



张文忠 但冰如 编
成都科技大学出版社



概率统计中的 反例



概率统计中的反例

张文忠 但冰如 编

成都科技大学出版社

内 容 简 介

这是为大专院校学习“概率论与数理统计”课的学生编写的一种辅助读物，以帮助他们加深对该课程的有关概念和结论的理解，激发他们积极思维和避免一些常犯易犯的错误。同时，它也能供讲授这门课的老师参考，为寻找反例提供方便。

本书选入了有关“概率论与数理统计”基本内容的300多个反例，每个反例前都简明写出了相应的正确结论，并注明它的一个出处，以便读者对照所列书刊查找其证明，对所列的反例都作了较详细的讲述。本书资料涉及面广，有很多反例都不是可以信手拈来的，有这样一卷反例在手，对授课的老师和学习该课程的同学都将是十分有益的。

概率统计中的反例

张文忠 但冰如 编

成都科技大学出版社出版发行

四川省新华书店经销

成都科技大学印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 印张：8.6875

1991年1月第1版 1991年1月第1次印刷

印数：1—2800 字数：188千字

ISBN 7-5616-0590-0/O.49

定价：3.50元

前 言

这是为学习“概率论与数理统计”课的人编写的一本辅助读物，我们把它献给爱好数学的广大青年朋友，献给讲授概率统计课的老师們。

我们知道，要断定一个命题正确，必须经过严密的推证，而要否定一个命题，却只要能举出一个与结论矛盾的例子就行。这种与命题相矛盾的例子称为反例。

数学中的反例，既是简明有力的否定方法，又是加深对概念和定理的理解的重要手段，它还有助于发现问题、活跃思维、避免常犯易犯的错误。反例的重要性正如美国数学家 B. R. 盖尔鲍姆和 J. M. H. 奥姆斯特德所说*：“冒着过于简单化的风险，我们可以说（撇开定义、陈述以及艰苦的工作不谈）数学由两大类——证明和反例组成，而数学发现也是朝着这两个目标——提出证明和构造反例”。

反例也是数学中人们悉心追求的美感之一。正如上面两位数学家所说：“一个数学问题用一个反例子以解决，给人的刺激犹如一出好的戏剧，为数学作出的许多最优雅和艺术性很强的贡献属于这个流派”。

这本书精选了概率统计中的 300 多个反例（有时一个标题下包含着正反两个方面的反例）。编写时我们尽力紧扣一般院校概率统计课教学大纲的要求，力求写得清楚明瞭，以

* 见参考文献(25)的前言，下句同此。

使具备微积分知识而学习概率统计课的人能顺利地阅读它。对于所需基础知识较深（如用到测度论或涉及较多的统计理论）的反例没有选入，因为本书是为初学者编写的。如果参看时对某些条目的内容不熟悉，可跳过不看而不至影响后面的阅读。为便于读者查找反例的来源和相对的定理的证明，通常都注明了所摘自的书刊和页码。书中所涉及的重要概念和国外数学家的原名都在第一次出现的条目中注明，后面用到时不再重述。

本书编写中参阅了较多的概率统计方面的书籍，有好些反例都不是可以信手拈来的，即使是一些看来简单的反例（反例一当举出，常常使人觉得很简单）。若只看标题要读者试着构造一个反例时，仍然是对自己数学思维能力的一次检验。

我们想，有这样一卷反例在手，对于学习《概率论与数理统计》的广大青年朋友将是有益的，它也可作老师们讲授这门课程的参考。同时，对于数学爱好者来说，也能从其中一些出奇制胜的反例中获得一种思维的乐趣和美的享受。

