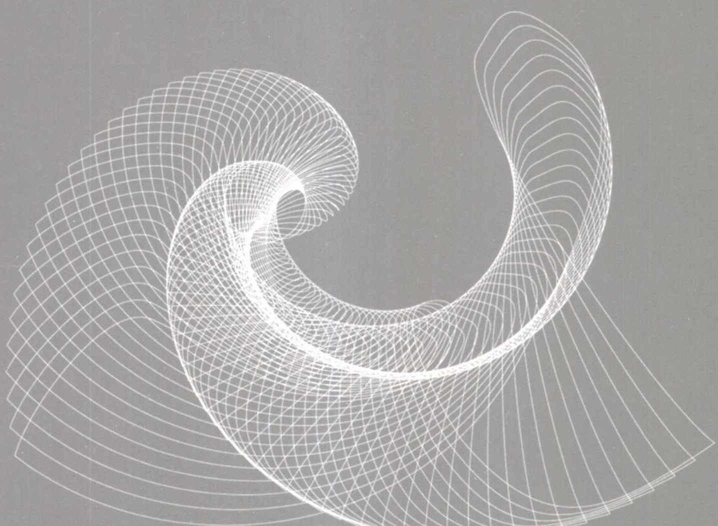
YINGYONG
SUIJI
GUOCHENG

应用随机过程

主编　王志刚



中国科学技术大学出版社

应用随机过程

主　编　王志刚
副主编　高泽图　张炳侠　罗　婷

YINGYONG
SUIJI
GUOCHENG

中国科学技术大学出版社

内容提要

本书介绍了随机过程的基本理论、基本方法和应用背景，主要内容包括：随机过程的基本概念和基本类型、泊松过程和更新过程、马尔可夫链、连续时间的马尔可夫链、平稳随机过程、平稳随机过程的谱分析、平稳时间序列、平稳时间序列的统计分析等. 在选材上强调实用性，配有大量的应用实例，每章后附有一定数量的习题，附录给出了习题答案，可供读者选用、参考，企望帮助读者加深对基本概念和基本方法的理解和掌握.

本书可作为工科院校相关专业研究生和应用数学专业高年级本科生的教材和教学参考书，还可作为工程类科研工作者的自学教材.

图书在版编目(CIP)数据

应用随机过程/王志刚主编. —合肥：中国科学技术大学出版社，2009.7
ISBN 978-7-312-02563-1

Ⅰ.应…　Ⅱ.王…　Ⅲ.随机过程—高等学校—教材　Ⅳ.O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 097774 号

出版　中国科学技术大学出版社
　　合肥市金寨路 96 号，邮编：230026
　　网址：http://press.ustc.edu.cn
印刷　中国科学技术大学印刷厂
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　710mm×960mm　1/16
印张　13.25
字数　267 千
版次　2009 年 7 月第 1 版
印次　2009 年 7 月第 1 次印刷
定价　22.00 元

前　　言

随机过程理论在物理、生物、工程、经济、管理控制论、规划论、排队论及信息论等方面都有着重要的应用,已成为近代科技工作者必须掌握的一个理论工具.随机过程是随机数学一个十分广泛的应用分支,研究的是客观世界中随机现象演变过程的统计规律性.本书是海南大学课程组在多年的教学和科研实践基础上编写而成的,企望能满足多种读者的需要.

本书在撰写的过程中力求突出以下几个特点:

(1) 强调基本概念和基本方法的理解和阐述.本书是随机过程的入门教材,编者着眼于引发读者兴趣,使读者领悟其思想,感受其魅力与威力,采用工科学生和工程技术人员易于接受的叙述方式着重揭示基本概念的来源与实际背景、典型随机模型的提炼、特性的刻画、应用背景及其发展的踪迹.较全面地介绍了现代科学技术中常见的几种重要随机过程,如泊松过程和更新过程、马尔可夫过程、平稳随机过程、时间序列分析等,对每种过程都作了详细的分析,读者可根据专业的需要适当取舍.每章都配有大量的例题和习题帮助读者理解和掌握基本概念和基本方法.

