

微积分学

# 學 分 積 微



版權所有 翻印必究

著 者

W. A. GRANVILLE  
P. F. SMITH  
W. R. LONGLEY

譯 者  
出 版 者

周 夢 塵  
嚴 幼 芝

發 行 者

上海茂名北路三〇二號  
電話 三〇二七  
龍門聯合書局  
上海河南中路二一〇號  
電話 一七六七  
靜安寺支店  
上海愚園路二六一號  
電話 二六八六

分 售 處

龍門聯合書局各地分局  
北京分局 東安門大街82號  
北京南城支店 琉璃廠103號  
北京西城支店 西單福壽商場6號  
重慶分局 中山一路368號  
漢口分局 江漢一路3號  
瀋陽分局 太原街40號  
天津分局 羅斯福路308號  
西安分局 東大街281號  
南京經售處 太平路267號  
廣州經售處 永漢北路204號  
杭州分銷處 平海路102號  
長沙分銷處 府正街36號  
台灣分銷處 台北衡陽路12號

基本定價叁拾伍元正 外埠酌加郵運費

一九四八年十一月初版

一九五一年一月五版

# 弁 言

宇宙間的一切事物都在變動不居之中，而且“牽一髮而動全身”，沒有一件事情，一種東西是可以完全孤立，絲毫不受其他事物的影響，也影響於其他的事物的。因此，在研究牠們的時候，如欲獲得其全部的真相，那就不能把牠們孤立起來作為不變的靜的事物來處理了。十七世紀下期由牛頓，同時也由來布尼茲貢獻給世人的微積分學，在科學史上，所以能大放異彩，其故無他，也不過是因為牠能把數學研究的對象——一切量 (quantity) 都看作是變動不居 (varying) 而又并非孤立的來處理；也就是說，牠能把原是變動不居，互有關聯的事物仍當作變動不居，互有關聯的來處理，從而也就能把一切事物的本身及其關聯更逼真地表示出來罷了。牠自出世以來，在這二百多年中，日有進展，到現在已經成為研究學問的一種不可缺少的工具。牠不獨在物理，化學和工程科學中已經立下了牢不可拔的基礎，就是在生理學，心理學，乃至於在經濟學，樂學中也都已建立了牠的橋頭堡。

微積分學之被介紹到中國來，用中國的文字與中國人相見，或自傅列亞力與李善蘭合譯的“代微積拾級”始。那是在 1859 年出版的，距今已約九十年。其後到 1874 年又有傅蘭雅譯李善蘭的“微積溯源”，1888 年又有傅蘭雅譯的“微積須知”。入民國後，G. A. Osborne 的 *Integral Calculus* 以及他的 *Introduction to Calculus*; F. Kohlransch 的 *Differential und Integralrechnung*; 長澤龜之助的“微分積分學”等也都被翻譯了過來。初期所出諸書，內容如何詳現已不易得知，但在這科學日新月異的時代，我想要說牠們是落伍了，那是不應該有問題的。後來的幾本或失之於簡陋，或太偏於應用。而且，在數量上，種類也極其稀少。國人自編的更無僅有。我們雖可從他國文字所寫的书本得窺其真相，但文字隔閡究為一大障礙，因此，編著或者再翻譯幾本合適的微積分出版，實仍有其迫切的需要。筆者不敏，早在十數年前也就發下了這一宏願。因限於學力，不敢侈談編著，乃選取英文名數本，Gibson 的 *An Elementary Treatise on the Calculus*，利用當時工作的餘暇與蝴蝶山（廣西大學在梧州降代的校址）幽美的環境，從事焉。惟因時間有限，工作進行甚緩，其後又因從事廣西氣象事業的奠基工作，暇及此，再到抗戰軍中，由西南轉赴西北，日唯衣食是謀，要想把草稿整理一下成其全功，實非易事。至今仍認為一大憾事。去秋來龍門，在 Murray 的 *Introductory Course in Differential Equations* 譯稿寫成後，承嚴幼芝先生之命，用淺顯的文字來翻譯本書，可說正中書局的一本既然無法問世，能有這本來代譯不也一樣地可以為我了願嗎？戰於是就請於去年 8 月 11 日動手，到 10 月 18 日把牠譯完。心頭輕鬆之感，真是無確可言！原書著者，本出自曾任 Gettysburg 學院院長的 William Anthony Granville 一人，後經美國大學數學教授 Percey F. Smith 與 William Raymond Longley 為之增訂，其書聞名。原書自 1904 年 (?) 出版以來，銷行極廣；二十年來，中國各大學採印均非不是毫無理由的。據 Smith 與 Longley 在有一次增訂版的序

