ICS 03.120.30
A 41

中华人民共和国国家标准

GB/T 17560—1998
eqv ISO 8595:1989

数据的统计处理和解释 中位数的估计

Interpretation of statistical data—Estimation of a median

1998-11-10发布 1999-07-01实施

国家质量技术监督局 发布

GB/T 17560—1998

中 华 人 民 共 和 国

国 家 标 准

数据的统计处理和解释

中位数的估计

GB/T 17560—1998

*

中国标准出版社出版

北京复兴门外三里河北街16号

邮政编码:100045

电　话:68522112

中国标准出版社秦皇岛印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

开本 880×1230 1/16　印张 1　字数 21 千字

1999年5月第一版　1999年5月第一次印刷

印数 1—3 000

*

书号:155066·1-15729　定价 10.00 元

*

标 目 371--37

前　　言

本标准等效采用 ISO 8595:1989《数据的统计处理和解释　中位数的估计》，与 ISO 8595 的主要差异如下：

1. 将

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}\leqslant 2^{n-1}a/2\\ \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}>2^{n-1}a/2\end{cases}\text{改为：}\begin{cases}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}\leqslant 2^{n}a/2\\ \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}>2^{n}a/2\end{cases}$$

2. 增加了一个没有截尾数据的示例。

3. 增加了威尔考克森符号秩检验(Wilcoxon signed rank test)的中位数估计方法。

4. 增加了对有截尾数据时的应用条件。

5. 删去了 ISO 8595:1989 中第 4 章的内容。

6. 在编排上有变动。

本标准的附录 A 是提示的附录。

本标准由全国统计方法应用标准化技术委员会提出并归口。

本标准起草单位：中国标准化与信息分类编码研究所、冶金部金属制品研究院、北京大学、中国科学院系统科学研究所和中国科技大学研究生院。

本标准主要起草人：于振凡、刘琼、楚安静、孙山泽、马毅林、张建方、李仁良。

ISO 前言

ISO(国际标准化组织)是各个国家标准化团体(ISO 团体成员)组成的世界性联合组织。研制国际标准的工作是通过 ISO 的各个技术委员会进行的。每一个团体成员,对其感兴趣的问题,有权参与为该课题而设立的有关技术委员会的工作。与 ISO 有联系的其他国际性组织,包括官方的和非官方的,也可以参与这项工作。

技术委员会制定的国际标准草案,在 ISO 理事会接受为国际标准以前发给团体成员,按照 ISO 的程序,至少有 75%的团体成员投票赞成通过,这些标准草案才能被批准为正式国际标准。

国际标准 ISO 8595 由 ISO/TC 69(统计方法应用标准化技术委员会)起草制定。

目　　次

中华人民共和国国家标准

数据的统计处理和解释 中位数的估计

GB/T 17560—1998
eqv ISO 8595:1989

Interpretation of statistical data—
Estimation of a median

1 范围

本标准给出了通过在总体中随机抽取 n 个样本单元，对总体概率分布的中位数进行点估计和区间估计的程序。这些程序给出了一个非参数估计的方法。

本标准中所描述的方法对于任何连续分布总体都是适用的。

注：如果可以认为总体分布服从正态分布时，那么中位数就等于均值，其置信区间应根据 GB 3360 计算出；如果已知总体概率分布函数，可采用其他方法估计中位数；只有对分布参数不甚了解的连续分布，才用此方法估计中位数。

2 引用标准

下列标准所包含的条文，通过在本标准中引用而构成为本标准的条文。本标准出版时，所示版本均为有效。所有标准都会被修订，使用本标准的各方应探讨使用下列标准最新版本的可能性。

GB/T 3360—1982 数据的统计处理和解释均值的估计和置信区间(eqv ISO 2854:1976)

GB/T 3358.1—1993 统计学术语 第一部分：一般统计术语

GB/T 3358.2—1993 统计学术语 第二部分：统计质量控制术语

3 定义和符号

3.1 定义

本标准采用了 GB/T 3358.1—1993 和 GB/T 3358.2—1993 中的定义。

3.1.1 估计 estimation

根据样本推断未知的总体分布参数。(GB/T 3358.1—1993 中 3.39)

