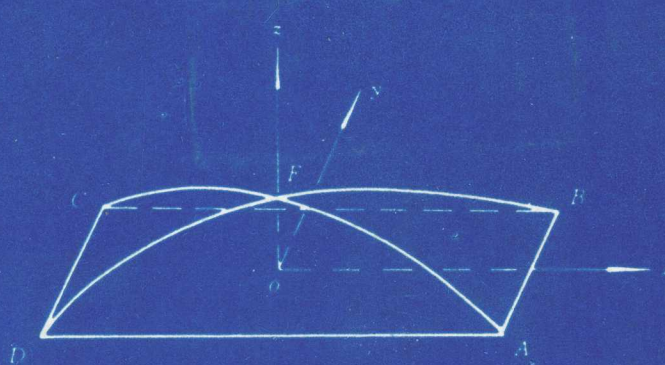


折板结构的计算理论及其应用

赖远明 王荣辉 编著



兰州大学出版社

折板结构的计算理论及其应用

赖远明 王荣辉 编著

兰州大学出版社

折板结构的计算理论及其应用

赖远明 王荣辉 编著

兰州大学出版社出版发行

兰州市天水路 216 号 电话:8617156 邮编:730000

兰州铁道学院印刷厂印刷

开本:787×1092 毫米 1/16

印张:12.375

1996 年 4 月第 1 版

1996 年 4 月第 1 次印刷

字数:301 千字

印数:1—1000 册

ISBN7-311-01014-4/T·34

定价:15.00 元

序

薄壳结构是空间结构的组成部分,折板结构则是薄壳结构的一种形式。由于薄壳结构受力比梁板结构优越,能充分利用材料的受压受拉性能,不仅使用跨度大,而且材料指标低,适用于覆盖大体积的空间,并可提供各种优美活泼的建筑造型,因而在国内外的公共性建筑中被广泛应用。但是一般薄壳结构必须使用弧形模板,制作困难,施工不便,大大影响其推广应用。而折板结构是由平板组成的空间结构,除具有一般薄壳结构的优点外,还具有模板平直、制作简单、施工速度快等特点。60年代以来,随着我国现代化建设的发展,要求提供各种生产工艺灵活布置的厂房,从而推动了各种形式钢筋混凝土屋盖的发展,折板结构也应运而生。30多年来,V形折板、组合折板、雁形板、伞形折板等折板屋盖结构得到了不断的发展,成为我国目前几个主要屋盖结构型式的一种。此外,折板结构在楼板、墙板、基础、水池、挡土墙等工程中也得到了应用,其应用范围十分广泛。

目前国内尚无一本关于折板结构计算理论的专著。《V形折板屋盖》一书中虽有讨论折板结构计算的章节,但仅针对V形折板结构特点而编写的。《折板结构的计算理论及其应用》的作者多年来潜心从事折板结构计算理论的研究工作,取得了丰硕成果,在国内外期刊上多次发表有关这方面的论文,作者在此基础上,并参考了国内外专家在折板结构研究方面的成果和论著,编写了这本折板结构计算理论的专著,既有基础理论,又有实用的计算程序,内容比较全面和丰富,可供大专院校师生、科研部门和工程界的科技工作者从事教学、理论研究和工程设计的参考。相信这本书的出版,将对提高我国折板结构的研究和设计水平以及促进折板结构的应用和发展做出积极贡献。对本书的出版表示祝贺和敬意。

中国土木工程学会空间结构委员会委员 陈醒辉

1996年2月

前 言

一般壳体屋盖结构具有受力性能好,能充分利用材料的受压受拉性能,但其最大的缺点是使用的模板是弯的,不便施工,音响效果差。而折板结构除具有一般壳体屋盖结构的优点外,还具有整体刚度大,结构新颖,抗震性能好,自重轻,省工省料,造价低。由于所使用的模板是直的,具有构造简单、施工简便、速度快等优点。另外还具有活泼、明快、轻盈的建筑艺术效果。我国 20 多年来的砖薄壳和钢筋混凝土薄壳的实践,要求对这类壳体的内力作更精确的分析研究,以便推广应用。作者写这本书的目的:一是为工程界的设计科研人员和土木工程系的高年级学生,提供一本全面论述折板结构的专著;二是要促使这些新颖的空间结构在国内得到进一步推广使用。