首屯說，使他能大獲成功的原因，那是由於原作有幾個特色：行文簡潔，例題多而又富於能使人獲得練習技巧與引人入勝的問題。筆者於細讀本書之後，除具有同感外，更覺牠不斷的增訂乃至於改編，使牠能不同步自封，追隨時代，這又何嘗不是牠始終暢銷的理由！據原書版權頁所載，自1904年 Smith 參與改訂以後，1911年復有所更新。嗣後，在1929, 1934, 1941諸年又歷有增刪，而參與其事者，除 Smith 外，又有了 Longley。現在筆者所根據的原本，就已經是牠的第六次改訂了的版本（1946年版）哩。

這一次的改訂，完全出自 Longley 之手。和以前各版比較起來，可以說面目全新。以往各次改訂，不過內容稍有增刪（如1941年版較1934年者刪去了 Integrator 與 Polar Planimeter 一章，而新加了“Hyperbolic Function”一章，同時又加了些關於經濟學的應用問題，以及新引用柱面坐標以推廣二重積分的應用）；這一版則大改編排，把微分學與積分學兩部分混合編制：除將1941版的第12章（積分法，標準基本型之積分規則）分為兩章，就是現在的第8章和第16章；把本來的第18章（形心，流體壓力及其他應用問題）刪去，而把這些材料歸併在“積分法為求和法”一章中外，各章的次序也大有出入；現在為便於持有1941版原本的讀者起見，特別一最近兩版對照表如下，以資參考：

1941版	1	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19-27章
1946版	1	6	12	13	7	14	15	8,16	9	10	11	17	18	—	19-27章

經過了這樣大的變更，所以連書名也都弄得由“Elements of the Differential and Integral Calculus”變而為“Elements of Calculus”了。

在逆行翻譯的時候，心中曾經訂立了幾個原則：

(1) 不刪節 嘗見有些譯者把不容易譯，自己譯不出來的地方，尤其是些子句與短語，往往捨而不譯，這有時還無傷大雅，但有些地方，即或是一字一語的省略，也可以使意義大有出入。所以筆者歷來的主張是有字必譯，當可譯錯。因為即使譯錯了，明眼人也還看得出來，指得出來，終有改正的一日；不譯，則弄得連明眼人甚至於也能遭受蒙蔽，忽略過去，使未看原文者永遠見不到真相。但也有例外之處：如數學書中所常有的“we find……”這種句子，為免喧嘩起見，這其中的“we”字，往往略而不譯；再如有些章節的標題，為簡明起見，也往往有所刪節。

(2) 句句對譯 這樣可使原作者的筆調大致尚得保存，同時對於願意對照原文閱讀 *структурских* 不無小補，所以除非照原文次序譯出，太西化了，不易讀懂，那才把整段的字句重新加 *опубликованные рефераты*，

(3) 語法力求中國化 翻譯的目的原在便於中國讀者的閱讀，若語法不盡中國化 *той по месту ра-* 者感覺困難，因此盡可能地求譯文語法的中國化。如微積分中常用的“differential *казанием о воз-* respect to……”一語，嘗見有人譯作“關於……微分……”，讀來總覺不甚適

“以……為準微分……”。但“……is a differential with respect to……” *1960 г.*

“……為關於……之微分”。

(4) 盡力保持原文說法 數學物理學中除專門名詞外，往往有些事情也 *14, тел. Д-7-60-24*

по адресу:

августа 1960 г.

6-25  
石

到這種情形，譯者未嘗不可照他的意思譯出來（所謂意譯），但還究與原文格調不合，所以我仍竭力地保持其原狀，在不違反語法力求中國化的原則下，直譯出來，而在不易明白的地方，再另加註釋，以助讀者了解。第415頁所說“uniquely determined”就是一例。這種特殊說法的直譯，我認爲是看其必要的，正和中國原來沒有的，有些專門名詞之必須介紹到“中文”的領域中來一樣。日子一久，牠也就自然而然地爲人們所了解，不再感覺格格不入了。