(2) 对学生的数学基础要求不高.学习本书不需较深的测度论知识只需具有线性代数、高等数学及初等概率论和数理统计的基础知识即可.我们不刻意追求数学上的严格证明,只求讲清基本原理和基本方法的本质特征和应用.作者力求在内容上由浅入深,在文字上简洁流畅.第 1 章还给出了基础概率论的内容要点,供读者学习使用和参考.

(3) 强调知识的灵活运用.本书不仅介绍了随机过程的基本概念和基本方法,还强调随机过程理论的应用实例,例如线性时不变系统、市场占有率分析、商品销售预测、教学效果评价、$M/M/s$ 排队系统分析、机床维修、天气预报系统、股票走势预测等,详细介绍了如何把一个实际问题转化为随机模型的思想和方法,真正能使读者学以致用,展示出随机过程强大的生命力和广阔的发展前景.

本书可作为工科相关专业研究生和应用数学专业高年级本科生教材或教学参考书,也可作为科研人员自学教材,作为教材,教学总时数约为 68 学时,可以根据学生的实际适当调整.

本书在编写过程中得到了湖北大学田范基教授、武汉大学高付清教授、黄冈师

范学院彭锦教授和海南大学数学系领导以及老师的大力支持与帮助，特别是李会师教授、尹建华教授、欧宜贵教授、龙伦海教授、邓谋杰教授、潘伟教授、李志林教授等给予了很多鼓励、关心与支持，并对本书原始讲义的编写提出了很多宝贵意见. 研究生焦计平等为本书的整理、修改与校对做了很多工作，在此表示衷心的感谢.

本书由海南省教育厅高等学校科学研究资助项目 Hjkj2009-08、海南省自然科学基金(807025)、海南大学教育教学研究课题和海南大学博士启动基金资助.

特借此书为海南大学步入国家“211 工程”重点建设高校行列献上一份贺礼.

由于编者水平有限，书中一定还有不少缺点和疏漏，恳请读者指正.

编　者

2009 年 6 月于海南大学

目　　录

1　概率论基础知识

概率论是随机过程的基础，在传统的概率论中，限于各种原因，往往借助于直观理解来说明一些基本概念，这对于简单随机现象似乎无懈可击，但对于一些复杂随机现象就难以令人信服了. 随着随机数学理论的不断完善，随机过程越来越成为现代概率论的一个重要分支和发展方向. 为了更好地学习随机过程，我们必须对基础概率论的理论有一个比较深入和全面的了解. 本章系统介绍了概率论基础知识，包括概率空间、随机变量及其分布、数学期望的若干性质、特征函数和母函数、随机变量列的收敛性及其相互关系、条件数学期望等.

1.1　概 率 空 间

概率论是研究随机现象统计规律的一门数学分科，由于随机现象的普遍性，使得概率论具有极其广泛的应用. 随机试验是概率论的基本概念之一，随机试验所有可能结果组成的集合称为这个试验的样本空间，记为 Ω. Ω 中的元素 ω 称为样本点，Ω 中的子集 A 称为随机事件，样本空间 Ω 也称为必然事件，空集 $\varnothing$ 称为不可能事件.

定义 1.1　设 Ω 是一个集合，$\mathscr{F}$ 是 Ω 的某些子集组成的**集合族**(collection)(或称**集类**)，如果：

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$.

(2) 若 $A \in \mathscr{F}$，则 $\overline{A} = \Omega \backslash A \in \mathscr{F}$(取余集封闭).

(3) 若 $A_n \in \mathscr{F}(n=1,2\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$(可列并封闭). 则称 $\mathscr{F}$ 为 **σ-代数**(sigma-algebra)(**Borel 域或事件域**(field of events))，$(\Omega, \mathscr{F})$ 称为**可测空间**(measurable space).