本书是作者多年来潜心研究折板结构的结晶,是根据发表在国际杂志和国内杂志上的大部分文章编写成的一本专著。在编写过程中也注意参考了国内外在折板结构研究方面的研究成果。全书分六章,给出了 12 种折板结构的计算方法。前三章为预备知识,第四章为折板结构的线性及非线性分析,第五章为折板结构的振动和稳定,第六章为薄壁箱梁(箱形折板结构)计算理论。书末还附了两种结构新颖、力学性能好的“组合抛物面薄壳屋盖”及“平顶四坡折板屋盖”线性及非线性分析的计算程序,后者还能用来进行 V 形折板、长方形双向折板、组合折板的分析计算。

愿本书的出版,将会引起相关专业的广大学生、研究生和科技工作者的兴趣。若能为填补折板结构的计算理论及其应用领域中的一些空白,起到一些作用,实为我们的心愿!若能起到抛砖引玉的作用,我们将感到欣慰。

本书第一章、第三章、第六章和附录 2 由王荣辉编写,第二章、第四章、第五章和附录 1 由赖远明编写并负责对全书进行统稿。

在本书的出版过程中,得到了长沙铁道学院王玮玮老师的大力帮助,她为本书绘制了全部插图并为插图植字,在此向她表示衷心的感谢。

由于作者水平有限,加之时间仓促,书中的内容如有不当之处,请广大读者批评指正。

目 录

第一章 薄板的基本理论	(1)
§ 1-1 基本假设和简化	(1)
§ 1-2 薄板弯曲的内力	(2)
§ 1-3 薄板弯曲的微分方程	(5)
§ 1-4 薄板的边界条件	(7)
§ 1-5 矩形薄板的李维解法	(12)
§ 1-6 圆形薄板的弯曲	(13)
第二章 平板的振动和稳定	(16)
§ 2-1 薄板的自由振动	(16)
§ 2-2 连续矩形板的自由振动	(18)
§ 2-3 正交各向异性层合板在热荷载作用下受迫振动的精确解法	(24)
§ 2-4 矩形夹层板和中厚度板的自由振动	(28)
§ 2-5 圆形薄板的自由振动	(35)
§ 2-6 薄板受横向和纵向荷载共同作用下的弯曲	(36)
§ 2-7 连续矩形板的稳定	(38)
§ 2-8 变厚度板和加劲板的稳定	(44)
§ 2-9 任意变厚度矩形薄板的屈曲和振动	(50)
第三章 扁壳的基本理论	(55)
§ 3-1 扁壳理论的基本假定	(55)
§ 3-2 扁壳理论的基本方程	(56)
§ 3-3 扁壳的边界条件	(60)
§ 3-4 四边简支扁壳的重三角级数解法	(62)
§ 3-5 扁壳的非线性理论	(63)
§ 3-6 扁壳的热应力问题	(65)
第四章 折板结构的线性和非线性分析	(68)
§ 4-1 V形折板的内力和挠度	(68)
§ 4-2 泛形组合扭壳的内力和挠度	(71)
§ 4-3 长方形双向折板的内力和挠度	(74)
§ 4-4 组合折板在均布荷载作用下的内力和挠度	(79)
§ 4-5 平顶四坡折板在对称荷载作用下的线性和非线性分析	(84)
§ 4-6 组合抛物面薄壳屋盖的非线性分析	(92)

§ 4-7	传统组合抛物面屋盖的非线性分析	(97)
§ 4-8	组合扭壳在复合荷载和热荷载作用下的非线性分析	(101)
§ 4-9	组合折板结构在复合荷载和热荷载作用下的非线性分析	(105)
第五章	折板结构的振动和稳定	(112)
§ 5-1	V 形折板的受迫振动	(112)
§ 5-2	组合折板的自由振动和受迫振动	(116)
§ 5-3	伞状折板轴对称自由振动	(119)
§ 5-4	组合双曲抛物面扁壳的稳定分析	(122)
第六章	薄壁箱梁计算理论	(127)
§ 6-1	概 述	(127)
§ 6-2	箱梁的约束扭转的简化计算	(128)
§ 6-3	箱梁弯曲, 扭转, 畸变分析的梁段有限元法	(135)
§ 6-4	考虑几何非线性的箱梁梁段有限元法	(150)
附 录		(171)
1.	平顶四坡折板在对称荷载作用下的非线性分析程序	(171)
2.	组合抛物面薄壳屋盖的非线性分析程序	(181)