(5) 專門名詞盡量以部頒各種名詞爲準 這十幾年來教育部很頒佈過幾種經過了專家審查的名詞，如“數學名詞”，“物理學名詞”都已有了定本。這些“名詞”中的名詞是否完全譯得恰當，那是另一問題，但在未有改訂的版本以前，爲便於教者學者起見，我認爲仍以不易引起爐灶爲是。所以一向譯書都以牠們爲根據，只有在用來太不合適的地方，才偶一改動；在其中漏略了的地方（見書末所附英漢名詞對照表），才就常見者取用，或自行杜撰。

這友對說穿了，其實也不過“信”“達”兩字。究竟有沒有達到？牠們本身有無問題？那只有請高明的讀者來批判罷。

Granville, Smith 與 Longley 三氏的這本書，據譯者所知，前曾有王爾南，李士奇先後翻譯過，後來在抗戰期中，據聞成都某書店又曾出過一種譯本。王氏所譯和成都所刊的兩種，筆者都沒見過，想來都是根據1934前的版本譯的，與根據1946版翻譯的本書，大致不會衝突。李氏譯本出版於1936年，自然也是根據1934前的原版本譯的；譯筆如何，筆者因爲沒有對照原文，仔細讀過，不敢妄下批評，但在我翻譯新版遇有疑難，想去向他求教的時候，牠不是避過了過去，就是給我以不满意的，甚至於錯誤的答案。牠唯一給我的啓示，就是一個譯者的如何可以避重就輕，但這又是違反我的原則，不願領教的。

還有要聲明一下的，就是原書的索引，我沒有照有些時賢的妙法，仍依英文字母的次序排列。這忠實是忠實了，但不便於譯本的讀者何！譯本的索引當然應該依漢文的次序排，否則反不如沒有爲妙（有些譯本是略而不備的）。我的辦法是主要的名詞依筆劃多寡排列，筆劃相同的則依部首的次序排列。主要名詞下的細節則先排此主要名詞領前者，繼排其居中者，最後排其殿後者。這樣重排一過吃力是吃力的，但我們不能因爲要自己省力，而叫更多的讀者去吃力啊。

譯者學力有限，荒疏已久，加以時間倉卒，偶有疑難，亦不容放前人作寬宥之推諉；稿成後雖蒙范會國教授爲我校閱一遍，排好後於校對時雖又數度修改，但不妥之處，仍然在所難免；原書排印之誤，經我看岀改正的雖已不少，但未經發現的，或者還有，這些都希這教者學者於教學之時能對照原本爲我一指明，進而教之，使再版時能以訂正，幸甚感甚！嚴正的批評，我想任何譯者都是會樂於接受的，最怕的是遭受漠視。但在目前的情況下，一種科學教材的譯本要不受漠視，那才是例外。因此我願藉此機會對於漠視譯本一點，再說幾句，以就正於高明！

今日大學中頗有一種不太好的現象，那就是無論那一科總喜歡採用西文原著，對譯本則大多漠視。這我認爲是極不合理的。這實在是落後國家所特有的現象。中國除非不想長進，永遠甘於作次殖民地則已，否則這現狀總有一天打破的。一個獨立自主的國家能說自己沒有一套用

