GEOMETRY TREASURE

500 FAMOUS QUESTIONS AND 1000 THEOREMS IN PLANE GEOMETRY

几何瑰宝

平面几何500名题暨1000条定理

（下）

沈文选 杨清桃 编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

GEOMETRY TREASURE

500 FAMOUS QUESTIONS AND 1000 THEOREMS IN PLANE GEOMETRY

几何瑰宝

平面几何500名题暨1000条定理（下）

沈文选 杨清桃 编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书共有三角形、几何变换，三角形、圆，四边形、圆，多边形、圆，以及最值，作图，轨迹，完全四边形，平面闭折线，圆的推广十个专题，对平面几何中的500余颗璀璨夺目的珍珠进行了系统地、全方位地介绍，其中也包括了近年来我国广大初等几何研究者的丰硕成果.

本书中的1 000余条定理可以广阔地拓展读者的视野，极大地丰厚读者的几何知识，可以多途径地引领数学爱好者进行平面几何学的奇异旅游，欣赏平面几何中的精巧、深刻、迷人、有趣的历史名题及最新成果.

该书适合于广大数学爱好者及初、高中数学竞赛选手，初、高中数学教师和数学奥林匹克教练员使用，也可作为高等师范院校数学专业开设“竞赛数学”，“中学几何研究”等课程的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

几何瑰宝：平面几何500名题暨1000条定理.下/沈文选，杨清桃编著.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2010.7

ISBN 978-7-5603-3012-9

Ⅰ.①几… Ⅱ.①沈…②杨… Ⅲ.①平面几何-习题②平面几何-定理(数学) Ⅳ.①O123.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第078575号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 唐 蕾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16 印张73.25 字数1 315千字
版 次 2010年7月第1版 2010年7月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3012-9
印 数 1~3 000册
定 价 138.00元(上，下)

目　录

三、四边形、圆　/1

✻ 简单四边形面积的贝利契纳德公式　/1

✻ 平面四边形的面积公式　/3

✻ 凸四边形的面积公式　/6

✻ 圆内接四边形的面积问题　/9

✻ 凸四边形顶点处的有关点、线问题　/11

✻ 凸四边形分割图形面积关系式　/12

✻ 凸四边形的正弦、余弦、射影定理　/17

✻ 非圆内接平面四边形的类正弦、余弦、射影定理　/18

✻ 凸四边形的类Ⅰ型余弦、正弦定理　/20

✻ 凸四边形的类Ⅱ型余弦定理　/21

✻ 对角线垂直的凸四边形的八点圆定理　/23

✻ 对角线垂直的平面四边形的八点圆定理　/24

✻ 对角线垂直的凸四边形垂足等角共轭点定理　/24

✲ 凸四边形中的等角共轭点问题 /25
✲ 平面四边形对角线垂直的一个充要条件 /27
✲ 四点勾股差的性质定理 /28
✲ 平面四边形各边的中点问题 /28
✲ 空间四边形余弦定理 /29
✲ 简单四边形的余弦定理 /30
✲ 平行四边形的余形定理 /32
✲ 凸四边形为平行四边形的两个充要条件 /33
✲ 平行四边形为矩形的一个充要条件 /34
✲ 简单四边形重心性质定理 /35
✲ 简单四边形重心坐标公式 /37
✲ 平面四边形的欧拉定理 /39
✲ 平面四边形的热尔岗定理 /40
✲ 梯形的施坦纳定理 /41
✲ 梯形的中线长公式 /42
✲ 梯形的中位线定理 /42
✲ 梯形中位线定理的推广 /43
✲ 梯形的重心定理 /45
✲ 筝形蝴蝶定理 /46
✲ 四边形蝴蝶定理 /47
✲ 四边形蝴蝶定理的推广 /48
✲ 四边形蝴蝶定理的演变 /50
✲ 四边形坎迪定理 /50
✲ 四边形坎迪定理的推广 /53
✲ 凸四边形四顶点组成的三角形问题 /56
✲ 简单四边形四顶点组成的三角形重心四边形定理 /57
✲ 凸四边形四顶点组成的三角形的内(旁)心四边形定理 /59
✲ 西姆森定理 /61