第一章 薄板弯曲的基本理论

§ 1-1 基本假设和简化

这一章将阐述薄板的弯曲。薄板就是板的厚度 h 与板面的最小尺寸 b 的比值,是在下列范围之内:

$$\left(\frac{1}{80} \sim \frac{1}{100}\right) < \frac{h}{b} < \left(\frac{1}{5} \sim \frac{1}{8}\right)$$

这种板就称为薄板,否则就称为厚板。平分板厚度 h 的平面称为中间平面,简称为中面。

当薄板受有一般荷载时,总可以把每一个荷载分解为两个分荷载,一个是作用在薄板中面之内的所谓纵向荷载,另一个是垂直于中面的所谓横向荷载。对于纵向荷载,可以认为它们沿薄板厚度均匀分布,因而它所引起的应力,变形和位移,可以按平面应力问题进行计算。横向荷载将使薄板弯曲,它们所引起的应力、位移,可以按薄板弯曲问题进行计算。

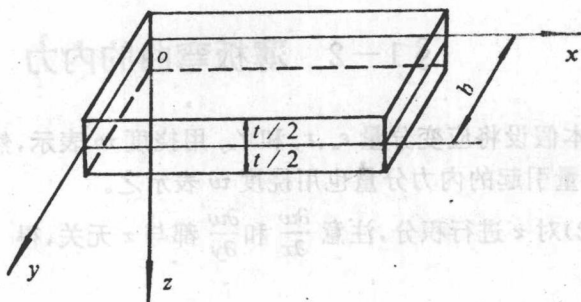


图 1-1

当薄板弯曲时,中面所弯成的曲面,称为薄板的弹性曲面,而中面内各点在横向的位移,称为挠度。板的弯曲性质在很大程度上取决于板厚度与其他尺寸的比。若厚度远小于其他尺寸,同时板的位移比板厚度 h 小,则根据下列假设可得出由于横向荷载所引起的薄板弯曲的小挠度理论。

(1)垂直于中面方向的正应变 ϵ_z 极其微小,即正应变 ϵ_z 不计。

由于 $\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, 所以位移 w 与坐标 z 无关,仅为 x 和 y 的函数,即

$$w = w(x, y) \quad (1-1)$$

(2)应力分量 τ_{xz} 、 τ_{xy} 和 σ_z 远小于其余三个应力分量,因而是次要的,它们引起的变形可以不计。

因不计 τ_{xz} 及 τ_{xy} 所引起的形变,所以有

$$\gamma_{xz} = 0, \quad \gamma_{xy} = 0$$

由几何方程可得

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

从而得

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (1-2)$$

由于不计 σ_z 所引起的形变, 所以虎克定律公式为:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

(3) 薄板中面内的各点都没有平行于中面的位移, 即

$$(u)_{z=0} = 0, \quad (v)_{z=0} = 0 \quad (1-4)$$

由于 $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$, 因此由上式可得

$$(\epsilon_x)_{z=0} = 0, \quad (\epsilon_y)_{z=0} = 0, \quad (\gamma_{xy})_{z=0} = 0$$

这就是说, 板的中平面没有形变, 在弯曲时, 中平面成为中和曲面。

对于薄膜与厚板, 上述假设就不适用, 薄膜的弯曲刚度小, 位移比厚度大, 中平面发生拉伸而有薄膜应力。对于厚板, 不能略去 σ_z 和 ϵ_z , 直线线段的假设也不成立。

§ 1-2 薄板弯曲的内力

首先根据基本假设将应变分量 ϵ_x, ϵ_y 和 γ_{xy} 用挠度 w 表示, 然后再将应力分量 σ_x, σ_y 和 τ_{xy} 以及由应力分量引起的内力分量也用挠度 w 表示之。

将方程(1-2)对 z 进行积分, 注意 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial w}{\partial y}$ 都与 z 无关, 得

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y)$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + f_2(x, y)$$

其中 f_1 和 f_2 是任意函数。

根据假设(3), 即方程(1-4), 则可得上式中的 f_1 和 f_2 必为零。所以简化上式为

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

应用几何方程, 可由上式得到薄板内各点的不为零的三个应变分量, 用 w 表示为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\}$$