限于编者知识浅薄，不妥之处敬请识者惠予指正。

编 者

1989年于邛海之滨

目 录

第一章 事件与概率

符号	1
1. 用事件的运算关系表示事件的方法不一定唯一	1
2. 若 $A-B=C$, 不一定有 $A=C \cup B$	2
3. 若 $A=B \cup C$, 不一定有 $A-B=C$	3
4. $A \cup (B-C) = (A \cup B) - C$ 不一定成立	3
5. $(A \cup B) - B = A$ 不一定成立	4
6. $A - (B-C) = (A-B) \cup C$ 不一定成立	5
7. $\bigcap_{k=1}^n A_k - \bigcap_{k=1}^n B_k = \bigcap_{k=1}^n (A_k - B_k)$ 不一定成立	5
8. 若 A, B, C 满足 $ABC = \phi$, 它们不一定两两互不相容	5
9. 若 A, B 互不相容, 它们不一定相互对立	6
10. 若 $AB = \phi$ 且 $BC = \phi$, 不一定 $CA = \phi$	6
11. 对一个随机试验, 样本空间的取法不一定唯一	7
12. 样本点不一定是事件	8
13. 样本空间不一定是离散的	9
14. 有限样本空间中的样本点不一定等概	9
15. 同一个随机试验, 所属的概型不一定唯一	10
16. 不同的抽样方式其概率不一定不相同	11
17. 概率为零的事件不一定是不可能事件	13
18. 概率为1的事件不一定是必然事件	14
19. 若 $P(A) = P(B)$, 不一定 $A=B$	14
20. 若 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, A, B 不一定互不相容	15
21. 若 $P(AB) = 0$, 不一定 A, B 互不相容	16
22. 若 $P(A) + P(B) = 1$, A, B 不一定互为对立	16

事件.....	16
23. 若 $P(A) \leq P(B)$, 不一定有 $A \subset B$	17
24. 对任意的事件 A, B , 不一定有 $P(A-B) = P(A) - P(B)$	18
25. 对任意的事件 A, B , 不一定有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	18
26. 对“等可能性”的理解不同, 得的概率不一定相同.....	19
27. 当 $ABC = \phi$ 时, 不一定有 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$	21

第二章 条件概率与事件的独立性

符号.....	23
1. $P(A B)$ 与 $P(A)$ 不一定有大小关系.....	23
2. $P(AB)$ 与 $P(A)P(B)$ 不一定有大小关系.....	24
3. 若 $P(AB C) = P(A \bar{C})P(B C)$, 事件 A, B 不一定独立.....	24
4. 若 A, B 独立, 不一定有 $P(AB C) = P(A C) \cdot P(B C)$	26
5. 若 $P(A B) = 0$, 不一定 $A = \phi$	27
6. 若 $P(A B) = 1$, 不一定 $A = \Omega$	28
7. 若 $P(A C) = P(B C)$, 不一定 $A = B$	29
8. 若 $AB \neq \phi$, $P(A \cup B C) = P(A C) + P(B C)$ 不一定成立.....	30
9. 若 $P(AB C) = 0$, A, B 不一定互不相容.....	32
10. 若 $P(A C) + P(B C) = 1$, A, B 不一定互为对立事件.....	32
11. 若 $P(A C) \leq P(B C)$, 不一定有 $A \subset B$	32
12. $P(A C) + P(A \bar{C}) = 1$ 不一定成立.....	33
13. 若 $P(AB) = P(A)P(B)$, 不一定有 $P(B A) = P(B)$	34

14. 两个事件在不同的样本空间中独立性不一定相同..... 34
15. 凭直觉不一定能判定事件的独立性..... 35
16. $P(A|C) + P(\bar{A}|\bar{C}) = 1$ 并非恒不成立..... 36
17. 若 A, B 不相容, 不一定不独立..... 37
18. A 与其自身 A 不一定不独立..... 38
19. $P(ABC) = P(A)P(A|B)P(AB|C)$ 不一定成立..... 38
20. A 与 B 独立, B 与 C 独立, C 与 A 不一定独立... 39
21. A 与 B 独立, $C \subset A, D \subset B$, C 与 D 不一定独立 40
22. A, B, C 两两独立不一定相互独立..... 41
23. 若 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$, A, B, C 不一定两两独立..... 42
24. 若 A 分别与 B_1, B_2 独立, $B_1 B_2 \neq \phi$, A 与 $B_1 \cup B_2$ 不一定独立..... 44
25. 若 A, B, C 两两独立, AB 与 C 不一定独立... 45
26. 小概率事件在多次重复试验时不一定不会发生..... 47
27. 按混合抽取与按全概率公式计算的结果不一定相同..... 47
28. 若 $P(AB) \geq P(A)P(B)$ 且 $P(BC) \geq P(B) \cdot P(C)$, 不一定 $P(AC) \geq P(A)P(C)$ 49
29. 若 $P(AB) \leq P(A)P(B)$ 且 $P(BC) \leq P(B) \cdot P(C)$, 不一定 $P(AC) \leq P(A)P(C)$ 50
30. A, B, C 两两正相依, 总体不一定正相依... 51
31. A, B, C 两两负相依, 总体不一定负相依... 52