3.1.2 估计量 estimator

用以估计总体分布未知参数的统计量。(GB/T 3358.1—1993 中 3.40)

3.1.3 估计值 estimate

根据样本观测值，对估计量计算的结果。(GB/T 3358.1—1993 中 3.41)

3.1.4 双侧置信区间 two-sided confidence interval

若 θ 是要估计的总体分布未知量，T_1 和 T_2 是两个统计量($T_1 \leqslant T_2$)，使区间$[T_1, T_2]$以一定概率包含 θ，则称此区间是 θ 的一个双侧置信区间。T_2 和 T_1 分别称为置信区间的上、下限。(GB/T 3358.1—1993 中 3.47)

3.1.5 单侧置信区间 one-sided confidence interval

在置信区间$[T_1, T_2]$中，当上限 T_2 为∞，或未知量的上限；或者下限 T_1 为$-\infty$或未知量的下限时，

国家质量技术监督局 1998-11-10 批准 1999-07-01 实施

称该置信区间为单侧置信区间。此时，对于前者，T_1 称为置信下限；对于后者，T_2 称为置信上限。(GB/T 3358.1—1993 中 3.48)

3.1.6 置信水平，置信度 confidence level

$[T_1, T_2]$ 是 θ 的一个双侧或单侧置信区间，$1-a$ 是 0 和 1 之间的常数，若对一切 θ，有 $P(T_1 \leqslant \theta \leqslant T_2) \geqslant 1-a$，则称 $1-a$ 为该置信区间的置信水平。

当 $P(T_1 \leqslant \theta \leqslant T_2) = 1-a$ 时，$1-a$ 也称为置信系数或置信度。(GB/T 3358.1—1993 中 3.49)

3.1.7 次序统计量 order statistics

将样本的各分量按从小到大顺序排列成 $x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}$，称 $(x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)})$ 为次序统计量，$x_{(i)}$ 称为第 i 个次序统计量。(GB/T 3358.1—1993 中 3.24)

3.1.8 连续概率分布的中位数 M〔或 $x_{0.5}$〕 median of a continuous probability distribution

当总体分布是连续分布 $F(x)$ 时，中位数是使得 $F(M)=1/2$ 的数值 M，在本标准中 M 叫作总体中位数。

3.2 符号

本标准采用了 GB/T 3358.1—1993 和 GB/T 3358.2—1993 中的定义和符号：

$F(x)$	分布函数在 x 处的值
M	总体中位数
n	样本量(GB/T 3358.1—1993 中 3.7)
p	二项分布参数
T_1	置信区间的下限
T_2	置信区间的上限
$x_{(i)}$	第 i 个次序统计量的值
u_{1-a}	标准正态分布的 $1-a$ 分位数
$u_{1-a/2}$	标准正态分布的 $1-a/2$ 分位数
$1-a$	置信水平(GB/T 3358.1—1993 中 3.49)

4 点估计

总体中位数 M 的点估计由样本中位数给出。

$$M \text{ 的点估计值为：} \begin{cases} x_{((n+1)/2)} & \text{当 } n \text{ 为奇数时} \\ \dfrac{x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)}}{2} & \text{当 } n \text{ 为偶数时} \end{cases}$$

5 区间估计

5.1 M 的置信区间

总体中位数 M 的双侧置信区间是一个形如 $[T_1, T_2]$ 的闭区间，这里 $T_1 < T_2$；T_2 和 T_1 分别称为置信区间的上、下限。

单侧置信区间是 $[T_1, \infty)$ 或 $(-\infty, T_2]$，对于前者，T_1 称为置信下限；对于后者，T_2 称为置信上限。

M 的置信区间的实际含义是使此区间以一定概率包含中位数 M。

5.2 通用方法

置信水平为 $1-a$ 的双侧置信区间的上、下限是由一对次序统计量 $[x_{(k)}, x_{(n-k+1)}]$ 给出的，这里整数 k 由以下两式确定：

$$\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \leqslant 2^n a/2 \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i} > 2^n a/2 \quad \cdots\cdots(2)$$