式中 $-\partial^2 w / \partial x^2$ 和 $-\partial^2 w / \partial y^2$ 分别表示薄板弹性曲面在 x 和 y 方向的曲率, 而 $-\partial^2 w / \partial x \partial y$ 表示它在 x 和 y 方向的扭率。这三个量完全确定了薄板内所有各点的应变分量, 因此称为薄板的应变分量, 而三者的总体称为薄板的应变, 可用矩阵形式表示为

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (1-5)$$

上式称为薄板应变列阵, 它是薄板的几何方程, 表明薄板的应变与薄板的挠度之间的关系。如再引入薄板内各点的应变列阵

$$\{\epsilon\} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}]^T$$

则 (a) 式可缩写为

$$\{\epsilon\} = z \{\chi\} \quad (1-6)$$

其次, 将应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 用 w 来表示。由物理方程 (1-3) 可得应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_y + \mu \epsilon_x), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

将式 (a) 代入式 (b), 即得所需的表达式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

注意到 w 不随 z 变化, 可见这三个应力分量和 z 成正比。

现在, 我们可以利用上式求薄板弯曲时的弯矩和扭矩。从薄板中取一个无穷小的平行六面体, 它的尺寸为 dx, dy 和 h , 如图 1-2 所示。

在垂直于 x 轴的截面上, 作用着 σ_x 和 τ_{xy} , 由公式 (1-7) 可知, 应力分量 σ_x 和 τ_{xy} 是坐标 z 的奇函数, 所以它们沿着薄板厚度的积分的总值

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz \text{ 和 } \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz$$

为零。即它们的主矢量为零, 主矩不一定为零, 因此, 只有可能分别合成为弯矩和扭矩。

应力分量 σ_x 合成为弯矩 $M_x dy$, 而薄板的每单位宽度上的弯矩 M_x 为:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_x dz$$

将公式 (1-7) 中的第一式代入上式, 进行积分, 因为挠度 w 是 (x, y) 的函数, 所以得

$$M_x = \frac{-E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz$$

$$= \frac{-Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (c)$$

应力分量 τ_{xy} 合成为扭矩 $M_{xy}dy$, 而薄板的单位宽度上的扭矩 M_{xy} 为:

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \tau_{xy} dz$$

将公式(1-7)中的第三式代入上式, 进行积分, 得

$$M_{xy} = -\frac{E}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz$$

$$= -\frac{Eh^3}{12(1+\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (d)$$

同理, 在垂直于 y 轴的截面上, 应力分量 σ_y 和 τ_{yx} 分别合成弯矩 $M_y dx$ 和扭矩 $M_{yx} dx$, 而薄板的每单位宽度上的弯矩和扭矩为

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_y dz$$

$$= -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (e)$$

$$M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \tau_{yx} dz$$

$$= -\frac{Eh^3}{12(1+\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (f)$$

引进记号

$$D = Eh^3/12(1-\mu^2) \quad (1-8)$$

称为薄板的弯曲刚度, 它的因次是[力][长度]。

利用公式(1-8), 则式(c)至式(f)可简写为:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= M_{yx} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

利用公式(1-9), 将公式(1-7)中的 w 消去, 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{12M_x}{h^3} z \\ \sigma_y &= \frac{12M_y}{h^3} z \\ \tau_{xy} &= \frac{12M_{xy}}{h^3} z \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

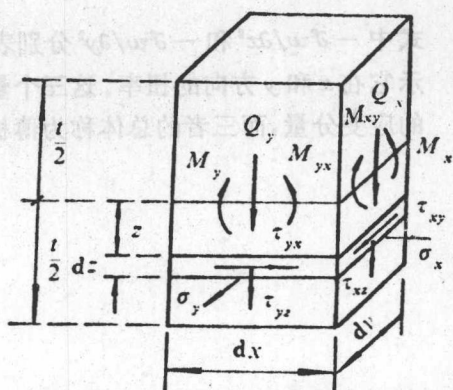


图 1-2

此外,如果薄板上作用有垂直于板面的荷载时,根据微元体的平衡条件,在垂直于 x 和 y 轴的截面上,还应分别作用着应力分量 τ_{xz} 和 τ_{yz} 。从而也合成剪力,其单位宽度上的剪力为

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz$$

$$Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz$$

Q_x 、 Q_y 的具体表达式将在 § 1-3 节中给出。

沿着薄板的厚度,应力分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 的最大值发生在板面,而 σ_z 的最大值发生在板的上面,各个最大值为

