

● 数学奥林匹克小丛书

高中卷

7

Shuxue Aolimpike

XIAOCONG

SHU



复数

安振平 编著

华东师范大学出版社

olimpik e

数学奥林匹克小丛书

高中卷

7

复数

olimpik e Xiao Congshu ● 安振平 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学奥林匹克小丛书·高中卷·复数/安振平
编著. —上海: 华东师范大学出版社, 2005. 3
ISBN 7-5617-4141-3

I. 数... II. 安... III. 数学课—高中—教学参考
资料 IV. G634. 603

中国版本图书馆CIP数据核字 (2005) 第019471号

数学奥林匹克小丛书·高中卷

复数

编 著 安振平
策划组稿 倪 明
责任编辑 审校部编辑工作组
特约编辑 王学锋
封面设计 高 山
版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社
市场部 电话 021-62865537
门市(邮购) 电话 021-62869887
门市地址 华东师大校内先锋路口

业务电话 上海地区 021-62232873
华东 中南地区 021-62458734
华北 东北地区 021-62571961
西南 西北地区 021-62232893

业务传真 021-62860410 62602316
<http://www.ecnupress.com.cn>

社 址 上海市中山北路3663号
邮编 200062

印 刷 者 江苏苏州市永新印刷包装有限责任公司
开 本 787×960 16开
印 张 6.5
字 数 108千字
版 次 2005年4月第一版
印 次 2005年6月第二次
印 数 11 001—16 100
书 号 ISBN 7-5617-4141-3/G·2370
定 价 9.00元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题, 请寄回本社市场部调换或电话021-62865537联系)

数学奥林匹克小丛书

冯志刚

第44届IMO中国队副领队

上海中学特级教师

葛 军

中国数学奥林匹克高级教练、江苏省数学会普委会副主任

南京师范大学副教授

冷岗松

中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练

上海大学教授、博士生导师

李胜宏

第44届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员

浙江大学教授、博士生导师

李伟固

中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练

北京大学教授、博士生导师

刘诗雄

中国数学奥林匹克委员会委员

武钢三中校长、特级教师

倪 明

数学奥林匹克小丛书总策划

华东师范大学出版社副总编辑

单 增

第30、31届IMO中国队领队

南京师范大学教授、博士生导师

吴建平

中国数学会普委会副主任、中国数学奥委会副主席

第40届IMO中国队副领队、《中学生数学》主编

熊 斌

第46届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员

华东师范大学副教授

余红兵

中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练

苏州大学教授、博士生导师

朱华伟

中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练

广州大学软件所常务副所长、研究员

Shuxue A

Xiao

Congshu

Shuxue



数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率.这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者,既有踏实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J.W.Milnor)、芒福德(D.B.Mumford)、奎伦(D.Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A.Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L.Fejér)、里斯(M.Riesz)、舍贵(G.Szegö)、哈尔(A.Haar)、拉多(T.Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”,成为培养优秀人才的有力措施.

不过,应当注意在数学竞赛活动中,注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.



复数知识是中学数学中相对独立的内容之一。在现行的高中过渡教材中,复数仅涉及到复数的概念和复数代数形式的运算,学习的内容相对较少。然而,在各级各类的数学竞赛中,复数问题和复数方法又是命题的热门话题。

所谓复数问题,是指以复数的面孔呈现的问题。它涉及到复数的有关概念,复数代数形式、三角形式的运算,复数及其运算的几何意义等内容。这其中,出现较为频繁的题型有:复数模的计算与不等式证明,复数的辐角主值范围的确定,复平面内的动点轨迹问题的探求,复数集中的方程。解答复数问题的本质是“化虚为实”,将复数问题转化为实数问题去解决。怎么化归,则完全因题而异,你可以从复数的代数形式入手,也可以从复数的三角形式入手,还可以考虑复数的几何意义,给出直观的几何解答。

所谓复数方法,是指通过构造复数,利用复数的相关知识来解答一些非复数问题的方法。从数学问题的结构上去观察、去发现、去挖掘,寻找问题与复数知识的联系,构建复数知识解答问题的思维程序。例如:由距离联想到复数的模,由角度想到复数的三角形式,由图形的旋转想到复数乘法的几何意义,如此等等。应用复数方法可以解答某些数学问题,诸如:证明不等式,解答三角题,解决几何问题等等。特别是平面几何问题,它是数学竞赛当中常考常新的话题之一,对其中的一些问题用复数方法去解答就显得比较简明,这充分说明了用复数方法解决问题的实效性。