本國的文字寫出來，或者翻譯出來的大中學教科用書嗎？這我敢說是誰也不會給以否定的答覆的。那末今日之下，爲什麼會有譯本而不用，仍採用西文原著呢？我想來想去總想不出一個像樣子的答案來！我曾經聽人說，漢文的譯本往往反不如西文原本容易懂，所以不如直捷了當，仍讀原文。這據我看是不合事實的，譯文即使譯得深奧艱澀，我不相信揣摩起來會比揣摩外國語文還難。原本如果竟真地如此較譯本更易爲學者所領悟，那翻譯就不會被人認爲是雜事，吃力而難討好的事，一個從事翻譯的人也就用不着大傷腦筋，甚至於爲一字一句“踟躕竟夕”了。一個極有學養的專家，翻譯出來的東西有時還難免不出毛病，要說一位初學者讀起原文來竟較譯本容易理解，那真只有天曉得了。不過，這樣一說吧，又未免予人以可乘之機。有人說，譯本難免有誤，不如選讀原本，似乎就是由此出發的。但這一理由我認爲仍然立腳不住。第一，說這話的人，心中未免存了一個“原本至上”的心理，認爲原本絕對無誤。這又何嘗合乎事實。據聞朱公謹先生在譯 Courant 的名著 Differential-und Integral-Rechnung 的時候，就曾代他訂正了不少的錯誤，而且獲得了原作者的嘉許。我這庸俗的譯匠，在翻譯本書與 Murray 的 Differential Equations，以及前此翻譯 D. Brunt 的 Meteorology 的時候，也都爲牠們訂正了好些或大或小的錯誤。原本的這些錯誤，明智的讀者以往或已發現，但一經發現與指明，仍然照舊可以用來教學，并未因牠們的偶一有誤而竟棄之不顧。這同樣的態度，難道就不能拿來對待即或偶有錯誤的譯本嗎？其次說這話的人也未免沒有估計到這樣的一個問題，就是：——學者從錯誤的譯本上所受到的不良結果并不一定會比他因文字隔閡，誤解原文而獲致的惡果來得多呀。事實上，據筆者校閱他人譯作的經驗，譯本上譯錯的地方也往往就是原本上難解的地方。以初學去讀那些難解的地方也同樣地會誤解了原意的。何況譯本在這些地方因爲譯者多少對這一部門用過點功夫，并不一定把牠們譯錯。第三，再說吧，一個譯本即使錯誤很多，教者與學者也儘可以靈敏地指出牠錯誤的所在，讓譯者有機會在下一版出書的時候訂正。只要教者學者肯用，我相信一本流行的教本的再版、三版……，說得具體些，每學期或每學年一版，絕不是難遇的事；這一年用的雖是有錯誤的譯本，到第二年，第三年以後不就有了錯誤日少，甚或沒有錯誤，比原本更沒有錯誤的譯本了嗎？而且，如果有更高明者，對這譯本實在看不過去，也儘可另起爐灶，取而代之，務使每一流行教本有一種公認的譯本而後已。這樣不出三年五載，大學中普通課程需採原本不用譯本的這一不合理的現象不也就可以打破了嗎？筆者不敏，謬譯香禱之！

這本書總算由譯而排而校而印，以短短略近一年的功夫，不日可以和讀者見面了。譯者由此了卻一樁心願，這不能不說是足以快慰的事。但在這戰雲瀰漫，大學生連飯都吃不飽，出版業也正遭逢着惡運的時候，這微弱的幼芽能否獲得牠足夠的營養，那就難說了。然而，本文閉頭時不是說過嗎，一切的事物都在變動不居之中！目前也正是舊的已在蛻變，新的正在孳生；晨鷄三唱，黎明不遠，到了大家不愁飯吃，人人都有書讀，一切人都能爲建設新中國而努力，出版業重臨牠的春天的時候，我這微弱的幼嬰還怕牠不突然地健壯起來嗎？我因此又無限地興奮了。

## 原 序

在此改訂本中，本書內容之重行排列僅為一念所趨使，即意欲竭其可能儘早獻呈微分學與積分學二者各類主要應用問題之基礎概念。因此乃僅於展示代數函數各種微分與積分公式之後，隨即將此等應用問題立予提出。蓋如此庶可使學者於操縱之技術尚不繁難時，即易於聚精會神於其應用耳。惟相同之應用類型，另加若干他項問題，於其後研究三角函數，對數函數與指數函數時又復出現，良以此一重複實又有其特出之教育價值也。

此項重行排列之另一優點則呈現於學者之同時攻習物理與工程學程者之前，蓋於此等學程中，若早先熟諳積分學之中心概念，固大有裨益也。

本書之蒙廣泛採用已指明在其所含之內容中，可以無需作巨大之變更，故在正文及討論中，僅在少數處所之由經驗知其可能改進者有所更易。

若干問題均已更新，在每一處問題集中并曾致力改進其深淺程度。有一半以上之問題并已提供答案，而——特別在含有技巧訓練之情況中——此等答案通常每間一題即提出一次。

由於對現時本書內容敘列之豐富經驗，用敢堅信，教者必覺此改訂之本較以往各版大有進步也。

WILLIAM R. LONGLEY



GOTTFRIED WILHELM LEIBNITZ

來布尼茲



# 目 次

## 第一章 公式彙集

1. 初等代數學及幾何學中之公式	1
2. 平面三角學中之公式	2
3. 平面解析幾何學中之公式	3
4. 立體解析幾何學中之公式	5
5. 希臘字母	7

## 第二章 變數函數與極限

6. 變數與常數	8
7. 變數之區間	8
8. 連續變數	8
9. 函數	9
10. 自變數與因變數	9
11. 函數之記法	9
12. 禁用零除	10
13. 函數之脈; 連續性	11
14. 變數之極限	11
15. 函數之極限值	12
16. 極限定理	12
17. 連續函數與不連續函數	13
18. 無限 ( $\infty$ )	14
19. 無窮小	17
20. 關於無窮小與極限之定理	18