由定义可以得到：

(4) $\varnothing \in \mathscr{F}$.

(5) 若 $A, B \in \mathscr{F}$，则 $A \backslash B \in \mathscr{F}$(取差集封闭).

(6) $A_n \in \mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$则 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i, \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i, \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$(有限交，有限并，可列交封闭).

定义 1.2 设$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间，$P(\cdot)$是定义在$\mathscr{F}$上的实值函数，如果：

(1) 任意 $A\in\mathscr{F}$，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$(非负性).

(2) $P(\Omega)=1$(正规性).

(3) 对两两互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots$（当 $i\neq j$ 时，$A_i\cap A_j=\varnothing$），有$P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$(可列可加性). 则称 P 是$(\Omega,\mathscr{F})$上的**概率**(probability)，$(\Omega,\mathscr{F},P)$称为**概率空间**(probability space)，$P(A)$为事件 A 的概率.

由定义知：

(4) $A,B\in\mathscr{F}$，$A\subset B$，则 $P(B\backslash A)=P(B)-P(A)$(可减性).

若 $A_n\subset A_{n+1}$，$n\geqslant 1$，事件列$\{A_n,n\geqslant 1\}$称为单调增列；若$A_n\supset A_{n+1}$，$n\geqslant 1$，称为单调减列.

显然，如果$\{A_n,n\geqslant 1\}$为单调增列，则 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$；如果 $\{A_n,n\geqslant 1\}$为单调减列，则 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(5)（概率的连续性）若$\{A_n,n\geqslant 1\}$是递增或递减的事件列，则

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(\lim_{n\to\infty}A_n)$$

定义 1.3 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间，$B\in\mathscr{F}$，且 $P(B)>0$，如果对任意 $A\in\mathscr{F}$，记

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

则称 $P(A|B)$为事件 B 发生条件下事件 A 发生的**条件概率**(conditional probability).

由条件概率的定义可得到：

(1) 乘法公式

设 $A,B\in\mathscr{F}$，则

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B)$$

一般地，若 $A_i\in\mathscr{F}(i=1,2,\cdots,n)$且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

(2) 全概率公式

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间，$A\in\mathscr{F}$，$B_i\in\mathscr{F}(i=1,2,\cdots,n)$，$B_iB_j=\varnothing\ (i\neq j)$，且$\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$，$P(B_i)>0$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$$

(3) Bayes 公式

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间，$A\in\mathscr{F}$，$B_i\in\mathscr{F}(=1,2,\cdots,n)$，$B_iB_j=\varnothing\ (i\neq j)$，且

$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega, P(B_i) > 0, P(A) > 0$,则

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)}$$

一般地,若 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{F}$,有 $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$,则称 $\mathscr{F}$ 为**独立事件族**.

1.2 随机变量及其分布

随机变量是概率论的主要研究对象之一,随机变量的统计规律用分布函数来描述.

定义 1.4 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为概率空间,$X = X(\omega)$是定义在 Ω 上的实值函数,如果对于任意实数 x,有 $X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega : X(\omega) \leqslant x\} \in \mathscr{F}$,则称 $X(\omega)$ 为 $\mathscr{F}$ 上的**随机变量**(random variable),简记为 r. v. X.

随机变量实质上是$(\Omega, \mathscr{F})$到$(R, \mathscr{B}(R))$上的可测映射(函数),记 $\sigma(X) = \{X^{-1}(B) \mid B \in \mathscr{B}(R)\} \subset \mathscr{F}$,称 $\sigma(X)$为随机变量 X 所生成的σ 域. 称

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leqslant x) = P\{\omega : X(\omega) \leqslant x\} \\ &= P(X \in (-\infty, x]) \\ &= P(X^{-1}((-\infty, x])) \end{aligned}$$

为随机变量 X 的**分布函数**(distribution function)(简记为 d. f.).