第三章 随机变量及其分布

- 符号..... 55
1. 不同定义的概率函数, 其性质不一定相同... 55

2.	单调不减的函数不一定是分布函数	58
3.	分布函数不一定是离散型的或连续型的	59
4.	非离散型又非连续型的分布函数不一定为混合型	61
5.	若某随机变量 ξ 的分布函数为连续函数, ξ 不一定是连续型随机变量	64
6.	几个分布函数的线性组合不一定是分布函数	65
7.	若 $k_1+k_2=1$, 分布函数 $F_1(x)$ 、 $F_2(x)$ 的线性组合 $k_1F_1(x)+k_2F_2(x)$ 不一定是分布函数	66
8.	分布函数的线性组合的分布类型不一定与原来的分布类型相同	67
9.	连续型随机变量的密度函数不一定是连续函数	68
10.	对指定的 (Ω, \mathcal{F}, P) 和 $F(x)$, 不一定有定义在 (Ω, \mathcal{F}, P) 上以 $F(x)$ 为其分布函数的随机变量 ξ	69
11.	离散型分布的最可能值不一定唯一	70
12.	不对等的随机变量其分布函数不一定不同	71
13.	若 ξ, η 同分布, 不一定 $\xi-\eta=0$	72
14.	若 ξ, η 服从同一分布, $\xi+\eta$ 与 2ξ 的分布不一定相同	73
15.	三个给定的随机变量不一定能定义在同一个概率空间上	74
16.	具有无记忆性的分布不是唯一的	75
17.	满足二维分布前三条性质的 $F(x, y)$ 不一定满足相容性	76
18.	边际分布相同时, 联合分布不一定相同	78
19.	边际分布与联合分布的分布类型不一定相同	80
20.	在不同的区域内, 边际分布的类型不一定相同	81

21. 若 ξ, η 都服从一维正态分布, (ξ, η) 不一定服从二维正态分布..... 82
22. 有相同的边际分布的联合分布的个数不一定有限..... 84
23. 随机变量 (ξ, η) 不一定是离散型或连续型的... 86
24. 不对等的多维随机变量其联合分布函数不一定不同..... 86
25. n 维随机变量 (ξ_1, \dots, ξ_n) 的分量按从小到大重新排列后其分布不一定与原分布相同..... 87
26. 若 (ξ, η) 的联合分布函数 $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续, ξ 和 η 的边际分布函数 $F_\xi(x)$ 和 $F_\eta(y)$ 在点 x_0 和 y_0 不一定连续..... 89
27. 连续型随机变量的函数不一定是连续型随机变量..... 90
28. 若连续型随机变量 ξ 的函数 $\eta=f(\xi)$ 也是连续型随机变量, 函数 $y=f(x)$ 不一定严格单调..... 92
29. 随机变量 ξ 与其函数 $\eta=f(\xi)$ 的分布类型不一定相同..... 93
30. 由一个一维密度函数不一定不能构造出一个二维密度函数..... 95
31. 若 ξ 与 η 独立且同分布, 其函数 $\zeta=f(\xi, \eta)$ 不一定与它们同分布..... 96
32. 随机变量 ξ 与 η 的不同函数的分布不一定不相同..... 98
33. 若 ξ_1, ξ_2 的联合分布函数 $F(x_1, x_2)$ 在一切点上连续, 其函数 $\eta_1=\xi_1+\xi_2, \eta_2=\xi_1-\xi_2$ 的联合分布函数 $G(y_1, y_2)$ 不一定在一切点上连续..... 100
34. 随机变量的函数的分布不一定与原来的参数有关..... 100
35. 条件概率分布与无条件概率分布的类型不