## 第三章 微分法

21. 引言	20
22. 增量	20
23. 增量之比較	21
24. 單變數函數之導數	22
25. 導數之記號	23

26. 可微分函數	24
27. 微分法之一般規則	24
28. 導數之幾何解釋	26

## 第四章 代數式微分規則

29. 一般規則之重要	29
30. 常數之微分法	30
31. 變數以其本身為準之微分法	30
32. 和之微分法	31
33. 常數與函數之積的微分法	31
34. 二函數之積的微分法	31
35. $n$ 個函數之積的微分法	32
36. 常指數函數之微分法, 乘冪規則	33
37. 商之微分法	33
38. 函數之函數之微分法	38
39. 反函數之微分法	39
40. 隱函數	40
41. 隱函數之微分法	41

## 第五章 導數之各種應用

42. 曲線之方向	43
43. 切線與法線之方程式, 次切距與次法距	44
44. 函數之極大值與極小值, 引言	47
45. 增函數與減函數, 檢定法	51
46. 函數之極大值與極小值, 定義	52
47. 檢定函數極大值與極小值之第一法, 作業規則	54
48. $f(x)$ 變為無限大而 $f(x)$ 為連續函數時之極大值與極小值	56
49. 極大值與極小值, 應用問題	58

50. 導數之作為變率	64
51. 直線運動中之速度	65
52. 相關變率	66

## 第六章 逐次微分法及其應用

53. 逐次導數之定義	72
54. 隱函數之逐次微分法	72
55. 曲線彎曲之方向	74
56. 檢定極大值與極小值之第二法	75
57. 拐點	78
58. 曲線畫法	80
59. 直線運動中之加速度	82

## 第七章 微分

60. 引言	85
61. 定義	85
62. 求函數微分之公式	86
63. 用微分求增量之近似值	88
64. 微小誤差	88
65. 直角坐標制中弧之微分	90
66. 微分之作為無窮小	92
67. 無窮小之階。高階微分	93

## 第八章 簡式積分法

68. 積分法	95
69. 積分常數。不定積分	96
70. 若干基本型之積分規則	97
71. 代換積分法	102

## 第九章 積分常數

72. 用原始條件確定積分常數	104
73. 積分常數之幾何意義	104
74. 積分常數之物理意義	107

## 第十章 定積分

75. 曲線下之面積的微分	112
---------------	-----

76. 定積分	112
77. 定積分之計算	114
78. 與變數改易對應之限的改易	114
79. 面積之計算	116
80. 積分之幾何表示法	117
81. 近似積分法。梯形規則	118
82. 辛普孫規則(拋物線規則)	119
83. 限之互換	122
84. 定積分之積分區間之分解	122
85. 定積分為其二限之函數	123
86. 廣義積分。無窮積分限	123
87. 廣義積分。於 $y = \phi(x)$ 為不連續時	123

## 第十一章 積分法為求和法

88. 引言	127
89. 積分學之基本定理	127
90. 平面曲線之面積; 直角坐標	129
91. 迴轉體之體積	133
92. 曲線之長	138
93. 平曲線之長; 直角坐標	139
94. 迴轉曲面之面積	141
95. 具有已知平行截面之立體	146
96. 面積矩; 形心	149
97. 迴轉體之形心	152
98. 流體壓力	154
99. 功	156
100. 函數之平均值	161

第十二章 超越函數微分法  
及其應用

101. 導數公式; 第二表	165
102. 數 $e$ 。自然對數	166
103. 指數函數與對數函數	168
104. 對數之微分法	168
105. 指數函數之微分法	170
106. 一般指數函數之微分法。乘冪規則之證明	170