由定义,分布函数有如下性质:

(1) $F(x)$为不降函数:即当 $x_1 < x_2$ 时,有 $F(x_1) \leqslant F(x_2)$;

(2) $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

(3) $F(x)$是右连续的,即 $F(x+0) = F(x)$.

可以证明,定义在 $\mathbf{R}$ 上的实值函数 $F(x)$,若满足上述 3 个性质,必能作为某个概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上某个随机变量的分布函数.

推广到多维情形,类似可得到:

定义 1.5 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为概率空间,$X = X(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega))$是定义在 Ω 上的 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中取值的向量实值函数. 对于任意 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$,有$\{\omega : X_1(\omega) \leqslant x_1, X_2(\omega) \leqslant x_2, \cdots, x_n(\omega) \leqslant x_n\} \in \mathscr{F}$,则称 $X = X(\omega)$为 ***n* 维随机变量**,称

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &= P\{\omega : X_1(\omega) \leqslant x_1, X_2(\omega) \leqslant x_2, \cdots, X_n(\omega) \leqslant x_n\} \end{aligned}$$

为 $X=X(\omega)=(X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega))$ 的**联合分布函数**.

随机变量有两种类型:离散型随机变量和连续型随机变量,离散型随机变量的概率分布用概率分布列来描述:$p_k = P(X = x_k)\ (k = 1,2,\cdots)$,其分布函数为 $F(x) = \sum\limits_{x_k\leqslant x} p_k$;连续型随机变量的概率分布用概率密度函数 $f(x)$ 来描述,其分布函数为 $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

类似地,可定义 n 维随机变量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合分布列和联合分布函数如下:

对于离散型随机变量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,联合分布列为

$$P_{x_1x_2\cdots x_n} = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n)$$

其中 $x_i\in I_i$,I_i 为离散集,$i=1,2,\cdots,n$,X 的联合分布函数为

$$F(y_1,y_2,\cdots,y_n) = \sum_{x_i\leqslant y_i, i=1,2,\cdots,n} p_{x_1,\cdots,x_n}(y_1,y_2,\cdots,y_n) \in \mathbf{R}^n$$

对于连续型随机变量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,如果存在 $\mathbf{R}^n$ 上的非负函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,对于任意 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$,有 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合分布函数

$$F(y_1,y_2,\cdots,y_n) = \int_{-\infty}^{y_1}\int_{-\infty}^{y_2}\cdots\int_{-\infty}^{y_n} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 X 的联合密度函数.

1.3　数学期望及其性质

设 $X=X(\cdot)$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的 r. v. ,如果 $\int_\Omega |X|\mathrm{d}P<\infty$,就称 r. v. X 的**数学期望**(expectation)或**均值**存在(或称 r. v. X 是可积的),记为 EX,有下列定义:

$$EX = \int_\Omega X\mathrm{d}P$$

利用积分变换,也可写成 $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}F(x)$.

设 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的 Borel 可测函数,如果 r. v. $g(X)$ 的数学期望存在,即 $E|g(X)|<\infty$,由积分变换可知

$$Eg(X) = \int_\Omega g(X)\mathrm{d}P = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}F(x)$$

设 k 是正整数,若 r. v. X^k 的数学期望存在,就称它的 ***k* 阶原点矩**(k-th moment about the origin)，记为 α_k，即

$$\alpha_k = EX^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \mathrm{d}F(x)$$

设 **k 是正整数**，若 r. v. $|X|^k$ 的数学期望存在，就称它的 **k 阶绝对原点矩**（k-th absolute moment about the origin)，记为 β_k，即

$$\beta_k = E \mid X \mid^k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mid x \mid^k \mathrm{d}F(x)$$

类似地，X 的 **k 阶中心矩**（ k-th central moment) μ_k 和 **k 阶绝对中心矩**（k-th absolutely central moment) ν_k 分别定义为

$$\mu_k = E(X - EX)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \alpha_1)^k \mathrm{d}F(x)$$

$$\nu_k = E \mid X - EX \mid^k = \int_{-\infty}^{+\infty} \mid x - \alpha_1 \mid^k \mathrm{d}F(x)$$