※ 西姆森线的性质定理 /62
※ 共线点的萨蒙定理 /72
※ 西姆森定理的推广 /72
※ 清宫定理 /75
※ 卡诺定理 /76
※ 奥倍尔定理 /77
※ 奥倍尔定理的一个推广 /77
※ 托勒密定理 /79
※ 托勒密不等式与托勒密定理的逆定理 /82
※ 托勒密定理的推广 /83
※ 凯西定理(一) /87
※ 勾股定理的拓广 /88
※ 凸四边形为圆内接四边形的几个充要条件 /90
※ 萨蒙圆问题 /91
※ 圆内接四边形的边与对角线关系定理 /92
※ 蝴蝶定理 /96
※ 直线对上的蝴蝶定理 /102
※ 坎迪定理 /103
※ 蝴蝶定理、坎迪定理的推广 /103
※ 圆内接四边形的余弦定理 /110
※ 圆内接四边形的垂心定理 /111
※ 婆罗摩笈多定理 /113
※ 婆罗摩笈多定理的推广 /115
※ 对角线互相垂直的圆内接四边形问题 /118
※ 调和四边形问题 /124
※ 圆内接四边形的相关四边形定理 /131
※ 圆内接四边形的富尔曼定理 /137
※ 卡塔朗定理 /138

✻ 形心圆 /139
✻ 四边形内接于圆与其三角形切圆半径相关的定理 /140
✻ 圆内接四边形的特殊点与圆上一点的定值问题 /143
✻ 折四边形问题 /148
✻ 圆外切简单四边形问题 /149
✻ 与外切于圆的凸四边形的边平行的直线问题 /152
✻ 牛顿定理 /153
✻ 富斯定理 /158
✻ 双圆四边形问题 /162
✻ 盐窖形定理 /172
✻ 阿波罗尼斯圆定理 /173
✻ 阿氏圆的性质定理 /173
✻ 鞋匠皮刀形问题 /175
✻ 两圆的麦比乌斯定理 /177
✻ 雅可比定理 /177
✻ 约翰逊定理 /178
✻ 帕斯卡定理 /178
✻ 布利安香定理 /181
✻ 三角形的密克尔点定理 /183
✻ 五点圆问题 /184
✻ 六点圆问题 /185
✻ 七点圆问题 /191
✻ 八点圆问题 /193
✻ 三角形的杜洛斯－凡利圆 /195
✻ 杜洛斯－凡利圆的推广 /198
✻ 三角形的第一莱莫恩圆 /199
✻ 三角形的第二莱莫恩圆 /200
✻ 三角形的图克圆 /200

✱ 图克圆系问题 /201
✱ 三角形的余弦圆问题 /202
✱ 三角形的三乘比圆问题 /203
✱ 三角形的重圆 /205
✱ 哈格六点圆定理 /205
✱ 哈格七点圆定理 /206
✱ 三角形的泰勒圆 /207
✱ 三角形的富尔曼圆 /209
✱ 三角形的曼海姆定理 /210
✱ 三角形的极圆问题 /211
✱ 逆相似圆问题 /212
✱ 布罗卡尔几何的推广问题 /213
✱ 正三角形问题 /214
✱ 爱可尔斯定理 /216
✱ 爱可尔斯定理的推广 /217
✱ 三圆的相似轴问题 /220
✱ 圆心共线的三圆问题 /220
✱ 三圆相切中的平行线问题 /221
✱ 圆内的切圆问题 /224
✱ 相切八圆问题 /225
✱ 施坦纳链问题 /226
✱ 凯西定理(二) /228
✱ 圆链问题 /230
✱ 克利福德链定理 /231
✱ 相离两圆中的矩形问题 /243
✱ 日本神庙塔壁上的铭刻圆问题 /244
✱ 古镂钱定理 /245
✱ 四点形中的九点圆共点定理 /246