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x)_{z=\pm\frac{h}{2}} &= -(\sigma_x)_{z=-\frac{h}{2}} = \frac{6M_x}{h^2} \\ (\sigma_y)_{z=\pm\frac{h}{2}} &= -(\sigma_y)_{z=-\frac{h}{2}} = \frac{6M_y}{h^2} \\ (\tau_{xy})_{z=\pm\frac{h}{2}} &= -(\tau_{xy})_{z=-\frac{h}{2}} = \frac{6M_{xy}}{h^2} \\ (\sigma_z)_{z=\pm\frac{h}{2}} &= -q \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

注意:以上所提到的内力,都是作用在薄板每单位宽度上的内力,所以弯矩和扭矩的因次都是[力],而不是[力][长度]。

正应力 σ_x 及 σ_y 分别与弯矩 M_x 及 M_y 成正比,因而称为弯应力,剪应力 τ_{xy} 与扭矩 M_{xy} 成正比,因此称为扭应力;剪应力 τ_{xz} 及 τ_{yz} 分别与横向剪力 Q_x 及 Q_y 成正比,因而称为横向剪应力;正应力 σ_z 与荷载 q 成正比,称为挤压应力。

在薄板弯曲问题中,一定荷载引起的弯应力和扭应力,在数值上最大,因而是主要应力;横向剪应力在数值上较小,是次要的应力;挤压应力在数值上更小,是更次要的应力。因此在计算薄板的内力时,主要是计算弯矩和扭矩,横向剪力一般都无须计算。

§ 1-3 薄板弯曲的微分方程

现在我们来研究薄板上某一微元体(如图 1-3)的平衡,并找出内力与外力的关系,从而进一步得到挠度与外力的关系,即薄板弯曲的微分方程式。设薄板受强度为 $q(x, y)$ 的横向分布荷载作用,由于微元体的两边长为 dx 、 dy ,所以在微元体上的横向荷载强度 $q(x, y)$,可以认为是均匀分布的。微元体四边上的内力有剪力、弯矩和扭矩,再考虑到不同的平行截面间的内力增量,它的受力状态如图 1-3 所示。

如果薄板的微元体是平衡的,则这些力在 x 、 y 和 z 轴方向的投影之和以及这些力对 x 、 y 和 z 轴之矩的和必等于零。设略去自重,通常它比横向荷载小得多。由第三个基本假设可知,薄板中面没有发生应变,所以没有轴向内力。当然也就无需考虑 x 和 y 轴方向的力的平衡条件。但是力在 z 轴方向分量之和必为零的条件,即平衡方程式为

$$\left(\frac{\partial Q_z}{\partial x} dx\right) dy + \left(\frac{\partial Q_z}{\partial y} dy\right) dx + q dx dy = 0$$

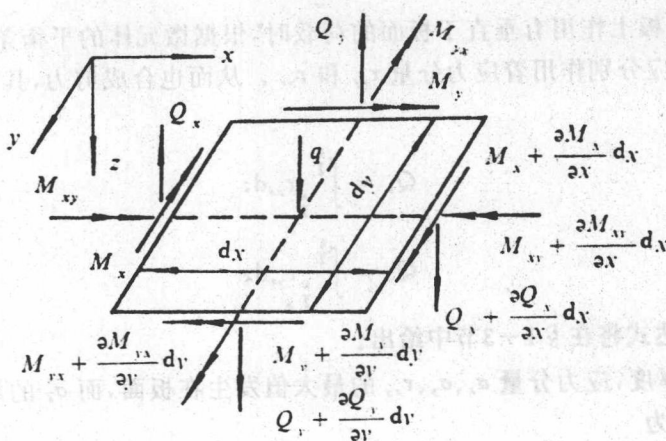


图 1-3

简化成

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (a)$$

取微元体上所有的力对 x 轴之矩,并略去高阶微量,再注意到运算时的符号应按理论力学中的右手规则来确定,这样,得到平衡方程式

$$-\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy - \frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx + Q_y dx dy = 0$$

即:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (b)$$

同理,对 y 轴列力矩的平衡方程式为

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (c)$$

将公式(1-9)中的 M_x, M_y 和 M_{xy} 分别代入式(c)和(b),得

$$Q_x = -\frac{\partial}{\partial x} [D(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})] - \frac{\partial}{\partial y} [D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}]$$

$$Q_y = -\frac{\partial}{\partial y} [D(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2})] - \frac{\partial}{\partial x} [D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}]$$