我们称二阶中心矩为**方差**(variance)，记为 $\mathrm{Var}X$ 或 DX，显然有

$$\mathrm{Var}X = \mu_2 = \nu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

关于数学期望，容易验证下列的性质：

(1) 若 r. v. X，r. v. Y 的期望 EX 和 EY 存在，则对任意实数 $\alpha, \beta, E(\alpha X + \beta Y)$ 也存在，且 $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha EX + \beta EY$；

(2) 设 $A \in \mathscr{F}$，用 I_A 表示集 A 的示性函数，若 EX 存在，则 $E(XI_A)$ 也存在，且

$$E(XI_A) = \int_A X \mathrm{d}P$$

(3) 若 $\{A_k\}$ 是 Ω 的一个划分，即 $A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$，且 $\Omega = \bigcup_i A_i$，则

$$EX = \int_\Omega X \mathrm{d}P = \sum_i \int_{A_i} X \mathrm{d}P$$

关于矩的存在性，有如下的必要条件和充分条件：

定理 1.1 设对 r. v. X 存在 $p > 0$，使 $E|X|^p < \infty$，则有

$$\lim_{x \to \infty} x^p P(\mid X \mid \geqslant x) = 0$$

定理 1.2 设对 r. v. $X \geqslant 0$ (a. s.)，它的 d. f. 为 $F(x)$，那么 $EX < \infty$ 的充要条件是

$$\int_0^\infty (1 - F(x)) \mathrm{d}x < \infty$$

此时 $EX = \int_0^\infty (1 - F(x)) \mathrm{d}x$.

推论 1.1 $E|X| < \infty$ 的充要条件是 $\int_{-\infty}^0 F(x) \mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{+\infty} (1 - F(x)) \mathrm{d}x$ 均有限，这时有

$$EX = \int_0^\infty (1 - F(x)) \mathrm{d}x - \int_{-\infty}^0 F(x) \mathrm{d}x$$

推论 1.2 对于$0<p<\infty$，$E|X|^p<\infty$的充要条件是$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X|\geqslant n^{1/p})<\infty$，也等价于$\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-1}P(|X|\geqslant n)<\infty$.

1.4 特征函数和母函数

特征函数是研究随机变量分布又一个重要的工具，用特征函数求分布律比直接求分布律容易得多，而且特征函数有良好的分析性质.

定义 1.6 设 X 是 n 维随机变量（随机向量），分布函数为 $F(x)$，称 $F(x)$的 Fourier-Stieltjes 变换

$$g(t)=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX})=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}F(x),\quad -\infty<t<\infty$$

为 X 的**特征函数**(characteristic function)，简记 c. f.

从本质上看，特征函数是实变量 t 的复值函数，随机变量的特征函数一定是存在的.

当 X 是离散型随机变量，分布列 $P_k=P(X=x_k)$ $(k=1,2,\cdots)$，则

$$g(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx_k}p_k$$

当 X 是连续型随机变量，概率密度函数为 $f(x)$，则

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}f(x)\mathrm{d}x,\quad -\infty<t<\infty$$

从定义，我们能够看出特征函数有如下性质：

(1) $g(0)=1$；

(2) (有界性)$|g(t)|\leqslant 1$；

(3) (共轭对称性)$g(-t)=\overline{g(t)}$；

(4) (非负定性)对于任意正整数 n 及任意实数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 和复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$，有

$$\sum_{k,l=1}^{n}g(t_k-t_l)z_k\overline{z_l}\geqslant 0$$

(5) (连续性)$g(t)$为 $\mathbf{R}^n$ 上一致连续函数；

(6) 有限多个独立随机变量和的特征函数等于各自特征函数的乘积，即随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 的特征函数为

$$g(t)=g_1(t)g_2(t)\cdots g_n(t)$$

其中 $g_i(t)$为随机变量 X_i 的特征函数；

(7) (特征函数与矩的关系)若随机变量 X 的 n 阶矩 EX^n 存在,则 X 的特征函数 $g(t)$ 可微分 n 次,且当 $k\leqslant n$ 时,有 $g^{(k)}(0)=\mathrm{i}^k EX^k$;

(8) 随机变量的分布函数由其特征函数唯一确定.