✲ 多圆共点问题 /247

四、多边形、圆 /253

✲ 平行六边形定理 /253

✲ 中心对称凸六边形定理 /256

✲ 菱六边形问题 /257

✲ 戴维斯定理 /261

✲ 空间 n 边形余弦定理 /261

✲ 凸 n 边形的重心定理 /263

✲ n 边形中的莱布尼兹定理 /265

✲ 凸 n 边形中 $(n-1)$ 边形的重心 n 边形定理 /266

✲ 凸多边形中的布罗卡尔点(角)问题 /267

✲ 凸 n 边形特殊线段共点定理 /268

✲ 等角双斜线 n 边形定理 /276

✲ 两全等的等角 $2n$ 边形定理 /279

✲ 圆内接凸 n 边形中的定值问题 /282

✲ 正 n 边形中的定值问题 /283

✲ 圆内接凸 n 边形中的定点问题 /284

✲ 凸 n 边形与其切点 n 边形的面积问题 /286

✲ 圆的内接、外切凸 $n(n\geqslant4)$ 边形问题 /288

五、最值 /290

✲ 光反射定理 /290

✲ 光反射定理的推广 /291

✲ 阿尔哈森弹子问题 /293

✲ 法格纳诺问题(一) /295

✲ 圆内接四边形的周长最小的内接四边形 /297

✲ 费马最小时间原理 /298

✲ “胡不归”问题 /299

✲ 三角形中的极值点问题 /300

✻ 法格纳诺问题(二) /301
✻ 华生问题 /303
✻ 正多边形上距离和最大的点 /304
✻ 圆内接四边形边上距离和最大的点 /306
✻ 平面多边形边上的极限点 /308
✻ 三角形内接正方形的边长最值问题 /311
✻ 三角形的外接正三角形面积最大值问题 /313
✻ 三角形外接正方形的边长最值问题 /315
✻ 三角形的广义内接正方形问题 /317
✻ 定角内的三角形面积最小问题 /318
✻ 锐角扇形内的面积最大的正方形问题 /319
✻ 一类矩形面积的最大值问题 /322
✻ 平面等周定理 /324
六、作图 /327
✻ 黄金分割 /327
✻ 黄金分割的几何作法 /329
✻ 黄金几何图形 /333
✻ 三等分任意角是尺规作图不能问题 /340
✻ 可以用尺规三等分的角的问题 /341
✻ 有刻度直尺法三等分角 /342
✻ 圆积曲线法三等分角 /342
✻ 阿基米德螺线法三等分角 /343
✻ 蚌线法三等分角 /344
✻ 双曲线法三等分角 /344
✻ 蚶线法三等分角 /345
✻ 三等分曲线法三等分角 /346
✻ “战斧”法三等分角 /346
✻ 无限等分逼近三等分角 /347

※ 化圆为方是尺规作图不能问题 /347
※ 圆积曲线法化圆为方 /347
※ 阿基米德螺线法化圆为方 /348
※ 圆柱侧面法化圆为方 /348
※ 三角形法化圆为方 /349
※ 印度鸯那教人化方为圆 /349
※ 立方倍积是尺规作图不能问题 /350
※ 双比例中项法立方倍积 /350
※ 滑动长方形板法立方倍积 /351
※ 蚌线法立方倍积 /351
※ 蔓叶线法立方倍积 /353
※ 圆和双曲线法立方倍积 /354
※ 圆和抛物线法立方倍积 /354
※ 等分三角形面积的直线 /355
※ 等分平面四边形面积的直线 /356
※ 同时平分四边形的周长和面积的直线 /357
※ 作过圆外一点平分圆周的直线 /359
※ 三角形内二等圆问题 /359
※ 阿波罗尼斯比例截线问题 /361
※ 简单四边形重心的几何作法 /362
※ 梯形重心的几何作法 /363
※ 三角形共轭重心的格雷贝作图法 /365
※ 四型费马点的作法 /366
※ 卡芬克尔作图问题 /370
※ 等分圆周问题 /371
※ 五等分圆的画法 /372
※ 已知一边作正五边形问题 /373
※ 十等分圆的画法 /374