单侧的情形应以 a 代替 $a/2$。

注：这样定出的置信区间，其确切的置信系数一般略大于 $1-a$，除非上述第一式的等号成立时。表 1 给出了当 $5\leqslant n\leqslant 30$，置信水平 $1-a$ 为 0.95 及 0.99 时，单侧或双侧置信区间所对应的 k 值。

置信下限由下式给出：

$$T_1 = x_{(k)}$$

置信上限由下式给出：

$$T_2 = T_{(n-k+1)}$$

这里 $x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}$ 是样本中的次序统计量。

当样本量 n 值太小时，不能确定合适的置信限。

5.3 近似的方法

对于表 1 中没给出的 n 值，k 的近似值可由下列公式给出：

$$y = 0.5(n + 1 - u\sqrt{n - 0.5}) \quad \cdots\cdots(3)$$

k 是 y 的整数部分，u 是由下式确定的标准正态分布的分位数：

单侧限的情形：$u=u_{1-a}$；

双侧限的情形：$u=u_{1-a/2}$。

对于通常的 a 值，此近似值是相当准确的。

若使用计算机程序时，如果 $n\leqslant 30$，用公式(4)计算出的值与表 1 相一致，当 $n>30$，用公式(4)计算出的值与用公式(3)计算出的值相一致。

$$y = 0.5(n + 1 - u\sqrt{n + 0.5 - 0.25u^2}) \quad \cdots\cdots(4)$$

k 是 y 的整数部分。

6 应用示例

6.1 当 $5<n\leqslant 30$ 时

例 1：检验一批钢丝的抗拉强度，随机抽取 15 根钢丝，测得拉力值如下：(单位：N)

1 185，1 188，1 190，1 194，1 196，1 200，1 210，1 210，1 215，1 220，1 225，1 228，1 230，1 235，1 240

该批钢丝拉力值中位数的点估计值为：$x_{(7)}=1\ 210$。

从表 1 双侧的情形栏中 $n=15$，找出相应的 k 值，因此 $k=4$，置信水平为 0.95 的 M 的双侧置信区间如下：

置信区间的下限：$T_1=x_{(4)}=1\ 194$；

由于 $n-k+1=15-4+1=12$，所以

置信区间的上限：$T_2=x_{(12)}=1\ 228$。

例 2：对某小装置做模拟功能检测的寿命加速试验。在试验中得到 24 个寿命数据，数据值如下：(单位：h)(其中打“*”号的 7 个数据是截尾数据)

57.5，	77.8，	88.0，	96.9，	98.4，	100.3，	100.8，	102.1，
103.3，	103.4，	105.3，	105.4，	122.6，	139.3，	143.9，	148.0，
151.3，	161.1*，	161.2*，	161.2*	162.4*，	162.7*，	163.1*，	176,8*

寿命的中位数的点估计值是：

$(x_{(12)}+x_{(13)})/2=(105.4+122.6)/2=114$

置信水平为 0.95 的中位数单侧置信区间的下限，可从表 1 单侧限的情形一栏中 $n=24$ 时找出相应的 k 值，因此 $k=8$，于是得置信下限 $T_1=x_{(8)}=102.1$。

注：当数据中有一部分被截尾时，估计的方法仍与无截尾时的情况相同，但必须满足下述条件：对点估计，当部分数

据被上端截尾时，数据 $x_{(1)}, \cdots, x_{((n+1)/2)}$（当 n 为奇数时）必须都不被截尾，或数据 $x_{(1)}, \cdots, x_{(n/2+1)}$（当 n 为偶数时）必须都不被截尾；当部分数据被下端截尾时，数据 $x_{((n+1)/2)}, \cdots, x_{(n)}$（当 n 为奇数时）必须都不被截尾，或数据 $x_{(n/2)}, \cdots, x_{(n)}$（当 n 为偶数时）必须都不被截尾。对区间估计$[x_{(k)}, x_{(n-k+1)}]$，当部分数据被上端截尾时，数据 $x_{(1)}, \cdots, x_{(n-k+1)}$必须都不被截尾，而当部分数据被下端截尾时，数据 $x_{(k)}, \cdots, x_{(n)}$必须都不被截尾。