一定相同	101
36. 若 ξ 与 η 同分布, $\xi-\eta$ 不一定是对称的随机变量	103
37. 若 ξ, η 的联合分布关于自变量 x, y 不对称, $\xi-\eta$ 不一定不是对称的随机变量	105
38. 对称的随机变量并非都是对称化过程的结果	106

第四章 随机变量的独立性与相关性

符号	107
1. ξ_1, \dots, ξ_n 两两独立不一定相互独立	107
2. ξ, η 不相互独立, 其函数 $f(\xi), g(\xi)$ 不一定不相互独立	110
3. 若 ξ, η 的分布相同, 它们不一定独立	112
4. 若 (ξ, η) 的联合密度函数 $p(x, y)$ 可分解为 $g(x)h(y)$, ξ 与 η 不一定相互独立	114
5. 若 ξ_1, ξ_2 独立, 其函数 $\eta_1=f_1(\xi_1, \xi_2)$ 与 $\eta_2=f_2(\xi_1, \xi_2)$ 不一定独立	115
6. 若 ξ_1, ξ_2 独立, 其函数 $\eta_1=f_1(\xi_1, \xi_2)$ 与 $\eta_2=f_2(\xi_1, \xi_2)$ 不一定不独立	116
7. ξ 与 ζ 有函数关系不一定不独立	117
8. 若 $\xi=(\xi_1, \xi_2)$ 与 $\eta=(\eta_1, \eta_2)$ 独立, ξ_1 与 ξ_2 或 η_1 与 η_2 不一定独立	118
9. 若 ξ 与 η_1 独立, ξ 与 η_2 也独立, ξ 与随机向量 (η_1, η_2) 不一定独立	119
10. 若 ξ 与 η 不相关, ξ 与 η 不一定独立	121
11. ξ 与它的函数不一定相关	123
12. 不知道 (ξ, η) 的联合分布, 不一定不能确定 ξ, η 的相关性和独立性	125
13. 若 ξ_1 与 ξ_2 不独立, 其函数 $\eta_1=f_1(\xi_1, \xi_2)$ 与 $\eta_2=f_2(\xi_1, \xi_2)$ 不一定不独立	126

⑧

第五章 随机变量的数字特征

符号.....	128
1. 随机变量不一定存在数学期望	128
2. 随机变量不一定存在方差	130
3. 数学期望存在不一定方差存在	131
4. $E\xi^r$ 存在不一定 $E\xi^{r+1}$ 存在	132
5. 若 $E\xi$ 不存在, $E\xi^a (a < 1)$ 不一定不存在	133
6. 若 $D\xi = 0$, ξ 不一定恒取常值 c	133
7. 若 $E(\xi\eta) = E\xi E\eta$, ξ 与 η 不一定独立	134
8. 若 $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$, ξ 与 η 不一定独立	135
9. $E\xi^2$ 与 $(E\xi)^2$ 不一定不相等	136
10. $E\xi$ 及 $D\xi$ 不能确定 ξ 的分布	136
11. 由各阶矩不能确定 ξ 的分布	137
12. $E(g(\xi))$ 与 $g(E\xi)$ 不一定相等	138
13. 若 $E(\eta \xi) = E(\eta)$, ξ 与 η 不一定独立	139
14. 若 ξ 和 η 不相关, 不一定 $E(\eta \xi) = E\eta$	140
15. ξ 、 η 的不同函数的数学期望或方差不一定不同	141
16. $Eg(\xi) = E\{E[g(\xi) \eta]\}$ 不一定成立	142
17. 若 $D(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = D\xi_1 + D\xi_2 + D\xi_3$, ξ_1 、 ξ_2 、 ξ_3 不一定两两不相关	142
18. 若 ξ_1, ξ_2, ξ_3 两两不相关, 不一定有 $E(\xi_1\xi_2\xi_3)$ $= E\xi_1 E\xi_2 E\xi_3$	143
19. 若 $E(\xi_1\xi_2\xi_3) = E\xi_1 E\xi_2 E\xi_3$, ξ_1 、 ξ_2 、 ξ_3 不 一定两两不相关	144
20. 若 $D(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = D\xi_1 + D\xi_2 + D\xi_3$, 不 一定有 $E(\xi_1\xi_2\xi_3) = E\xi_1 E\xi_2 E\xi_3$	145
21. 若 $E(\xi_1\xi_2\xi_3) = E\xi_1 E\xi_2 E\xi_3$, 不一定有 $D(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = D\xi_1 + D\xi_2 + D\xi_3$	145