对于等厚度薄板,弯曲刚度 D 是一个常量,因而,上式可进一步简化为

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \quad (1-11)$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

称为拉普拉斯算子。

把公式(1-11)代入式(a)中,我们就得到小挠度理论的薄板弯曲时弹性曲面的微分方程式

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

式 $\nabla^4 w = \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}$ (1-12)

§ 1-4 薄板的边界条件

薄板的弯曲问题,应按照板边的边界条件,由薄板弹性曲面的微分方程,求出挠度函数 w 。

现以矩形薄板为例,说明各种边界条件,如图 1-4 所示。设矩形薄板 $OABC$ 的 OA 边是夹支边, OC 边是简支边, AB 和 BC 边是自由边。

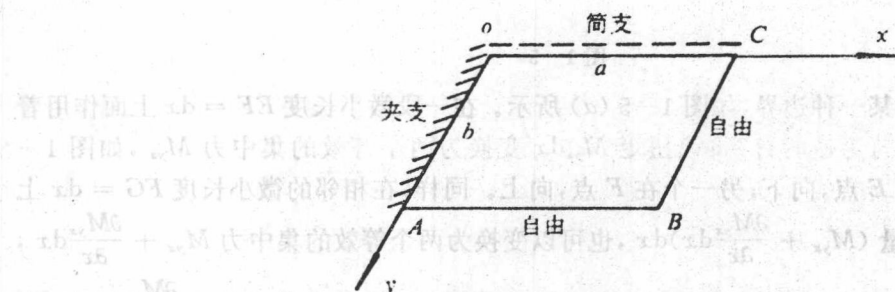


图 1-4

在夹支边 OA 上 ($x = 0$), 挠度 w 及斜率 $\partial w / \partial x$ 应等于零, 所以边界条件是

$$(w)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \quad (1-13)$$

在简支边 OC 上 ($y = 0$), 挠度 w 及弯矩 M_y 应等于零, 所以边界条件是

$$(w)_{y=0} = 0, \quad (M_y)_{y=0} = 0 \quad (1-14)$$

利用式(1-9)中的第二式, 式(1-14)可以全部用 w 表示为

$$(w)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=0} = 0 \quad (1-15)$$

然而上面的第二个条件可以简化。因为在这条边界上各点的挠度 w 都等于零, 即薄板在变形前后该边界都保持为一直线, 所以 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 必等于零, 于是简支边 OC 的边界条件式(1-15)便简化为

$$(w)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=0} = 0 \quad (1-16)$$

如果这个简支边由于支座沉陷而发生挠度, 并且还受有分布的力矩荷载, 则边界条件(1-14)中二式的右边将不等于零, 而分别等于已知挠度和已知力矩荷载。

沿着自由边, 例如 AB 边 ($y = b$), 薄板的弯矩 M_y 和扭矩 M_{xy} 以及横向剪力 Q_y 都等于零, 因而有三个边界条件

$$(M_y)_{y=b} = 0, \quad (M_{xy})_{y=b} = 0, \quad (Q_y)_{y=b} = 0 \quad (1-17)$$