107. 對數微分法	172	138. 曲率圓	220
108. 函數 $\sin a$	175	139. 曲率中心	223
109. 定理	175	140. 漸屈線	225
110. $\sin v$ 之微分法	176	141. 漸屈線之性質	228
111. 其他三角函數	177	142. 漸伸線及其機械作圖法	230
112. $\cos v$ 之微分法	178	143. 導數之變換	232
113. 公式 XV-XIX 之證明	178		
114. 備註	179	<b>第十五章 均值定理及其應用</b>	
115. 反三角函數	183	144. 洛爾定理	235
116. $\arcsin v$ 之微分法	184	145. 密切圓	236
117. $\arccos v$ 之微分法	185	146. 相鄰法線之極限交點	237
118. $\arctan v$ 之微分法	185	147. 均值定理(均值定律)	238
119. $\operatorname{arccot} v$ 之微分法	186	148. 積分學基本定理之解析證明	240
120. $\operatorname{arcsec} v$ 與 $\operatorname{arccsc} v$ 之微分法	186	149. 不定型	241
121. $\operatorname{arcvers} v$ 之微分法	188	150. 不定型函數之計值	242
<b>第十三章 參數方程式極標 方程式與根</b>		151. 不定型 $\frac{0}{0}$ 之計值	242
122. 曲線之參數方程式, 斜率	195	152. 不定型 $\frac{\infty}{\infty}$ 之計值	245
123. 參數方程式, 第二階導數	199	153. 不定型 $0 \cdot \infty$ 之計值	245
124. 曲線運動, 速度	200	154. 不定型 $\infty - \infty$ 之計值	246
125. 曲線運動, 分加速度	201	155. 不定型 $0^0, 1^\infty, \infty^0$ 之計值	247
126. 極坐標, 向徑與切線間之角	203	156. 均值推廣定理	249
127. 極坐標制中弧之微分	207	157. 極大與極小之解析討論	249
128. 方程式之實根, 圖示法	208	<b>第十六章 標準基本型之 積分法及其應用</b>	
129. 確定實根位置之第二法	210	158. 標準基本型之積分規則	253
130. 牛頓法	212	159. (5)之證明	254
<b>第十四章 曲率, 曲率半徑 與曲率圓</b>		160. (6)與(7)之證明	257
131. 曲率	216	161. (8)-(17)之證明	258
132. 圓之曲率	216	162. (18)-(21)之證明	261
133. 曲率公式; 直角坐標	217	163. (22)與(23)之證明	268
134. 參數方程式之特殊公式	218	164. 三角微分	270
135. 曲率公式; 極坐標	219	165. 含 $\sqrt{a^2 - u^2}$ 或 $\sqrt{u^2 \pm a^2}$ 之式用 三角代換之積分法	277
136. 曲率半徑	219	166. 分部積分法	279
137. 鐵路曲線或漸曲線	220	167. 結論	283
		168. 平曲線之面積; 極坐標	285

169. 所與曲線方程式爲參數型時之面積 287  
 170. 平曲線之長(極坐標) 288

### 第十七章 各種形式積分法

171. 引言 299  
 172. 有理分數積分法 299  
 173. 新變數代換之積分法(有理化) 306  
 174. 二項微分 309  
 175. 二項微分有理化之條件 312  
 176. 三角微分之變換 312  
 177. 雜類代換 315

### 第十八章 簡化公式。積分表 之應用

178. 引言 317  
 179. 二項微分之簡化公式 317  
 180. 三角微分之簡化公式 322  
 181. 積分表之應用 325

### 第十九章 級數

182. 定義 329  
 183. 幾何級數 330  
 184. 收斂級數與發散級數 332  
 185. 一般定理 332  
 186. 比較檢驗法 334  
 187. 柯希比檢法 337  
 188. 交錯級數 338  
 189. 絕對收斂性 339  
 190. 概要 339  
 191. 冪級數 341  
 192. 二項級數 345  
 193. 冪級數之另一型 346

### 第二十章 函數之展開

194. 馬克勞林級數 348  
 195. 無窮級數之運算 353

196. 冪級數之微分法與積分法 357  
 197. 由馬克勞林級數推得之近似公式 359  
 198. 台勞級數 361  
 199. 台勞級數之另一型 363  
 200. 由台勞級數推得之近似公式 364

### 第二十一章 常微分方程式

201. 微分方程式——階與次 367  
 202. 微分方程式之解。積分常數 368  
 203. 微分方程式之解的核驗 369  
 204. 一階與一次之微分方程式 370  
 205. 高階微分方程式之二特型 379  
 206. 常係數二階線性微分方程式 382  
 207. 應用。複利定律 391  
 208. 在力學問題方面之應用 394  
 209. 常係數  $n$  階線性微分方程式 399