当此条件不满足时，本法失效。

本注解对 6.2 中的例也适用。

6.2 当 $n>30$ 时

在一项寿命加速试验中，在一批晶体管中抽取 34 个，其使用寿命数据值如下：(单位：星期)（其中打“ * ”号三个数据是截尾数据）

3，	4，	5，	6，	6，	7，	8，	8，	9，	9，	9，	10，
10，	11，	11，	11，	13，	13，	13，	13，	13，	17，	17，	19，
19，	25，	29，	33，	42，	42，	52，	52*，	52*，	52*		

寿命中位数的点估计为：

$(x_{(17)}+x_{(18)})/2=(13+13)/2=13$

样本量 $n>30$，为了得到置信水平为 0.95 的 M 的中位数单侧置信区间的下限，使用近似的方法。

由于 $1-a=0.95\quad u=u_{1-a}=u_{0.95}=1.645$，所以

$$y=0.5(n+1-u\sqrt{n-0.5})$$
$$=0.5(34+1-1.645\sqrt{34-0.5})$$
$$=12.74$$

k 是 y 的整数部分，因此 $k=12$。于是得置信下限 $T_1=x_{(12)}=10$。

对置信水平为 0.95 的 M 的双侧置信区间的上、下限，由于 $1-a=0.95$，$1-a/2=0.975$，$u=u_{1-a/2}=u_{0.975}=1.960$，所以

$$y=0.5\left(n+1-u\sqrt{n-0.5}\right)$$
$$=0.5\left(34+1-1.960\sqrt{34-0.5}\right)$$
$$=11.83$$

取 $k=11$，$n-k+1=34-11+1=24$，于是得 M 的双侧置信区间$[T_1, T_2]=[x_{(11)}, x_{(24)}]=[9,19]$

注：本例中的数据是由 Wilk 等人所做的试验提供的。

表 1　作为 n 的函数的 k 值表

n	单侧限的情形		双侧限的情形	
	置信水平		置信水平	
	0.95	0.99	0.95	0.99
5	1	0	0	0
6	1	0	1	0
7	1	1	1	0
8	2	1	1	1
9	2	1	2	1
10	2	1	2	1
11	3	2	2	1
12	3	2	3	2
13	4	2	3	2
14	4	3	3	2
15	4	3	4	3
16	5	3	4	3
17	5	4	5	3
18	6	4	5	4
19	6	5	5	4
20	6	5	6	4
21	7	5	6	5
22	7	6	6	5
23	8	6	7	5
24	8	6	7	6
25	8	7	8	6
26	9	7	8	7
27	9	8	8	7
28	10	8	9	7
29	10	8	9	8
30	11	9	10	8
注："0"意味着在此置信水平下，该样本量不能确定置信区间及置信限。				

7　威尔考克森符号秩检验(Wilcoxon signed rank test)的中位数估计方法

见附录 A(提示的附录)。

附 录 A

（提示的附录）

利用威尔考克森符号秩检验(Wilcoxon signed rank test)估计中位数

A1 适用范围

本方法仅适用于总体分布关于某点为对称时的情形。

A2 符号 u_{ij}

A2.1 根据样本观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 构成所有可能的平均值 $u_{ij}=\frac{x_i+x_j}{2}, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$。即计算

$\frac{x_1+x_1}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, \cdots, \frac{x_1+x_n}{2}$;

$\frac{x_2+x_2}{2}, \frac{x_2+x_3}{2}, \cdots, \frac{x_2+x_n}{2}$;

