	209	9.3 同轴线及其高次模		245
8.2.5	规则波导中导波的种类	210	9.3.1 同轴线的主模 TEM 模		245
8.2.6	导波方程的求解方法	211	9.3.2 同轴线的高次模		247
8.3	导行波的一般传输特性	212	9.3.3 主模 TEM 模的传输特性		248
8.3.1	传播常数、截止波长和传输条件	212	9.4 波导的激励与耦合		251
8.3.2	相速度和群速度	213	本章小结		254
			习题		254
			附录		257
			参考文献		264

第1章 矢量分析及场论

本章提要

- 矢量代数运算
- 三种常用的正交坐标系
- 矢量微积分及其物理意义
- 亥姆霍兹定理和格林定理

物理量通常分为两类：标量和矢量。标量是一个确定的数值，只有大小，没有方向；而矢量不仅有大小，还有方向。在三维空间表示任意矢量的方向需要三个数值，这些数值与坐标系的选择有关，但是矢量运算却可以和坐标系无关。在电路理论中讨论的电压和电流是标量场，在电磁场理论中论述的电场 E 和磁场 H 是矢量场。在电磁学中，一个矢量场可以用三个标量场来表示，独立变量较多，公式书写也非常繁琐，应用矢量分析方法则可以列出简洁的公式，因此矢量的基本运算和分析在本课程中起重要作用。虽然矢量运算不需要规定具体的坐标系，但在应用电磁学定理或定律分析解决具体问题时，坐标系的选择却非常重要，如矩形线圈采用直角坐标系比较方便，而圆柱(或球)结构采用圆柱(或球)坐标系将更有利于问题求解。因此，本章从矢量代数的基本运算规则入手，介绍矢量的加法、减法和乘法；然后，介绍三种常用的正交坐标系：直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系，以及不同坐标系下矢量的表示和不同坐标系间矢量的转换关系；最后，介绍场论有关知识，包括标量场的梯度、矢量场的散度和旋度、高斯定理、斯托克斯定理、拉普拉斯算子以及亥姆霍兹定理和格林定理，并利用矢量分析工具对矢量场的性质和分类进行讨论。

1.1 矢量分析

1.1.1 矢量和标量

1. 标量

标量：只有大小没有方向的量，如温度、时间、质量等。

2. 矢量

矢量：既有大小又有方向的量。矢量可以形象地用一条有向线段表示，线段的长度表示矢量的模，其方向代表矢量的方向，如图1-1所示，矢量 A 可表示为

$$A = e_A A \quad (1-1)$$



图1-1 矢量 A 图示

其中, A 表示矢量 \mathbf{A} 的模, 即

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1-2a)$$

\mathbf{e}_A 表示矢量 \mathbf{A} 的单位矢量, 沿矢量 \mathbf{A} 方向且大小为 1 的无量纲矢量, 即

$$\mathbf{e}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \quad (1-2b)$$

3. 空间位置矢量与距离矢量

空间位置矢量(position vector): 简称位矢, 用 \mathbf{r} 表示。如图 1-2 所示, 空间位置矢量指从坐标原点出发向空间任意点 $P(x, y, z)$ 引出的有向线段, 可以用三坐标投影唯一地表示为

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = e_x x + e_y y + e_z z \quad (1-3)$$

距离矢量: 在电磁场理论中, 通常用 \mathbf{r} 表示场点 $P(x, y, z)$ 的位置矢量, 用 \mathbf{r}' 表示源点 $P'(x', y', z')$ 的位置矢量, 用 \mathbf{R} 表示从源点 P' 出发引向场点 P 的距离矢量, 即

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = e_x(x - x') + e_y(y - y') + e_z(z - z') \quad (1-4)$$

\mathbf{R} 的模为

$$R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (1-5a)$$

\mathbf{R} 的方向为

$$\mathbf{e}_R = \frac{\mathbf{R}}{R} = e_x \frac{x - x'}{R} + e_y \frac{y - y'}{R} + e_z \frac{z - z'}{R} \quad (1-5b)$$