✲ 七等分圆周是尺规作图不能问题 /375
✲ 阿基米德和他的《正七边形作法》 /376
✲ 圆内接正七边形的作图 /377
✲ 正十七边形作图问题 /377
✲ 正 n 边形近似作图法 /381
✲ 任意三角形的内接正三角形的作图 /382
✲ 直角三角形的外接正三角形的作图 /384
✲ 三角形外接正方形的作图 /385
✲ 三角形内接正方形的作法 /386
✲ 凸四边形的外接正方形的作法 /387
✲ 三角形正则点的尺规作图 /387
✲ 帕普斯问题 /389
✲ 作三内角等于已知角的三角形 /390
✲ 费马作图问题 /390
✲ 作三边均过一已知点的圆内接三角形 /392
✲ 已知三条高作三角形 /393
✲ 已知两边中点及垂心作三角形 /394
✲ 已知一边的高、中线及其余两边的差作三角形 /394
✲ 已知底边及底角平分线作等腰三角形 /395
✲ 已知四边长作圆内接凸四边形 /396
✲ 过各边中点作五边形 /396
✲ 作与已知三圆相切的圆 /397
✲ 作三角形内与两边相切且两两外切的三圆 /399
✲ 作与已知三圆均正交的圆 /401
✲ 作三角形内与两边相切且交于一点的三圆 /401
✲ 马歇罗尼圆规问题 /402
✲ 只用直尺作图问题 /404
✲ 分割三角形等周问题 /407

✲ 分割三角形等积问题 /408
✲ 分割三角形面积成比例问题 /409
✲ 三角形的等腰三角形分割定理 /410
✲ 三角形的锐角三角形剖分问题 /413
✲ 正方形的锐角三角形剖分问题 /416
✲ 正方形的勾股剖分问题 /417

七、轨迹 /421

✲ 到定点与定直线的距离比为定值的点的轨迹 /421
✲ 到定点与定直线的距离差为定值的点的轨迹 /421
✲ 阿波罗尼斯圆 /423
✲ 定和幂圆 /424
✲ 定差幂线 /424
✲ 牛顿轨迹问题 /425
✲ 根轴问题 /426
✲ 共轴圆 /429
✲ 凯西的幂的定理 /433
✲ 三角形高线垂足的射影点共轴圆定理 /433
✲ 塞列特轨迹问题 /435
✲ 波塞里亚反演器原理 /435
✲ 卡塔朗轨迹问题 /436
✲ 外接于定三角形的正三角形重心的轨迹 /437
✲ 三角形的纽堡圆 /437
✲ 三角形的舒特圆共轴圆组问题 /439
✲ 平面轨迹的面积条件呈现问题 /440

八、完全四边形 /445

✲ 完全四边形的牛顿线定理 /445
✲ 完全四边形对角线调和分割定理 /450
✲ 完全四边形对角线调和分割定理的推广 /452

✻ 完全四边形的密克尔点定理 /454
✻ 密克尔圆定理 /454
✻ 完全四边形的蝴蝶定理 /456
✻ 完全四边形的施坦纳圆与共轴线定理 /457
✻ 完全四边形的张角定理 /458
✻ 完全四边形相等边定理 /460
✻ 完全四边形凸四边形内接于圆定理 /462
✻ 完全四边形折四边形内接于圆定理 /466
✻ 完全四边形凸四边形内切圆定理 /467
✻ 完全四边形折四边形旁切圆定理 /470
✻ 完全四边形的其他性质定理 /470
✻ 完全四角形问题 /478
✻ 马克劳林定理 /482
九、平面闭折线 /483
✻ 平面闭折线的射影、正弦、余弦定理 /483
✻ 平面闭折线中的塞瓦定理 /486
✻ 平面闭折线的中线定理 /487
✻ 平面闭折线的拉格朗日公式 /490
✻ 平面闭折线的莱布尼兹公式 /491
✻ 平面闭折线中的布罗卡尔点问题 /492
✻ 圆外切闭折线的斯俾克圆定理 /493
✻ 平面闭折线中的 k 号心定理 /495
✻ 平面闭折线 k 号心与原点的距离公式 /504
✻ 平面闭折线 k 号心与顶点的距离公式 /507
✻ 平面闭折线与 k 号心相关的共点线定理 /510
✻ 平面闭折线与 k 号心相关的多点共圆定理 /514
✻ 平面闭折线与 k 号心相关的多线切圆定理 /518
✻ 圆内接闭折线的 k 级中线长公式 /521