第六章 特征函数

符号	147
1. 并非任一函数 $\varphi(t)$ 都能作为某个随机变量 ξ 的特征函数	147
2. 在有限区间内特征函数的值不足以唯一决定分布函数	149
3. 若 $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_{\xi}(t)\varphi_{\eta}(t)$, ξ 与 η 不一定独立	151
4. 若 ξ 的特征函数在 $t=0$ 处有导数 $\varphi'_{\xi}(0)$, $E\xi$ 不一定存在	154
5. 特征函数的极限不一定是特征函数	156
6. ξ 与 $\eta = \xi + b$ 的 k 阶半不变量并非总相等	157
7. ξ 的矩母函数不一定存在	158

第七章 极限定理

符号	160
1. 分布函数的极限不一定是分布函数	160
2. 分布函数列不一定弱收敛于分布函数	162
3. 若 $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, 不一定对一切 x 有 $F_n(x) \rightarrow F(x)$	163
4. 若 $F_n(x) \xrightarrow{w} F(x)$, 不一定有 $\xi_n \xrightarrow{P} \xi \quad n \rightarrow \infty$	164
5. 弱收敛的极限函数不一定唯一	165
6. 依分布收敛不一定依概率收敛	166
7. 依概率收敛不一定几乎处处收敛	168
8. 依概率收敛的序列不一定收敛	169
9. 依概率收敛不一定 r 阶收敛	170
10. 几乎处处收敛不一定 r 阶收敛	172
11. r 阶收敛不一定几乎处处收敛	172
12. 若 $r > s$, s 阶收敛不一定 r 阶收敛	173
13. 依概率收敛其数学期望不一定收敛	175

14. 依概率收敛其矩不一定收敛..... 175
15. 若 $\{\xi_n\}$ 依概率收敛于 ξ 且 $E\xi_n$ 收敛于 $E\xi$, 不一定 $E|\xi_n - \xi|$ 收敛于0..... 176
16. 若 $n^h P(|\xi| > n) \rightarrow 0$, 不一定有 $E|\xi|^h < \infty$ 177
17. 矩母函数的极限不一定是一个矩母函数..... 178
18. 若 $\{\xi_n\}$ 依分布收敛于 ξ , 其矩母函数 $M_n(t)$ 不一定收敛于 ξ 的矩母函数 $M(t)$ 179
19. 切贝谢夫不等式不一定不能取等号..... 180
20. 相互独立的随机变量序列不一定服从切贝谢夫大数定律..... 181
21. 独立同分布的随机变量序列不一定满足辛钦大数定律的条件..... 182
22. 若随机变量序列服从辛钦大数定律, 它不一定服从马尔科夫大数定律..... 182
23. 马尔科夫条件成立时, 切贝谢夫大数定律不一定成立..... 183
24. 马尔科夫条件并非大数定律成立的必要条件..... 184
25. 不满足马尔科夫条件不一定不服从强大数定律..... 185
26. 若 ξ_1, ξ_2, \dots 相互独立且 $D\xi_n = \sigma_n^2 (n \geq 1)$, $\{\xi_n\}$ 不一定服从强大数定律..... 186
27. 波雷尔-坎特拉引理(1)的逆命题不成立..... 187
28. 若 ξ_1, ξ_2, \dots 不满足两两不相关, $\{\xi_n\}$ 不一定不服从大数定律..... 188
29. 若 ξ_1, ξ_2, \dots 不服从大数定律, 其函数序列 $\{\eta_n\}$ 不一定不服从大数定律..... 189
30. 若 $\{\xi_n\}$ 服从大数定律, 它不一定服从强大数定律..... 190
31. 独立随机变量序列 $\{\xi_n\}$ 若具有有限的方差, 它不一定服从中心极限定理..... 191
32. 若 $\{\xi_n\}$ 不满足林德伯格条件, 它不一定不服从