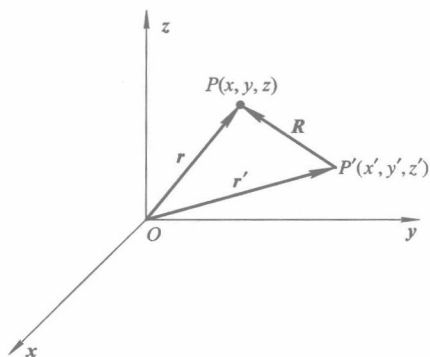


图 1-2 空间位置矢量和距离矢量

1.1.2 矢量运算

人们非常熟悉标量的加、减、乘、除运算, 例如, 两个相同单位标量相加, 只需代数相加。但是, 矢量运算却没有这么简单。

1. 矢量的加法和减法

矢量的加、减运算遵循平行四边形法则, 即两个不在同一直线上的矢量决定一个平面, 它们的和是同一平面上的另一矢量。

1) 矢量加法

【例 1-1】 已知矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} , 求 $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ 。

解 可以使用作图法得到 $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ 。

(1) 平行四边形法：从坐标系中同一点画出矢量 A 和矢量 B ，构成一个平行四边形，其对角线就是和矢量 C ，如图 1-3(a) 所示。

(2) 首尾相接法：矢量 A 的头接于矢量 B 的尾，从 A 的首端画到 B 的尾端，所得矢量就是它们的和矢量 C ，如图 1-3(b) 所示。

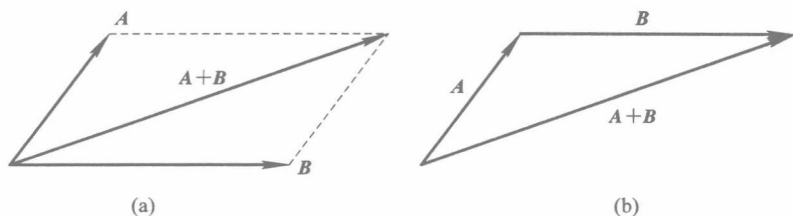


图 1-3 矢量加法

(a) 平行四边形法；(b) 首尾相接法

2) 矢量减法

借助于矢量加法运算，矢量减法可以写成

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \quad (1-6)$$

$-\mathbf{B}$ 为矢量 \mathbf{B} 的负值，即 $-\mathbf{B}$ 的模与 \mathbf{B} 相等，但方向相反。

令 $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ ，采用如图 1-4 所示的作图法，表示从矢量 \mathbf{A} 中减去矢量 \mathbf{B} 。

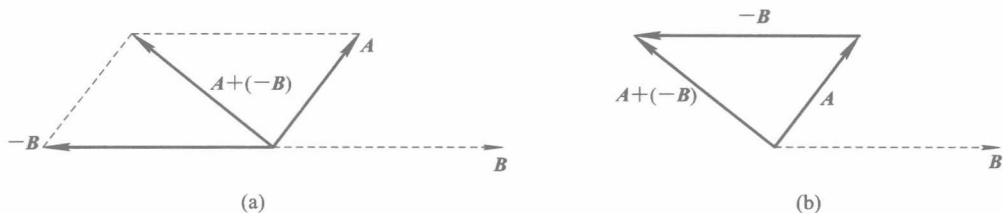


图 1-4 矢量减法

3) 矢量加法的代数表示

矢量加法可以用代数表示为

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{e}_x + (A_y + B_y)\mathbf{e}_y + (A_z + B_z)\mathbf{e}_z \quad (1-7)$$

4) 矢量加法的特性

矢量加法满足交换律和结合律，即

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad (1-8a)$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \quad (1-8b)$$

2. 矢量的乘法

矢量乘法分为以下三种情况：

(1) 矢量乘以标量： $\mathbf{B} = k\mathbf{A}$ 。

如图 1-5 所示， $\mathbf{B} = k\mathbf{A}$ ， \mathbf{B} 的方向根据 k 的取值而不同，若 $k > 0$ ，则 \mathbf{B} 与 \mathbf{A} 同向；若 $k < 0$ ，则 \mathbf{B} 与 \mathbf{A} 反向。



图 1-5 常数与矢量乘积示意图

在直角坐标系下

$$\mathbf{B} = k\mathbf{A} = k(A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z) \quad (1-9)$$