定理 1.3 (Bocher 定理)$\mathbf{R}^n$ 上函数 $g(t)$ 是某个随机变量特征函数当且仅当 $g(t)$ 连续非负定且 $g(0)=1$.

定理 1.4 (逆转公式) 设 $F(x)$ 是随机变量 X 的分布函数,相应的特征函数为 $g(t)$,若 x_1,x_2 为 $F(x)$ 的连续点,则

$$F(x_2)-F(x_1)=\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_1}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_2}}{-\mathrm{i}t}g(t)\mathrm{d}t$$

很显然,具有相同特征函数的两个分布函数是恒等的. 由此还可推出一个事实:一个随机变量是对称的,当且仅当它的特征函数是实的. 事实上,由 X 的对称性知 X 和 $-X$ 有相同的分布函数,根据定义 $g(t)=E\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}=E\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tX}=g(-t)=\overline{g(t)}$,也就是说 $g(t)$ 是实的;反之,从 $g(t)=E\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}=\overline{g(t)}=g(-t)=E\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tX}$ 知 X 和 $-X$ 有相同的特征函数,因此,它们的分布函数相等,这说明 X 是对称的.

例 1.1 设 X 服从 $B(n,p)$,求 X 的特征函数 $g(t)$ 及 EX,EX^2,DX.

解 X 的分布列为 $P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}$ $(q=1-p,k=0,1,2,\cdots,n)$.

$$g(t)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}C_n^k p^k q^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^k q^{n-k}=(p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+q)^n$$

因此

$$EX=-\mathrm{i}g'(0)=-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+q)\,|_{t=0}=np$$

$$EX^2=(-\mathrm{i})^2g''(0)=(-\mathrm{i})^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+q)\,|_{t=0}=npq+n^2p^2$$

故

$$DX=EX^2-(EX)^2=npq$$

例 1.2 设 $X\sim N(0,1)$,求 X 的特征函数 $g(t)$.

解 $g(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx-x^2/2}\mathrm{d}x$

由于 $|\mathrm{i}x\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx-x^2/2}|=|x\mathrm{e}^{-x^2/2}|$,且 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|x|\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x<\infty$,可对上式两边求导,得

$$\begin{aligned}g'(t)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{i}x\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx-x^2/2}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}(-\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x^2/2})\\&=-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx-x^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty}-\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx-x^2/2}\mathrm{d}x=-tg(t)\end{aligned}$$

于是得到微分方程

$$g'(t)+tg(t)=0$$

这是变量可分离型方程，有

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{g(t)}=-t\mathrm{d}t$$

两边积分得 $\ln g(t)=-t^2/2+c$，得方程的通解为 $g(t)=\mathrm{e}^{-t^2/2+c}$. 由于 $g(0)=1$，因此，$c=0$. 于是 X 的特征函数为 $g(t)=\mathrm{e}^{-t^2/2}$.

例 1.3 设 X,Y 相互独立，$X\sim B(n,p)$，$Y\sim B(m,p)$，证明：$X+Y\sim(n+m,p)$.

证明 X,Y 的特征函数分别为

$$g_X(t)=(q+p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n,\quad g_Y(t)=(q+p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^m,\quad q=1-p$$

$X+Y$ 的特征函数为

$$g_{X+Y}(t)=g_X(t)g_Y(t)=(q+p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^{n+m},\quad q=1-p$$

即 $X+Y$ 的特征函数是服从参数为 $n+m,p$ 二项分布的特征函数，由唯一性定理

$$X+Y\sim(n+m,p)$$

附表一给出了常用分布的均值、方差和特征函数.