✲ 平面闭折线的九点圆定理 /525
✲ 平面闭折线的杜洛斯－凡利圆定理 /527
✲ 圆内接闭折线的垂心(1号心)定理 /530
✲ 圆外切闭折线的 k 号界心定理 /547
✲ 圆外切闭折线的 k 号界圆定理 /558
十、圆的推广 /562
✲ 圆锥曲线的蝴蝶定理 /562
✲ 圆锥曲线幂定理 /567
✲ 圆锥曲线调和分割割线段定理 /569
✲ 圆锥曲线切线视角定理 /573
✲ 圆锥曲线切线与中点的问题 /574
✲ 圆锥曲线非直径弦的一些性质 /580
✲ 圆锥曲线的费马分割问题 /583
✲ 圆锥曲线中的卡诺定理 /585
编后语 /591

三、四边形、圆

❖简单四边形面积的贝利契纳德公式

将凸四边形和凹四边形统称为简单四边形.

贝利契纳德公式 若简单四边形的四边长为 a,b,c,d,两对角线长为 e,f,则该四边形的面积为

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{4e^2f^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}$$

此公式由贝利契纳德(Bretschneide,1808—1878)于1842年提出,它是秦九韶的三斜求积公式的推广.若在上述公式中令 $d=0,e=c,f=a$,则得到三角形面积公式

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\sqrt{c^2a^2-(\frac{c^2+a^2-b^2}{2})^2}$$

证法1 如图3.1,简单四边形 $ABCD$ 中,记 $AB=a,BC=b,CD=c$,$DA=d,AC=e,BD=f$.作 $CF\perp BD$ 于 F,$AE\perp BD$ 于 E,作 $CP\parallel BD$ 交 AE 或其延长线于 P,则