本书中的各节次之间既有联系,又相对独立,读者在阅读时,不必依照书的节次顺序,你可以先阅读一些自己感兴趣的内容,也可以先阅读节次前的知识概要,对于一些难度较大的问题,建议你放一放,等你系统学习了复数的有关知识以后,再反过来去阅读、去思考、去演练。学贵于思,思在于疑,解答数学问题时,既要知道“是什么”(解题知识),还要明白“为什么”(解题能力),更要反思“还有什么”(解题潜能),只要坚持这样持续的训练,将会逐

步提高你的分析问题和解决问题的能力。

本书可供高中、师范院校数学系的师生和奥林匹克数学爱好者阅读。限于作者水平，书中谬误在所难免，敬请读者不吝指正。

安振平

2004年9月



1	复数的概念	001
2	复数的代数运算	009
3	复数的三角形式	018
4	复数的几何意义	030
5	复数集内的方程	040
6	复数模的性质	047
7	复数的辐角	057
8	单位根及其应用	066
9	复数与平面几何	073
	习题解答	079



对于最简单的二次方程

$$x^2 + 1 = 0,$$

在实数集范围内就没有解, 因为对于任意实数 x 而言, $x^2 + 1$ 的值总是正的. 为了求解这类方程的需要, 就得将实数集加以扩张. 首先, 引进一个“新数” i , 使它满足

$$i^2 = -1,$$

即 i 适合方程 $x^2 + 1 = 0$. 这个新数 i 就叫做虚数单位. 将 i 添加到实数集中去, 定义:

形如

$$z = a + bi \text{ (其中 } a, b \text{ 均是实数)}$$

的表达式称为一个复数. 其中的 a 和 b 分别叫做复数 z 的实部和虚部, 分别记作

$$a = \operatorname{Re}(z), b = \operatorname{Im}(z).$$

一、复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$ 的分类

当虚部 $b = 0$ 时, 复数 z 是实数;

当虚部 $b \neq 0$, 且实部 $a = 0$ 时, 复数 z 是纯虚数;

当虚部 $b \neq 0$, 且实部 $a \neq 0$, 复数 z 是非纯虚数.

如果记:

$\mathbf{R}$ ——实数集

$\mathbf{C}$ ——复数集

$\mathbf{P}$ ——虚数集

$\mathbf{Q}$ ——纯虚数集

就有关系

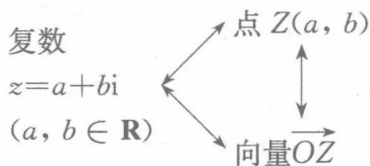
$$R \cap P = \emptyset$$

$$R \cup P = C$$

$$Q \subsetneq P \subsetneq C$$

二、复数的几何形式

复数 $a+bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 与复平面上的点 $Z(a, b)$ 是一一对应的, 并且点 $Z(a, b)$ 又和向量 $\overrightarrow{OZ}$ 构成一一对应关系, 从而说明点 Z 和向量 $\overrightarrow{OZ}$ 均是复数 $z = a+bi$ 的几何形式.



这种对应关系的构建, 揭示了复数问题与向量问题之间的相互转化, 指出了向量方法是解决复数问题的一条有效途径.

三、复数相等的充要条件

对于两个复数 $z_1 = a+bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$), $z_2 = c+di$ ($c, d \in \mathbf{R}$), 二者相等的充要条件是

$$a = c, \text{ 且 } b = d.$$

也就是

$$a+bi = c+di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c, \\ b = d. \end{cases}$$

复数相等的充要条件是复数问题化归为实数问题的理论依据, 看来, “化虚为实”应是解答复数问题的通性通法.

例 1 m 分别取何实数时, 复数

$$z = \frac{m^2 - m - 6}{m + 3} + (m^2 - 2m - 15)i$$

是

- (1) 实数;
- (2) 虚数;
- (3) 纯虚数.

分析与解 显然复数 z 是代数形式 $a+bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 呈现的, 因而, 只

要依据复数的分类来求实数 m 的值.