### 第二十二章 雙曲線函數

210. 雙曲線正弦與餘弦 406  
 211. 其他雙曲線函數 407  
 212. 雙曲線正弦餘弦及正切之數值表 407  
 213.  $e+x$  之雙曲線函數 409  
 214. 導數 411  
 215. 與等軸雙曲線之關係 412  
 216. 反雙曲線函數 415  
 217. 導數(續) 417  
 218. 電報線路 420  
 219. 積分 421  
 220. 積分(續) 424  
 221. 顯德曼函數 427  
 222. 麥卡托地圖 430  
 223. 三角函數與雙曲線函數之關係 432

### 第二十三章 偏微分法

224. 多變數之函數。連續性 436  
 225. 偏導數 437  
 226. 偏導數之幾何解釋 438

227. 全微分	440		
228. 全增量之近似值. 微小誤差	443		
229. 全導數. 變率	446		
230. 變數之收易	448		
231. 隱函數之微分法	450		
232. 高階導數	453		
<b>第二十四章 偏導數之應用</b>			
233. 曲線之包絡	457		
234. 一已知曲線之漸屈線即其法線之包絡	460		
235. 斜曲線之切線與法面	462		
236. 斜曲線之弧長	464		
237. 曲面之法線與切面	466		
238. 全微分之幾何解釋	468		
239. 斜曲線之切線與法面方程式之另一型	471		
240. 均値定律	473		
241. 多變數函數之極大與極小	474		
242. 關於二個或二個以上變數之函數的台勞定理	479		
		<b>第二十五章 多重積分</b>	
		243. 面積分法與逐次積分法	482
		244. 二重定積分. 幾何解釋	483
		245. 在一區域下上所取之二重定積分之值	488
		246. 平面面積爲一二重定積分. 直角坐標	489
		247. 一曲面下之體積	492
		248. 建立二重積分之南針	494
		249. 面積矩與形心	494
		250. 巴布斯定理	495
		251. 流體壓力之中心	497
		252. 面積之轉動慣量	499
		253. 極轉動慣量	501
		254. 極坐標. 平面面積	503
		255. 應用極坐標之問題	505
		256. 曲面面積之一般求法	507
		257. 由三重積分法求得之體積	512
		258. 用柱面坐標求體積	514
第二十六章 各種曲線	520		
第二十七章 積分表	527		
索引	541		
英漢數學名詞對照表	547		

# 微積分學

## 第一章 公式彙集

1. 初等代數學及幾何學中之公式。為便利學者起見，吾人特於第1-4節中提出以下數種公式一覽表。現先由代數學中者開始。

(1) 二次方程式。  $Ax^2 + Bx + C = 0$ 。

[解法] 1. 因子分解法：分解  $Ax^2 + Bx + C$  為二因子，使二因子各等於零，再就之解之。

2. 配方法：將  $C$  移項，以  $x^2$  之係數除全式，再於兩端各加  $x$  係數之一半的平方，並求其平方根。

3. 用公式：

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

[根之性質] 公式中根號下  $B^2 - 4AC$  一式稱為判別式。兩根之為實數而不相等，或為實數而相等，或為虛數，依此判別式之為正，為零，或為負而定。

(2) 對數。

$$\log ab = \log a + \log b. \quad \log a^n = n \log a. \quad \log 1 = 0.$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b. \quad \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a. \quad \log_a a = 1.$$

(3) 二項定理 ( $n$  為正整數)。

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} a^{n-3}b^3 + \dots \\ + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)}{r-1} a^{n-r+1}b^{r-1} + \dots$$

(4) 階乘數。  $n! = \underline{n} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1)n$ 。

在下列初等幾何學公式中， $r$  或  $R$  指半徑， $a$  指高度， $B$  指底面積，而  $s$  指斜高。

(5) 圓。 圓周  $= 2\pi r$ ， 面積  $= \pi r^2$ 。

(6) 扇形。 面積  $= \frac{1}{2} r^2 \alpha$ ， 此處之  $\alpha$  = 扇形之圓心角， 以徑 (radian) 計之。

(7) 棱柱。 體積  $= Bu$ 。

(8) 棱錐。 體積  $= \frac{1}{3} Bu$ 。

(9) 直立圓柱。 體積  $= \pi r^2 a$ 。 側面積  $= 2\pi r a$ 。 全面積  $= 2\pi r(r+a)$ 。

(10) 直立圓錐。 體積  $= \frac{1}{3} \pi r^2 a$ 。 側面積  $= \pi r s$ 。 全面積  $= \pi r(r+s)$ 。