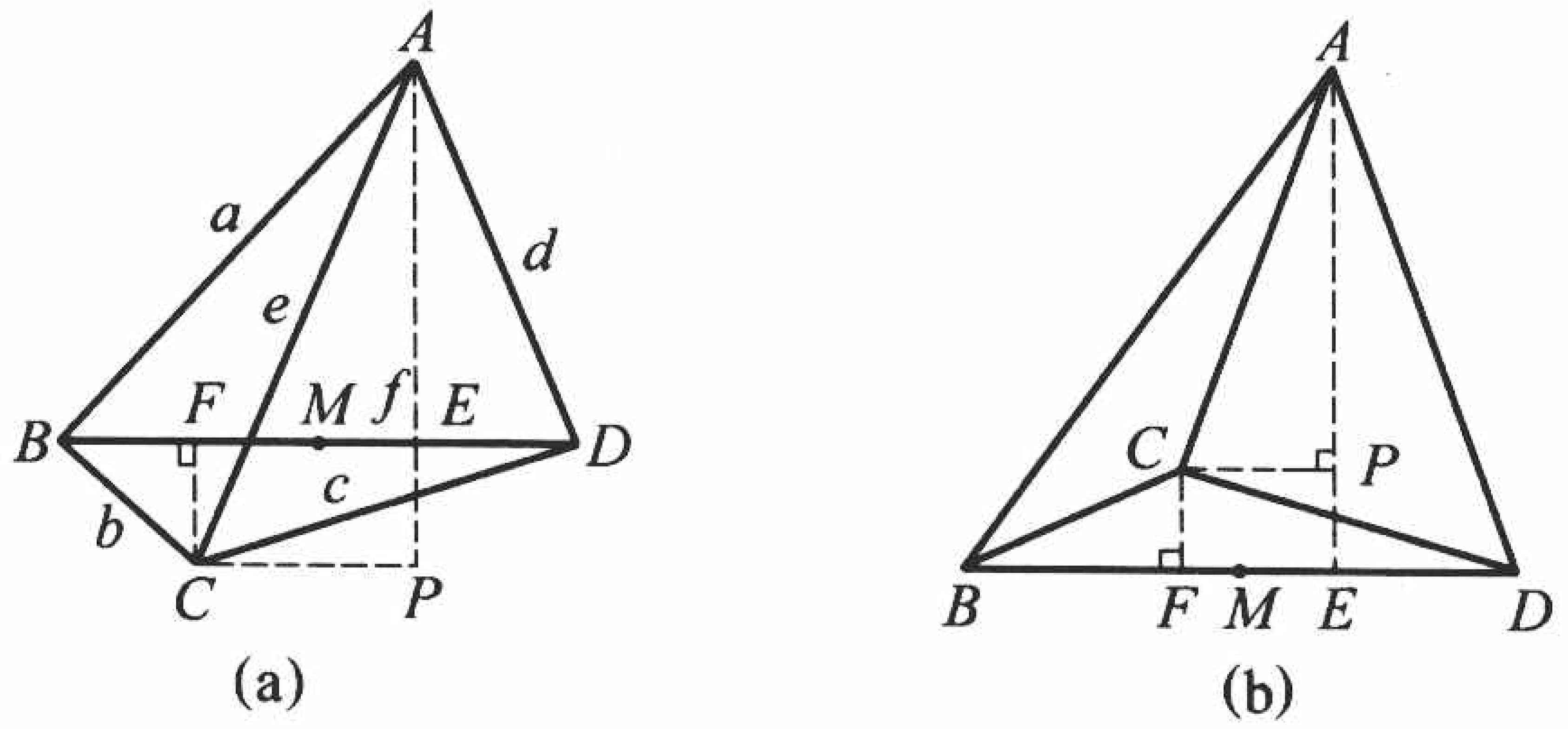

图3.1

$$S_{ABCD}=S_{\triangle ABD}\pm S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BD(AE\pm CF)=$$

$$\frac{1}{2}BD\cdot AP=\frac{1}{2}fAP \quad ①$$

设 M 是 BD 的中点,则

$$a^2-d^2=AB^2-AD^2=(AB^2-AE^2)-(AD^2-AE^2)=\overrightarrow{BE}^2-\overrightarrow{DE}^2=$$
$$(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED})(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{ED})=$$

$$\overrightarrow{BD}(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{EM}-\overrightarrow{MD})=$$
$$\overrightarrow{BD}\cdot 2\overrightarrow{ME}$$

即
$$a^2-d^2=2\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{ME} \quad ②$$

$$b^2-c^2=BC^2-CD^2=\overrightarrow{BF}^2-\overrightarrow{FD}^2=$$
$$(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FD})(\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{FD})=$$
$$\overrightarrow{BD}(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MF}-\overrightarrow{FM}-\overrightarrow{FD})=$$
$$2\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{MF}$$

即
$$b^2-c^2=2\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{MF} \quad ③$$

② - ③ 得
$$a^2-b^2+c^2-d^2=2\overrightarrow{BD}(\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{MF})=2\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{FE}$$

即
$$a^2-b^2+c^2-d^2=2\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{FE} \quad ④$$

则
$$4e^2f^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2=4e^2f^2-4(\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{FE})^2=$$
$$4f^2(e^2-\overrightarrow{FE}^2)$$

又 $e^2-FE^2=AP^2$,则
$$4e^2f^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2=4f^2\cdot AP^2 \quad ⑤$$

比较式 ① 与 ⑤,知
$$16S^2=4f^2\cdot AP^2=4e^2f^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2$$

故
$$S=\frac{1}{4}\sqrt{4e^2f^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}$$

证法 2 如图 3.1,简单四边形 $ABCD$ 中,记 $AB=a,BC=b,CD=c,DA=d,AC=e,BD=f$,两对角线 AC 与 BD 所夹的锐角为 α,则由三角形面积公式有

$$S=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle CDA}=\frac{1}{2}ef\cdot\sin\alpha$$

又设 AC,BD 所在直线交于点 P,令 $AP=e_1,PC=e_2,DP=f_1,PB=f_2$,不妨令 $\angle APB=\alpha$,则由三角形的余弦定理,有

$$a^2=e_1^2+f_2^2-2e_1f_2\cdot\cos\alpha$$
$$b^2=f_2^2+e_2^2-2e_2f_2\cdot\cos(180^\circ-\alpha)=f_2^2+e_2^2+2e_2f_2\cdot\cos\alpha$$
$$c^2=e_2^2+f_1^2-2e_2f_1\cdot\cos\alpha$$
$$d^2=e_1^2+f_1^2+2e_1f_1\cdot\cos\alpha$$

于是
$$a^2+c^2-b^2-d^2=2(e_1f_2+e_2f_1+e_2f_2+e_1f_1)\cdot\cos\alpha=2ef\cdot\cos\alpha$$

若 $\angle APB=180^\circ-\alpha$,则
$$a^2+c^2-b^2-d^2=-2ef\cdot\cos\alpha$$