(2) 矢量点乘: $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 。

定义: 矢量点乘等于两矢量的模值与它们之间较小夹角的余弦乘积, 即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos\theta \quad (1-10)$$

如图 1-6 所示, 矢量点乘的结果是一标量, 也称为标量积 (scalar product) 或矢量点积 (dot product)。

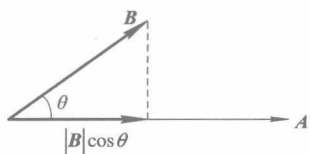


图 1-6 矢量点乘示意图

在直角坐标系下

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (\mathbf{e}_xA_x + \mathbf{e}_yA_y + \mathbf{e}_zA_z) \cdot (\mathbf{e}_xB_x + \mathbf{e}_yB_y + \mathbf{e}_zB_z) \\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \end{aligned} \quad (1-11)$$

矢量点乘满足交换律和分配律, 即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1-12a)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (1-12b)$$

(3) 矢量叉乘: $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 。

定义: 矢量叉乘的方向垂直于包含 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 所在的平面, 其值等于 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 两矢量的大小与它们之间较小夹角的正弦之积 (即两矢量所组成平行四边形的面积), 即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{e}_n AB \sin\theta \quad (1-13)$$

叉乘的模 $C = AB \sin\theta$, 叉积的方向 \mathbf{e}_n 是 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 所在平面的法向, 如图 1-7(a) 所示。叉积的方向也可以用右手螺旋法则确定: 右手四指从 \mathbf{A} 到 \mathbf{B} 旋转 θ 角, 大拇指所指方向表示矢量叉乘的方向, 如图 1-7(b) 所示。



图 1-7 决定叉积 $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 方向的法则
(a) 叉积方向示意图; (b) 右手螺旋法则

矢量叉乘结果为一矢量, 又称为矢量积 (vector product)。

矢量叉乘可以采用行列式计算。在直角坐标系下:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_x(A_y B_z - A_z B_y) - \mathbf{e}_y(A_x B_z - A_z B_x) + \mathbf{e}_z(A_x B_y - A_y B_x) \end{aligned} \quad (1-14)$$

矢量叉乘满足分配律, 即

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (1-15)$$

矢量叉乘不满足交换律和结合律, 即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$$

【例 1-2】 用矢量证明三角形正弦定理。

证明 如图 1-8 所示, 三角形三边分别用矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 表示, 根据矢量运算有

$$\mathbf{B} = \mathbf{C} - \mathbf{A}$$

因为 $\mathbf{B} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$, 则有

$$\mathbf{B} \times (\mathbf{C} - \mathbf{A}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

所以

$$BC \sin \alpha = BA \sin(\pi - \gamma)$$

$$\frac{A}{\sin \alpha} = \frac{C}{\sin \gamma}$$

同理, 可以证明

$$\frac{A}{\sin \alpha} = \frac{B}{\sin \beta}$$

最后可得

$$\frac{A}{\sin \alpha} = \frac{B}{\sin \beta} = \frac{C}{\sin \gamma}$$

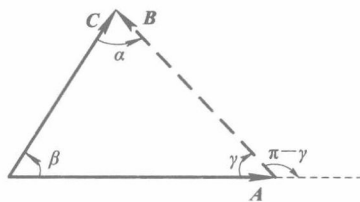


图 1-8 矢量三角形

3. 三个矢量的乘积

三个矢量的乘积分为两类: 三重标量积和三重矢量积。

1) 三重标量积

三重标量积可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \\ &= \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (1-16)$$

式(1-16)有明显的规律, 满足顺序循环记忆法则, 即 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 的次序满足循环互换规律。