……

$\frac{x_{n-1}+x_{n-1}}{2}, \frac{x_{n-1}+x_n}{2}$;

$\frac{x_n+x_n}{2}$

的值。

A2.2 按递增顺序排列 u_{ij}，此数列共有 $N=\frac{n(n+1)}{2}$ 个数，记为 $u_{(1)} \leqslant u_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant u_{(N)}$。

A3 点估计

数列 u_{ij} 的中位数即为总体中位数的点估计。

A4 区间估计

A4.1 确定 k 值

根据所确定的置信水平 $1-a$ 在表 A1 中可读出与 n 同行的 k 值。

A4.2 确定单侧置信区间

A4.2.1 单侧置信区间的下限

单侧置信区间的下限为单调递增序列 u_{ij} 的第 k 个值 $u_{(k)}$。

A4.2.2 单侧置信区间的上限

单侧区间的上限为单调递增序列 u_{ij} 的第 $\frac{n(n+1)}{2}-k+1$ 个值 $u_{(N-k)}$。

A4.3 确定双侧置信区间

置信区间的下限为单调递增序列 u_{ij} 的第 k 个值 $u_{(k)}$；区间的上限为单调递增序列 u_{ij} 的第 $\frac{n(n+1)}{2}-k+1$ 个值 $u_{(N-k)}$。置信区间为 $[u_{(k)}, u_{(N-k)}]$。

A5 应用示例

在一个总体中抽出 10 个样本单元的数据如下：

$x_1=28.5$，　$x_2=25.2$，　$x_3=28.7$，　$x_4=41.0$，　$x_5=29.1$，

$x_6=32.3$，　$x_7=37.7$，　$x_8=39.9$，　$x_9=26.8$，　$x_{10}=28.8$

a）计算 $u_{ij}=\frac{x_i+x_j}{2}$，$1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$，如下：