(11) 球。 體積  $= \frac{4}{3} \pi r^3$ 。 球面  $= 4\pi r^2$ 。

(12) 直立圓錐墩。 體積  $= \frac{1}{3} \pi a(R^2 + r^2 + Rr)$ 。 側面積  $= \pi s(R+r)$ 。

2. 平面三角學中之公式。 下列諸公式中， 大部分均頗有用。

(1) 角之度量。 角之大小， 其量度有二種通用之法； 亦即， 有兩種單位角之謂也。

[度量法] 其單位角為一全周之  $\frac{1}{360}$ ， 稱為一度。

[徑量法] 其單位角乃一所對弧與該弧半徑相等之角， 稱為一徑。

此二單位角間之關係可得之於方程式

$$180 \text{ 度} = \pi \text{ 徑} (\pi = 3.14159\dots),$$

解之， 得

$$1 \text{ 度} = \frac{\pi}{180} = 0.0174\dots \text{ 徑}；$$

$$1 \text{ 徑} = \frac{180}{\pi} = 57.29\dots \text{ 度}。$$

由上述定義， 復得

$$\text{一角之徑數} = \frac{\text{所對弧}}{\text{半徑}}。$$

此數方程式使吾人能由某一度量換為另一度量。

(2) 關係式。

$$\text{ctn } x = \frac{1}{\tan x}； \sec x = \frac{1}{\cos x}； \csc x = \frac{1}{\sin x}。$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}； \text{ctn } x = \frac{\cos x}{\sin x}。$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1； 1 + \tan^2 x = \sec^2 x； 1 + \text{ctn}^2 x = \csc^2 x。$$

(3) 化角公式.

角	正弦	餘弦	正切	餘切	正割	餘割
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$\sec x$	$-\csc x$
$90^\circ - x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cot x$	$\tan x$	$\csc x$	$\sec x$
$90^\circ + x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$	$-\csc x$	$\sec x$
$180^\circ - x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$-\sec x$	$\csc x$
$180^\circ + x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$-\sec x$	$-\csc x$
$270^\circ - x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cot x$	$\tan x$	$-\csc x$	$-\sec x$
$270^\circ + x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$	$\csc x$	$-\sec x$
$360^\circ - x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$\sec x$	$-\csc x$

(4)  $(x+y)$  及  $(x-y)$  之函數.

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$$

(5)  $2x$  及  $\frac{1}{2}x$  之函數.

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x; \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \quad \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}; \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}; \quad \tan \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}.$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x; \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

(6) 加法定理.

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y).$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{1}{2}(x+y) \sin \frac{1}{2}(x-y).$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y).$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{1}{2}(x+y) \sin \frac{1}{2}(x-y).$$

(7) 任意三角形之關係.

[正弦定律] 
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

[餘弦定律] 
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

[面積公式] 
$$K = \frac{1}{2} bc \sin A.$$

$$K = \frac{\frac{1}{2} a^2 \sin B \sin C}{\sin(B+C)}.$$

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{此處 } s = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

3. 平面解析幾何學中之公式. 以下列出者乃較爲重要之公式.



(1) 二點  $P_1(x_1, y_1)$  及  $P_2(x_2, y_2)$  間之距離.

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

[ $P_1P_2$  之斜率]

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

[中點]

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

(2) 二直線間之角.

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

(如二線平行, 則  $m_1 = m_2$ ; 如二線垂直, 則  $m_1 m_2 = -1$ .)

(3) 直線之方程式.

[點斜式]

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

[斜截式]

$$y = mx + b.$$

[兩點式]

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

[截距式]

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

(4) 由直線  $Ax + By + C = 0$  至  $P_1(x_1, y_1)$  之垂直距離.

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}.$$

(5) 直角坐標與極坐標間之關係.

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

(6) 圓之方程式.

[圓心  $(h, k)$ ]

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

(7) 拋物線之方程式.

[頂點在原點]

$$y^2 = 2px, \quad \text{焦點} \left(\frac{1}{2}p, 0\right).$$

$$x^2 = 2py, \quad \text{焦點} \left(0, \frac{1}{2}p\right).$$

[頂點  $(h, k)$ ]

$$(y - k)^2 = 2p(x - h), \quad \text{軸為 } y = k.$$

$$(x - h)^2 = 2p(y - k), \quad \text{軸為 } x = h.$$

[軸為  $y$ -軸者]

$$y = Ax^2 + C.$$

(8) 其他曲線之方程式.

[中心在原點而焦點在  $x$ -軸上之橢圓. ( $a > b$ )]

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$