如果三个矢量代表一个平行六面体的边, 如图 1-9 所示, 则三重标量积就是此六面体的体积。

2) 三重矢量积

三重矢量积可表示为

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1-17)$$

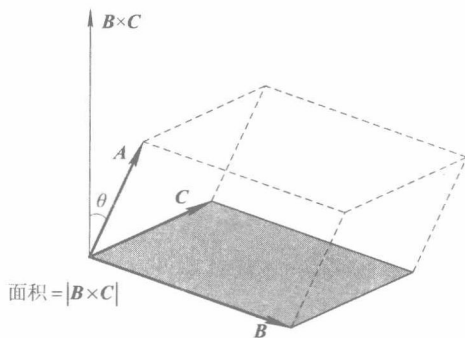


图 1-9 三重标量积 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 示意图

式(1-17)具有明显的规律: 左边是三重矢量积, 右边是点积再倍乘(三重乘积); 左边是一项, 右边是两项之差, 且矢量出现顺序按左边矢量排列顺序出现。

1.2 正交曲面坐标系

为了描述空间点的分布, 考察物理量在空间的分布和变化规律, 必须引入坐标系。由于两个曲面相交形成一条交线, 三个曲面相交有一个交点, 因此空间任意一点 M 可以用三个相互垂直的曲面表示, 这样构成的坐标系称为正交曲面坐标系。直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系就是常用的三种正交曲面坐标系。

正交曲面坐标系的构成原则如下:

- (1) 坐标曲面相互正交。
- (2) 沿各坐标量正的增加方向作为正方向。
- (3) 沿三条坐标曲线的切线方向各取一个单位矢量称为坐标单位矢量。
- (4) 坐标单位矢量相互正交, 并且满足右手螺旋法则。

1.2.1 直角坐标系

如图 1-10 所示, 直角坐标系由三个正交的平面构成, 其任意两个平面的交线均为直线, 分别称为 x 轴、 y 轴和 z 轴, 三轴线的交点是原点 O 。分别用单位矢量 e_x 、 e_y 和 e_z 表征矢量沿 x 、 y 和 z 轴分量的方向, e_x 、 e_y 和 e_z 相互正交且满足右手螺旋法则, 即 $e_x \times e_y = e_z$, $e_y \times e_z = e_x$, $e_z \times e_x = e_y$, 而空间任意一点 P 可用点 P 在三轴线上的投影 x_0 、 y_0 和 z_0 唯一确定。

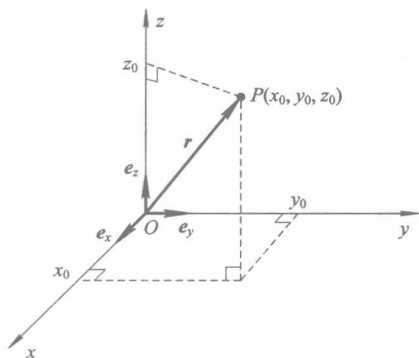


图 1-10 空间点表示

1. 直角坐标系中的矢量及其表示

在直角坐标系中, 对任意矢量 \mathbf{A} , 假设 A_x 、 A_y 、 A_z 分别是矢量在三个坐标方向的投影, 则 \mathbf{A} 可以写成

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z \quad (1-18)$$

矢量 \mathbf{A} 的模为

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1-19a)$$

矢量 \mathbf{A} 的方向为

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_A &= \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \mathbf{e}_x + \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \mathbf{e}_y + \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \mathbf{e}_z \\ &= e_x \cos\alpha + e_y \cos\beta + e_z \cos\gamma \end{aligned} \quad (1-19b)$$

式中, $\cos\alpha$ 、 $\cos\beta$ 、 $\cos\gamma$ 分别表示矢量 \mathbf{A} 与 x 、 y 、 z 轴正向之间夹角的余弦, 称为方向余弦。显然 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ 。

【注】空间点和空间点处场量不同。例如, 点 P 是空间点, 三坐标投影唯一确定了点 P 在空间中的位置; 矢量 \mathbf{A} 则是空间矢量, 它既可以与空间位置有关, 描述矢量的位置, 也

可以是空间坐标的函数,描述矢量的大小和方向。

【例 1-3】 在直角坐标系下,试求:

- (1) 空间点 $M(1, 3, 2)$ 。
- (2) 标量场 $\Phi(x, y, z) = 2x + y - 3z$ 在空间点 $M(1, 3, 2)$ 处的场值。
- (3) 矢量场 $\mathbf{A}(x, y, z) = x\mathbf{e}_x + \frac{1}{z}\mathbf{e}_y + 2y^2\mathbf{e}_z$ 在空间点 $M(1, 3, 2)$ 处的矢量场。