$\frac{x_1+x_1}{2}=28.50$　$\frac{x_2+x_2}{2}=25.20$　$\frac{x_3+x_3}{2}=28.70$

$\frac{x_1+x_2}{2}=26.85$　$\frac{x_2+x_3}{2}=26.95$　$\frac{x_3+x_4}{2}=34.85$

$\frac{x_1+x_3}{2}=28.60$　$\frac{x_2+x_4}{2}=33.10$　$\frac{x_3+x_5}{2}=28.90$

$\frac{x_1+x_4}{2}=34.75$　$\frac{x_2+x_5}{2}=27.15$　$\frac{x_3+x_6}{2}=30.50$

$\frac{x_1+x_5}{2}=28.80$　$\frac{x_2+x_6}{2}=28.75$　$\frac{x_3+x_7}{2}=33.20$

$\frac{x_1+x_6}{2}=30.40$　$\frac{x_2+x_7}{2}=31.45$　$\frac{x_3+x_8}{2}=34.30$

$\frac{x_1+x_7}{2}=33.10$　$\frac{x_2+x_8}{2}=32.55$　$\frac{x_3+x_9}{2}=27.75$

$\frac{x_1+x_8}{2}=34.20$　$\frac{x_2+x_9}{2}=26.00$　$\frac{x_3+x_{10}}{2}=28.75$

$\frac{x_1+x_9}{2}=27.65$　$\frac{x_2+x_{10}}{2}=27.00$

$\frac{x_1+x_{10}}{2}=28.65$

$\frac{x_4+x_4}{2}=41.00$　$\frac{x_5+x_5}{2}=29.10$　$\frac{x_6+x_6}{2}=32.30$

$\frac{x_4+x_5}{2}=35.05$　$\frac{x_5+x_6}{2}=30.70$　$\frac{x_6+x_7}{2}=35.00$

$\frac{x_4+x_6}{2}=36.65$　$\frac{x_5+x_7}{2}=33.40$　$\frac{x_6+x_8}{2}=36.10$

$\frac{x_4+x_7}{2}=39.35$　$\frac{x_5+x_8}{2}=34.50$　$\frac{x_6+x_9}{2}=29.55$

$\frac{x_4+x_8}{2}=40.45$　$\frac{x_5+x_9}{2}=27.95$　$\frac{x_6+x_{10}}{2}=30.55$

$\frac{x_4+x_9}{2}=33.90$　$\frac{x_5+x_{10}}{2}=28.95$

$\frac{x_4+x_{10}}{2}=34.90$

$\frac{x_7+x_7}{2}=37.70$　$\frac{x_8+x_8}{2}=39.90$　$\frac{x_9+x_9}{2}=26.80$

$\frac{x_7+x_8}{2}=38.80$　$\frac{x_8+x_9}{2}=33.35$　$\frac{x_9+x_{10}}{2}=27.80$

$\frac{x_7+x_9}{2}=32.25$　$\frac{x_8+x_{10}}{2}=34.35$

$\frac{x_7+x_{10}}{2}=33.25$

$\frac{x_{10}+x_{10}}{2}=28.80$

b）将 u_{ij} 排成单调递增数列如下：

序号	u_{ij}	序号	u_{ij}	序号	u_{ij}	序号	u_{ij}	序号	u_{ij}
1	25.20	12	28.50	23	29.55	34	33.20	45	34.90
2	26.00	13	28.60	24	30.40	35	33.25	46	35.00
3	26.80	14	28.65	25	30.50	36	33.35	47	35.05
4	26.85	15	28.70	26	30.55	37	33.40	48	36.10
5	26.95	16	28.75	27	30.70	38	33.90	49	36.65
6	27.00	17	28.75	28	31.45	39	34.20	50	37.70
7	27.15	18	28.80	29	32.25	40	34.30	51	38.80
8	27.65	19	28.80	30	32.30	41	34.35	52	39.35
9	27.75	20	28.90	31	32.55	42	34.50	53	39.90
10	27.80	21	28.95	32	33.10	43	34.75	54	40.45
11	27.95	22	29.10	33	33.10	44	34.85	55	41.00

c）单侧置信区间

确定 $a=0.05, n=10, N=10\times11/2=55$。

从表 A1 中可查得 $k=12$。

于是得单侧置信区间下限为单调递增数列 u_{ij} 的第 12 个数值 $u_{(12)}=28.50$，单侧置信区间上限为单调递增数列 u_{ij} 的第 $\frac{10\times11}{2}-12+1=44$ 个数值 $u_{(44)}=34.85$。

d）双侧置信区间

确定 $a=0.05, n=10, N=10\times11/2=55$。从表 A1 中可查得 $k=9$。

于是得置信区间的下限为单调递增数列 u_{ij} 的第 9 个数值 $u_{(9)}=27.75$。

置信区间的上限为单调递增数列 u_{ij} 的第 $\frac{10\times11}{2}-9+1=47$ 个数值 $u_{(47)}=35.05$。

置信区间为[27.75，35.05]。

表 A1　Wilcoxon 估计中位数的 k 值表

n	单侧限的情形 置信水平		双侧限的情形 置信水平	
	0.95	0.99	0.95	0.99
5	1	0	0	0
6	3	0	2	0
7	5	1	3	0
8	7	3	5	1
9	9	4	7	3
10	12	6	9	4
11	15	9	12	6
12	18	11	15	8
13	22	14	18	11
14	27	17	22	14
15	32	21	26	17
16	37	25	31	20
17	42	29	36	24

表 A1(完)

n	单侧限的情形		双侧限的情形	
	置信水平		置信水平	
	0.95	0.99	0.95	0.99
18	48	34	41	29
19	55	39	47	33
20	62	44	53	38
21	69	50	60	44
22	76	57	67	50
23	84	63	74	56
24	93	71	82	62
25	101	78	91	69
26	111	86	99	77
27	121	94	108	84
28	131	103	118	93
29	142	112	128	101
30	153	121	138	110
注:“0”意味着在此置信水平下,该样本量不能确定置信区间及置信限。				