但是,如齐系西霍夫所指出,薄板任一边界上的扭矩都可以变换为等效的横向剪力,和原来的横向剪力合并,因而式(1-17)中的后二式所表示的两个条件可以归并为一个条件。

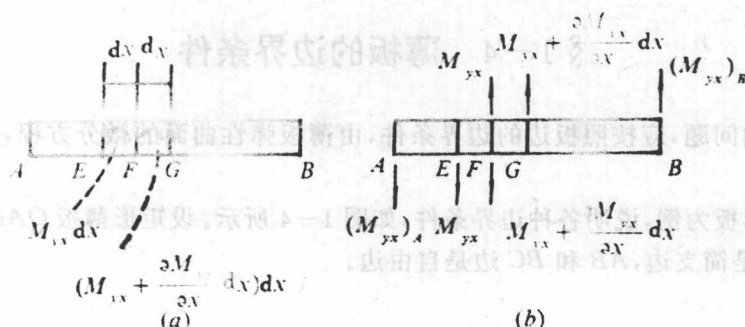


图 1-5

假定 AB 边为某一种边界,如图 1-5 (a) 所示。在一段微小长度 $EF = dx$ 上面作用着扭矩 $M_{yx} dx$, 其转向为逆时针, 将该扭矩 $M_{yx} dx$ 变换为两个等效的集中力 M_{yx} , 如图 1-5 (b) 所示, 一个在 E 点, 向下; 另一个在 F 点, 向上。同样, 在相邻的微小长度 $FG = dx$ 上面, 扭矩有微小增量 $(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} dx) dx$, 也可以变换为两个等效的集中力 $M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} dx$, 一个在 F 点, 向下; 另一个在 G 点, 向上。这样, 在 F 点的两个合成为向下的力 $\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} dx$, 于是在 F 点左右微小长度 dx 上的分布剪力是 $\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$ 。因此, 在边界 AB 上的分布扭矩就变换成等效的分布横向剪力。在边界 AB 上 ($y = b$) 综合的分布横向剪力应该是原有的分布横向剪力 Q_y 加上等效的分布横向剪力 $\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$, 即

$$V_y = Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \quad (1-18)$$

这就是在边界 AB 上的横向反作用力。此外, 由图 1-5 (b) 可见, 在边界 AB 的端点 A 和 B 处, 还有未被抵消的集中剪力, 也就是有角点的集中反力

$$R_{AB} = (M_{yx})_A, \quad R_{BA} = (M_{yx})_B \quad (1-19)$$

如边界 $AB (y = b)$ 是自由边, 则在这条边界上所有的内力都应当等于零。即薄板的弯矩 M_y , 扭矩 M_{yx} 和横向剪力 Q_y 都等于零, 因此有三个边界条件

$$(M_y)_{y=b} = 0,$$

$$(M_{yx})_{y=b} = 0,$$

$$(Q_y)_{y=b} = 0$$

因弹性曲面的微分方程式(1-12)是一个四阶的偏微分方程, 在任意一个边界上只可能满足两个边界条件。三个条件反而使问题成为数学上不可能解的问题。但是由于上面的分析, 三个条件的后两个可以合并为一个, 即式(1-18), 因此自由边 $AB (y = b)$ 的边界条件就可写成

$$(M_y)_{y=b} = 0, \quad (V_y)_{y=b} = (Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x})_{y=b} = 0 \quad (1-20)$$

通过式(1-9)和(1-11),自由边 AB 的边界条件式(1-20)可以改用 w 表示成为

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y}\right]_{y=0} = 0 \quad (1-21)$$

同样,沿边界 $BC(x=a)$, 扭矩 M_{xy} 也可以变换为等效的分布横向剪力 $\partial M_{xy}/\partial y$, 而综合的分布横向剪力为

$$V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (1-22)$$

此外,在 C 点和 B 点,也分别有集中剪力,即角点的集中反力

$$R_{CB} = (M_{xy})_C, \quad R_{BC} = (M_{xy})_B \quad (1-23)$$

因此,如果 $BC(x=a)$ 是自由边,则边界条件也可以变换成为

$$(M_x)_{x=a} = 0, \quad (V_x)_{x=a} = (Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y})_{x=a} = 0 \quad (1-24)$$

或利用式(1-9)和(1-11)改用挠度 w 表示成为

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a} &= 0 \\ \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2}\right]_{x=a} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-25)$$

如果在自由边上有分布的弯矩载荷 M 及分布的横向载荷 V , 则式(1-20)和式(1-24)的右边将不等于零。

在 AB 和 BC 两边相交的一点,如图 1-4 中的 B 点,由式(1-19)及式(1-23)的第二式可见,总的集中反力经叠加后可得

$$R_B = R_{BA} + R_{BC} = (M_{yx})_B + (M_{xy})_B = 2(M_{xy})_B \quad (1-26)$$

利用式(1-9)的第三式将上式改写为

$$R_B = -2D(1 - \mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_B \quad (1-27)$$

如果 B 点是自由边 AB 和 BC 的交点,而在 B 点并没有任何支承,在该点就没有式(1-27)所表示的集中反力,则在 B 点还需补充以角点条件 $R_B = 0$, 即:

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_B = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{x=a, y=0} = 0 \quad (1-28)$$

如果在 B 点有支承阻止产生挠度,则上列条件应改为:

$$(w)_B = (w)_{x=a, y=0} = 0 \quad (1-29)$$

而支承对薄板所施的反力由式(1-27)计算。

在自由边或固定边上,因扭矩等于零,而不存在角点的集中反力。如果已知挠曲面的形式 $w(x, y)$, 就可以算出集中反力的大小,其方向也可以定出,但并不是四个角点的反力向上(或向下)时都是正的。由上述等效变换可见, O 点和 B 点的集中反力向上为正,而 A 点和 C 点的集中反力向下为正。