解 (1) $M(1, 3, 2)$ 表示直角坐标系下空间的一个点,点的 x 坐标等于 1, y 坐标等于 3, z 坐标等于 2。

(2) 标量场 Φ 在空间点 M 处的值:

$$\Phi(x, y, z) |_{M} = \Phi(x=1, y=3, z=2) = 2 \times 1 + 3 - 3 \times 2 = -1$$

(3) 矢量场 \mathbf{A} 在空间点 M 处的值:

因为

$$\mathbf{A}(x, y, z) = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z$$

所以

$$A_x(x, y, z) = x = 1$$

$$A_y(x, y, z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$$

$$A_z(x, y, z) = 2y^2 = 18$$

从而

$$\mathbf{A}(x, y, z) |_{M} = \mathbf{e}_x + \frac{1}{2}\mathbf{e}_y + 18\mathbf{e}_z$$

矢量 \mathbf{A} 的模为

$$A = |\mathbf{A}(1, 3, 2)| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 18 \times 18} = \frac{\sqrt{1301}}{2}$$

这里一定要注意矢量的方向和函数变量的概念, A_x 、 A_y 、 A_z 表明矢量 \mathbf{A} 在 x 、 y 、 z 三个坐标方向的投影,同时它们分别是空间坐标点 x 、 y 、 z 的函数。

2. 长度、面和体积的微分元

电磁场理论中常常用到线、面和体积分,在直角坐标系中矢量长度、矢量面积、体积的微分元如图 1-11 所示。

在正交坐标系中,坐标变换的微分元可能并非都有长度量纲,需要将它们分别乘以一个变换因子,才能构成沿坐标单位矢量的微分长度元。这个变换因子称为拉梅系数,用 h_1 、 h_2 、 h_3 表示。直角坐标系的拉梅系数 $h_1=1$ 、 $h_2=1$ 、 $h_3=1$ 。

矢量长度元

$$\left. \begin{aligned} dl_x &= h_1 dx \\ dl_y &= h_2 dy \\ dl_z &= h_3 dz \\ dl &= \mathbf{e}_x dl_x + \mathbf{e}_y dl_y + \mathbf{e}_z dl_z \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

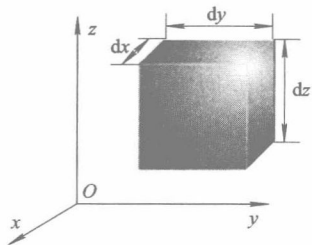


图 1-11 微分元

矢量面积元

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{S}_x &= \mathbf{e}_x \, dy \, dz \\ d\mathbf{S}_y &= \mathbf{e}_y \, dx \, dz \\ d\mathbf{S}_z &= \mathbf{e}_z \, dx \, dy \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

矢量体积元

$$dV = dx \, dy \, dz \quad (1-22)$$

1.2.2 圆柱坐标系

如图 1-12(a)所示, 圆柱坐标系的三个变量是 ρ 、 φ 、 z 。与直角坐标系相同, 圆柱坐标系也有一个 z 变量。各变量的变化范围: $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\infty \leq z < \infty$ 。

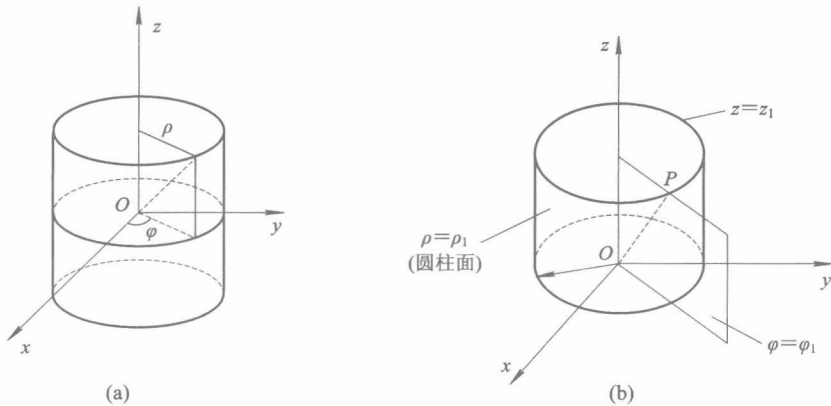


图 1-12 圆柱坐标系

(a) 圆柱坐标系; (b) 圆柱坐标系中的一点 P

如图 1-12(b)所示, 决定空间任一点 $P(\rho_1, \varphi_1, z_1)$ 的三个坐标曲面如下:

- (1) $\rho = \rho_1$, 以 z 轴为轴线、 ρ_1 为半径的圆柱面。 ρ_1 是点 P 到 z 轴的垂直距离。
- (2) $\varphi = \varphi_1$, 以 z 轴为界的半平面。 φ_1 是 xOz 平面与通过点 P 的半平面之间的夹角, 定义逆时针方向为正方向, 若点 P 在 z 轴, 则角 φ 不确定。
- (3) $z = z_1$, 与 z 轴垂直的平面。 z_1 是点 P 到 xOy 平面的垂直距离。

如图 1-13 所示, 过空间任一点 $P(\rho_1, \varphi_1, z_1)$ 的坐标单位矢量 \mathbf{e}_ρ 、 \mathbf{e}_φ 、 \mathbf{e}_z 相互正交, 且满足右手螺旋法则, 即

$$\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_\rho, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_\varphi$$

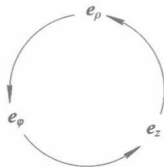


图 1-13 圆柱坐标系单位矢量循环关系

1. 矢量及其表示

位于点 $P(\rho_1, \varphi_1, z_1)$ 的任一矢量 \mathbf{A} 可表示为

$$\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_z \mathbf{e}_z \quad (1-23)$$

其中, A_ρ 、 A_φ 、 A_z 分别是矢量在 \mathbf{e}_ρ 、 \mathbf{e}_φ 、 \mathbf{e}_z 方向上的投影。

【注】角 φ 相对 x 轴逆时针旋转为正方向。

2. 长度、面和体积的微分元

1) 拉梅系数

圆柱坐标系的拉梅系数为 $h_1=1$ 、 $h_2=\rho$ 、 $h_3=1$ 。

2) 矢量长度元

如图 1-14 所示, 在点 $P(\rho_1, \varphi_1, z_1)$ 处沿 \mathbf{e}_ρ 、 \mathbf{e}_φ 、 \mathbf{e}_z 方向的长度元分别为

$$\left. \begin{aligned} dl_\rho &= h_1 d\rho = d\rho \\ dl_\varphi &= h_2 d\varphi = \rho d\varphi \\ dl_z &= h_3 dz = dz \\ dl &= \mathbf{e}_\rho d\rho + \mathbf{e}_\varphi \rho d\varphi + \mathbf{e}_z dz \end{aligned} \right\} \quad (1-24)$$

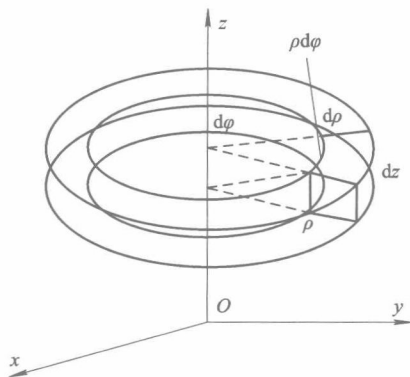


图 1-14 圆柱坐标系微分元

3) 矢量面积元

由 $\rho \rightarrow \rho + d\rho$, $\varphi \rightarrow \varphi + d\varphi$, $z \rightarrow z + dz$ 六个坐标曲面决定的六面体上的面积元为

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{S}_\rho &= dl_\varphi dl_z \mathbf{e}_\rho = \rho d\varphi dz \mathbf{e}_\rho \\ d\mathbf{S}_\varphi &= dl_\rho dl_z \mathbf{e}_\varphi = d\rho dz \mathbf{e}_\varphi \\ d\mathbf{S}_z &= dl_\rho dl_\varphi \mathbf{e}_z = \rho d\rho d\varphi \mathbf{e}_z \end{aligned} \right\} \quad (1-25)$$

4) 六面体的体积元

六面体的体积元可表示为

$$dV = dl_\rho d\varphi_z dl_z = \rho d\rho d\varphi dz \quad (1-26)$$

1.2.3 球坐标系

如图 1-15 所示, 球坐标系的三个变量为 r 、 θ 、 φ 。与圆柱坐标系相似, 球坐标系也有一个 φ 变量。各变量的变化范围: $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ 。