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{m^2 - m - 6}{m + 3} = \frac{(m + 2)(m - 3)}{m + 3},$$

$$\operatorname{Im}(z) = m^2 - 2m - 15 = (m - 5)(m + 3).$$

(1) 要使复数 z 为实数, 只要

$$\begin{cases} (m - 5)(m + 3) = 0, \\ m + 3 \neq 0, \end{cases}$$

从而, 当 $m = 5$ 时, 复数 z 是实数.

(2) 要使复数 z 为虚数, 只要

$$(m - 5)(m + 3) \neq 0,$$

从而, 当 $m \neq 5$ 且 $m \neq -3$ 时, 复数 z 是虚数.

(3) 要使复数 z 为纯虚数, 只要

$$\begin{cases} \frac{(m + 2)(m - 3)}{m + 3} = 0, \\ (m - 5)(m + 3) \neq 0, \end{cases}$$

于是, 当 $m = -2$ 或 $m = 3$ 时, 复数 z 是纯虚数.

注 在本题的求解过程中, 不可忽视“ $m + 3 \neq 0$ ”的情形, 否则, 复数 z 无意义.

例 2 是否存在这样的正整数 n , 使复数

$$z = \left(\frac{3}{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} \right)^n$$

是纯虚数? 若存在, 求出正整数 n 的值; 若不存在, 请说明理由.

分析与解 注意到复数 z 当中似乎隐含有 $w = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 于是, 可先对 z 进行必要的化归.

因为

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{3 - \sqrt{3}i}{2} \right)^n \\ &= \left[\sqrt{3}i \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right]^n \end{aligned}$$

$$= (\sqrt{3})^n (i)^n w^n,$$

所以,当 $n = 3k$ ($k \in \mathbf{N}^*$) 时,复数 $z = \pm (\sqrt{3})^n i$ 是纯虚数.

注 $w = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 是 1 的一个立方虚根.

例3 设 a, b, c 是正整数,且满足关系式

$$c = (a + bi)^3 - 107i,$$

试求 c 的值.

分析与解 因为 c 是正整数,所以 c 为实数. 于是由

$$c = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3 - 107)i,$$

得

$$3a^2b - b^3 - 107 = 0,$$

即

$$b(3a^2 - b^2) = 107.$$

由于 107 是质数,从而

$$\begin{cases} b = 1, \\ 3a^2 - b^2 = 107, \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} b = 107, \\ 3a^2 - b^2 = 1. \end{cases}$$

经计算得 $a = 6, b = 1$.

$$\text{故 } c = a^3 - 3ab^2 = 198.$$

例4 实数 m 取何值时;复数

$$z = (-m^2 - 3m + 4) + m(m + 4)i$$

所对应的点位于

- (1) 虚轴上;
- (2) 第二象限;
- (3) 实轴的下方(不包括实轴).

分析与解 将题设条件转化为不等式组或混合组后进行求解.

(1) 当复数 z 所对应的点位于虚轴上时,必有

$$\begin{cases} -m^2 - 3m + 4 = 0, \\ m(m + 4) \neq 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} m = 1 \text{ 或 } m = -4, \\ m \neq 0 \text{ 且 } m \neq -4, \end{cases}$$

所以 $m = 1$.

故当 $m = 1$ 时, 复数 z 所对应的点在虚轴上.

(2) 当复数 z 所对应的点位于第二象限内时, 必有

$$\begin{cases} -m^2 - 3m + 4 < 0, \\ m(m+4) > 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} m < -4 \text{ 或 } m > 1, \\ m < -4 \text{ 或 } m > 0, \end{cases}$$

所以 $m < -4$ 或 $m > 1$.

故当 $m < -4$ 或 $m > 1$ 时, 复数 z 所对应的点在第二象限.

(3) 依据题意, 可得

$$m(m+4) < 0,$$

解出

$$-4 < m < 0.$$

故当 $-4 < m < 0$ 时, 复数 z 所对应的点在实轴的下方.

注 表示实数的点集是实轴所在的直线; 表示虚数的点集是除实轴以外的复平面.

例 5 下面两个命题:

(1) 设 a, b, c 是复数, 如果 $a^2 + b^2 > c^2$, 那么 $a^2 + b^2 - c^2 > 0$;

(2) 设 a, b, c 是复数, 如果 $a^2 + b^2 - c^2 > 0$, 那么 $a^2 + b^2 > c^2$.

都是真命题吗? 请说明理由. (全国高中数学联赛试题)

分析与解 本题是数的大小比较问题, 关键要看两数是否都是实数.