在研究只取非负整数值的随机变量时，以母函数代替特征函数比较方便.

定义 1.7 设随机变量 X 的分布列为 $p_k=P(X=k)\ (k=0,1,2,\cdots)$，其中 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}p_k=1$，称

$$P(s)=E(s^k)=\sum_{k=0}^{\infty}p_ks^k$$

为 X 的**母函数**（或称**概率生成函数**，probability generating function）.

母函数具有下列性质：

(1) 非负整数值随机变量的分布列由其母函数唯一确定；

(2) $P(1)=1$，$P(s)$ 在 $|s|\leqslant 1$ 绝对且一致收敛；

(3) 若随机变量 X 的 l 阶矩存在，则可以用母函数在 $s=1$ 的导数值来表示，特别地，有 $EX=P'(1)$，$EX^2=P''(1)+P'(1)$；

(4) 独立随机变量之和的母函数等于母函数的积.

证明 (1) $P(s)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}p_ks^k=\sum\limits_{k=0}^{n}p_ks^k+\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}p_ks^k,\quad n=0,1,2\cdots$

两边对 s 求 n 阶导数，得到

$$P^{(n)}(s)=n!p_n+\sum_{k=n+1}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-n+1)p_ks^{k-n}$$

令 $s=0$，则 $p^{(n)}(0)=n!p_n$，因此

$$p_n=\frac{p^{(n)}(0)}{n!},\quad n=0,1,\cdots$$

(3) 由 $P(s)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}p_ks^k$，得到 $P'(s)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}kp_ks^{k-1}$，令 $s\uparrow 1$，得到

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = P'(1)$$

类似可得到

$$EX^2 = P''(1) + P'(1)$$

例 1.4　从装有号码为 1,2,3,4,5,6 的小球的袋中,有放回地抽取 5 个球,求所得号码总和为 15 的概率.

解　令 X_i 为第 i 次取得的小球的号码,且 X_i 相互独立,$X=X_1+X_2+\cdots+X_5$ 为所取球号码的总和.

X_i 的母函数为

$$P_i(s) = \frac{1}{6}(s+s^2+\cdots+s^6)$$

X 的母函数为

$$p(s) = \frac{1}{6^5}(s+s^2+\cdots+s^6)^5 = \frac{s^5}{6^5}(1-s^6)^5(1-s)^{-5}$$

所求概率为 $P(s)$展开式的 s^{15} 的系数,因此,$P\{X=15\}=\frac{651}{6^5}$.

1.5　随机变量列的收敛性

定义 1.8　设$\{X,X_n;n\geqslant 1\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机变量,如果存在集 $A\in\mathscr{F}$,$P(A)=0$,当 $\omega\in A^c$ 时,有 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega)=X(\omega)$,则称 X_n **几乎处处收敛**(convergence almost everywhere)到 X,简称 X_n a. s. 收敛到 X,记为 $X_n\to X$ (a. s.).

下面我们给出 a. s. 收敛的一个判别准则.

定理 1.5　$X_n\to X$ (a. s.). 的充分必要条件是任一 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\bigcup_{m=n}^{\infty}(|X_m-X|\geqslant\varepsilon)\}=0$$

下面给出定理 1.3 的一个应用.

例 1.5　设$\{X_n\}$是 r. v. 列,且

$$P(X_n=n)=P(X_n=-n)=\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$P\left\{X_n=\frac{1}{n}\right\}=P\left\{X_n=-\frac{1}{n}\right\}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

对于给定的 $\varepsilon>0$,考虑 $n>\frac{1}{\varepsilon}$,有 $P\{\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}(|X_m|\geqslant\varepsilon)\}\leqslant\sum\limits_{m=n}^{\infty}\frac{1}{2^m}\to 0\ (n\to\infty)$,因此 $X_n\to 0$ (a. s.).