中心极限定理	193
33. 若 $\{\xi_k\}$ 不满足费勒条件, 它不一定不服从中心极限定理	194
34. 若 $\{\xi_k\}$ 服从大数定律, 它不一定服从中心极限定理	196
35. 若 $\{\xi_k\}$ 服从中心极限定理, 它不一定服从大数定律	197
36. $\{\xi_k\}$ 不一定服从中心极限定理或大数定律中的一个	199

第八章 数理统计的基本概念

符号	200
1. 子样的函数不一定是统计量	200
2. 统计量的分布不一定不依赖于未知参数	201
3. 子样均值 $\bar{\xi}$ 的分布与母体 ξ 的分布不一定不同	201
4. $\bar{\xi}$ 的分布不一定随着子样容量 n 的增大而更加集中	203
5. $\bar{\xi}$ 的分布与母体 ξ 的分布不一定属于同一类型的分布	203
6. 由同一个子样所构成的两个统计量不一定不独立	205
7. 次序统计量之间不一定相互独立	206
8. 次序统计量的函数不一定不独立	207
9. 中位数不一定唯一	210
10. 若 $E\xi$ 不存在, ξ 的中位数不一定不存在	211
11. 次序统计量的分布类型不一定与母体 ξ 不同	212
12. 统计量的分布不一定是渐近正态分布的	212
13. 统计量不一定是充分统计量	214
14. 参数的充分统计量不一定唯一	215

第九章 参数估计

符号	217
1. 参数的无偏估计不一定唯一	217
2. 参数不一定对任何子样都存在无偏估计	219
3. 若参数 θ 的无偏估计是 $\hat{\theta}$, 其函数 $f(\theta)$ 的无偏估计(假定存在)不一定是 $f(\hat{\theta})$	220
4. 矩估计量不一定是无偏估计	221
5. 极大似然估计不一定是无偏估计	222
6. 一个参数的极大似然估计量与矩估计量不一定相同	223
7. 极大似然估计不一定唯一	225
8. 似然方程的解不一定是极大似然估计	226
9. 矩法估计不具有不变性	228
10. 无偏估计不一定均方误差最小	229
11. 同一参数的不同的无偏估计量, 其方差不一定相同	230
12. 参数的一致估计不一定是无偏估计	231
13. 参数的一致估计量不一定唯一	232
14. 参数 θ 的几个无偏估计之间不一定有线性表出关系	234
15. 无偏估计不一定能达到罗-克拉美不等式的方差界	235
16. 若 $\frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta}$ 不存在, 无偏估计的方差不一定不小于罗-克拉美的方差界	237
17. 无偏估计不一定是有效估计	239
18. 极大似然估计不一定是有效估计	240
19. 充分统计量的函数不一定是充分统计量	241
20. 充分统计量不一定是有效估计	243

21. 无偏估计不一定总是合理的	243
------------------------	-----

第十章 假设检验

符号	245
1. 并非每一个假设都是统计假设	245
2. 假设不一定是简单假设	246
3. $\alpha + \beta$ 不一定等于 1	246
4. $\alpha + \beta$ 不一定不能等于 1	248
5. α 小时, β 不一定大	249
6. 不否定原假设 H_0 , 不一定 H_0 是正确的	249
7. 所给显著性水平 α 不同, 检验的结果不一定相同	250
8. 检验 H_0 时, 对于相同的统计量及相同的显著性水平 α , 其拒绝域不一定唯一	251
9. 拒绝域不一定是对称的	253
10. 若母体 ξ 不服从正态分布时, 检验均值不一定不能用 U -检验	253
11. 对于同一置信度, 置信区间不唯一	255
12. 对同一假设, 检验的方法不一定唯一	256
13. 不同的检验方式所得的结论不一定相同	257
参考文献	259