命题(1)是真命题.

事实上, 由 $a^2 + b^2 > c^2$ 可知 $a^2 + b^2, c^2$ 均是实数, 从而, 根据移项法则立得 $a^2 + b^2 - c^2 > 0$.

命题(2)是假命题.

事实上, 由 $a^2 + b^2 - c^2 > 0$ 仅能说明 $a^2 + b^2 - c^2$ 是实数, 而不能保证 $a^2 + b^2$ 和 c^2 均是实数, 也就是说, $a^2 + b^2 > c^2$ 不一定成立.

对于命题(2), 我们亦可以通过举反例加以解决.

一方面, 取 $a = 1 + i, b = 1 - i, c = i$, 则有

$$a^2 + b^2 - c^2 = (1+i)^2 + (1-i)^2 - i^2 = 1 > 0,$$

$$a^2 + b^2 = (1+i)^2 + (1-i)^2 = 0 > -1 = i^2 = c^2.$$

另一方面,取 $a = i, b = 2+i, c = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, 则有

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - c^2 &= i^2 + (2+i)^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^2 \\ &= 2 > 0, \end{aligned}$$

但由

$$a^2 + b^2 = 2 + 4i, c^2 = 4i,$$

可知 $a^2 + b^2 > c^2$ 不能成立.

例6 已知关于 x 的二次方程

$$x^2 + (2+i)x + 4ab + (2a-b)i = 0 \quad (a, b \in \mathbf{R}).$$

(1) 当方程有实根时,求点 (a, b) 的轨迹;

(2) 求方程实数根的取值范围.

分析与解 将方程的实根 x_0 代入,可得关于 a, b, x_0 的方程组,再消去 x_0 ,使得点 (a, b) 的轨迹方程.

(1) 设原方程的实根为 x_0 , 则

$$x_0^2 + (2+i)x_0 + 4ab + (2a-b)i = 0,$$

$$(x_0^2 + 2x_0 + 4ab) + (x_0 + 2a - b)i = 0.$$

于是,由两复数相等的充要条件,得

$$\begin{cases} x_0^2 + 2x_0 + 4ab = 0, \\ x_0 + 2a - b = 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \end{matrix}$$

由②,得 $x_0 = b - 2a$, 代入①,得

$$(b-2a)^2 + 2(b-2a) + 4ab = 0,$$

$$(2a-1)^2 + (b+1)^2 = 2,$$

即

$$\frac{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}} + \frac{(b+1)^2}{2} = 1.$$

故所求点 (a, b) 的轨迹是以 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ 为中心,以 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}-1\right)$ 和

$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}-1)$ 为焦点的椭圆.

(2) 由②得 $b = x_0 + 2a$, 代入①消去 b , 得

$$x_0^2 + 2x_0 + 4a(x_0 + 2a) = 0,$$

即得关于 a 的一元二次方程

$$8a^2 + 4x_0a + (x_0^2 + 2x_0) = 0.$$

因为 $a \in \mathbf{R}$, 所以 $\Delta = 16x_0^2 - 32(x_0^2 + 2x_0) \geq 0$,

即

$$x_0(x_0 + 4) \leq 0,$$

解得

$$-4 \leq x_0 \leq 0.$$

故原方程实数根的取值范围是 $[-4, 0]$.

注 对于第(2)小题, 建立关于实数 b 的二次方程, 可以求解吗? 试试看.



习 题 1

007

1 若 $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$, 则 $z_1 = z_2 = z_3$ 是 $(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 = 0$ 成立的 ().

(A) 充分但不必要条件

(B) 必要但不充分条件

(C) 充分且必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

2 若 $t \in \mathbf{R}$, 则复数 $z = \frac{1-t^2+2ti}{1+t^2}$ 所对应的点组成的图形是 ().

(A) 单位圆

(B) 单位圆除去点 $(\pm 1, 0)$

(C) 单位圆除去点 $(1, 0)$

(D) 单位圆除去点 $(-1, 0)$

3 若 A, B 是锐角 $\triangle ABC$ 的两个内角, 则复数

$$z = (\cos B - \sin A) + i(\sin B - \cos A)$$

在复平面内所对应的点位于 ().

(A) 第一象限

(B) 第二象限

(C) 第三象限

(D) 第四象限

(全国高中数学联赛试题)