有时板边与梁相连接,因梁为弹性构件,故这种边界称为弹性支承边。设 $x=a$ 边的板边为一梁所支承,如图 1-6 (a) 所示,则薄板在该边的挠度应等于支承梁的挠度,而薄板在该边的弯矩应等于支承梁的扭矩。若沿 $x=a$ 边将板与梁切开,则在板的切口上将有弯矩 M_x 和分布反力 V_x 。选考虑 $(V_x)_{x=a}$ 的作用,实际上就是将反方向的 V_x 作为支承梁的分布载

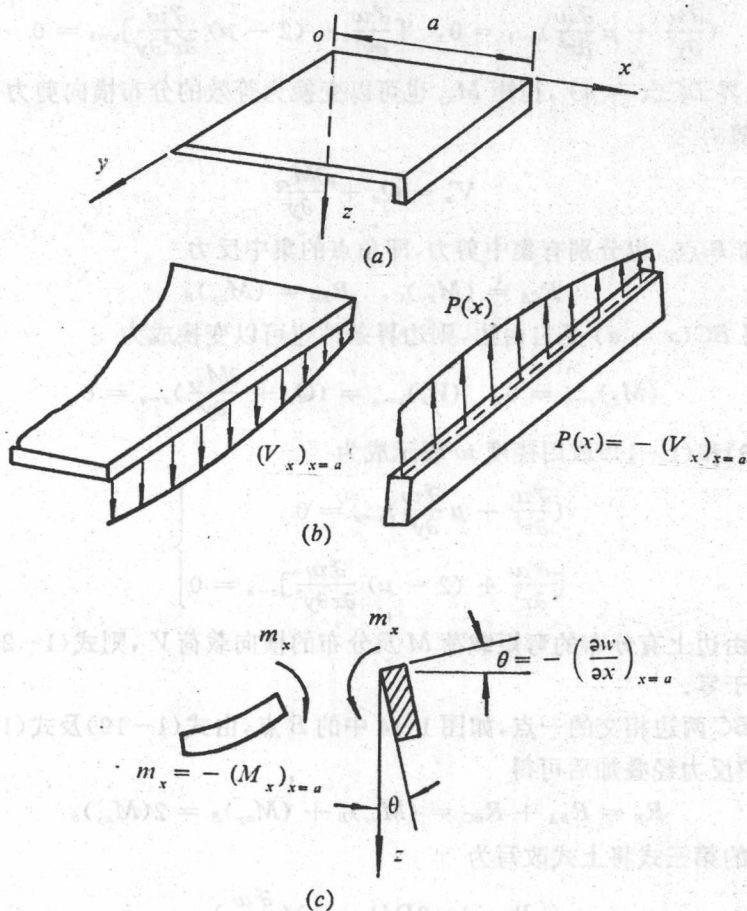


图 1-6

荷 P ，如图 1-6 (b) 所示，使梁产生挠度 w_s 。由于板与梁之间的连续性，梁的挠度 w_s 应等于板在 $x = a$ 边的挠度 $(w)_{x=a}$ 。设支承梁的抗弯刚度为 EJ ，则梁的弹性曲线方程为

$$EJ \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_{x=a} = P$$

其中正的 P 为向下作用于支承梁的荷载。根据 $P = -(V_x)_{x=a}$ ，式 (1-22) 和式 (1-9) 及式 (1-11)，可得弹性支承边的第一个边界条件

$$EJ \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_{x=a} = D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} \quad (1-30)$$

再来考虑在薄板切口处的弯矩 $(M_x)_{x=a}$ 的作用，它实际上就是作为支承梁的分布外扭矩而使梁产生绕梁轴的扭转，如图 1-6 (c) 所示。薄板切口处的转角 $\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a}$ 就是梁的扭角 θ 。

若扭角的矢量按右手螺旋法则确定其正负号，则应有 $\theta = - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a}$ ；梁的扭率，即沿梁轴每单位长度内的扭转角，显然是 $\frac{\partial \theta}{\partial y} = - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a}$ 。因此梁的内扭矩 $M_t = C \frac{\partial \theta}{\partial y} = -$