全国基础力学课程教学基地系列教材

理论力学

工程动力学

西北工业大学理论力学教研室 编
和兴锁 主编

西北工业大学出版社

【内 容 简 介】 本书是根据教育部高等工业学校理论力学教学的基本要求编写的。它是全国基础力学课程教学基地系列教材《理论力学》的工程动力学部分。全书共八章，分别讲述了质点和刚体的运动学、动力学Ⅰ。本书注重分析问题、解决问题的思路及方法，适用于课堂教学。

本书可作为高等工业学校机械、航空、航天、航海、土建、机电和动力等类专业理论力学课程的教材，也可供夜大学、函授大学相关专业及有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学：工程静力学、工程动力学、高等动力学/和兴锁主编．—西安：西北工业大学出版社，2001.6
ISBN 7-5612-1331-X

Ⅰ．理… Ⅱ．和… Ⅲ．理论力学-高等学校-教材 Ⅳ．031

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 15160 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号，邮编：710072 电话：029—8493844
网 址：http://www.nwpup.com
印 刷 者：西安电子科技大学印刷厂
开 本：850 毫米×1 168 毫米 1/32
印 张：9.5
字 数：229 千字
版 次：2001 年 8 月 第 1 版 2001 年 8 月 第 1 次印刷
印 数：1～2000 册
定 价：13.00 元

目　　录

第一章 工程运动学基础

§1-1 工程运动学的任务和基本概念

静力学中我们研究了物体的平衡规律。要使物体处于平衡，作用于物体上的力系必须满足其平衡条件。当平衡条件不满足时，物体就不能保持平衡而要改变其原有的静止状态或运动状态。因此，研究了物体的平衡规律以后，需要进一步研究物体运动变化的规律。由于运动规律较之平衡规律要复杂得多，所以将其分为运动学和动力学两部分进行研究。下面要研究的运动学，它是用几何的观点研究物体的机械运动，只阐明运动过程的几何特征及其各运动要素之间的关系，而完全不涉及与运动变化有关的物理因素（如力、质量等）。

学习运动学的目的，一方面是为学习动力学提供必要的基础知识，另一方面也有其独立的意义。在工程实际中，不论是设计新产品、新设备或进行技术革新，首先要求产品或设备能完成一定的动作，即实现预先规定的各种运动。因此必须以运动学知识为基础，对传动机构进行必要的运动分析。

在运动学的研究中，通常将物体抽象为点和刚体两种模型。所谓点是指其形状、大小可忽略不计而只在空间占有确定位置的几何点。而刚体则可视为由无穷多个点组成的不变形的几何形体。当忽略物体的几何形状、尺寸而不会影响所研究的问题时，该物体就

可以抽象为一个点，否则必须视为刚体。

在运动学中，首先遇到的问题是如何确定物体在空间的位置。物体的位置只能相对地描述，即只能确定一个物体相对于另一个物体的位置。这后一物体被作为确定前一物体位置用的参考体。将一组坐标系固连在参考体上，则这组坐标系就称为**参考坐标系**或**参考系**。如果物体在所选参考系中的位置是随时间而变化的，就说该物体在运动，否则，该物体处于静止。在运动学中，所谓运动和静止都只有在指明了参考系的情况下才有意义。运动描述的相对性反映了物体机械运动的客观属性。

在运动学中，参考系的选择是任意的。描述同一物体的运动时，选用不同的参考系可以得到不同的结果。例如，当车厢沿轨道行驶时，对固连于车厢的参考系来说，车厢里坐着的乘客是静止的；但对固连于地球上的参考系，则乘客是随车厢一起运动的。因此，为了明确起见，必须首先指出问题中的参考系。在习惯上和一般工程问题中，总是选取固连于地球上的参考系。本书中如不特别说明，选用的参考系均固连于地球。

在运动学里，要用到**瞬时**与**时间间隔**这两个不同的概念。瞬时是指某一时刻，而时间间隔则是指两个不同瞬时之间的一段时间。例如，设火车从甲站开动的瞬时是 t_1，到乙站停止的瞬时是 t_2，则火车由甲站到乙站运行的时间间隔是 (t_2-t_1)。时间间隔的长短表示过程的久暂。时间间隔的单位通常采用秒(s)，相应地，瞬时也用秒来表示。

§1-2 点的运动的矢量法

所谓点的运动就是指点在空间的位置随时间而改变。研究点的运动就是要确定每瞬时点在空间的位置、速度和加速度等。一般情况下，点在空间的位置随时间连续变化形成一条空间曲线，这条

曲线称为点的轨迹或路径。直线运动可看做曲线运动的一个特例。在曲线运动中，由于点运动的快慢和方向都在变化，所以用矢量表示点在空间的位置是方便的。

一、点的运动方程的矢量法

运动学中常把确定为研究对象的运动的点称为**动点**，**运动方程**(也称**运动规律**)表示动点在所选参考系中的位置随时间而变化的规律。

设有一动点相对于某参考体而运动，它在瞬时 t 的位置为 M，为了确定动点的位置，可在参考体上任选一点 O 作为参考点(定点或原点)。把由定点 O 画至动点 M 的有向线段$\overrightarrow{OM}$(见图 1-1) 作为矢量看待，并用 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 表示，$\boldsymbol{r}$ 则称为动点的**矢径**。当点 M 运动时，矢径 $\boldsymbol{r}$ 的大小和方向都随时间在不断改变，即不同的矢径 $\boldsymbol{r}$ 对应着不同的位置。这种用矢量确定动点位置的方法称为**矢量法**。当动点运动时，$\boldsymbol{r}$ 是时间 t 的单值连续矢量函数，即

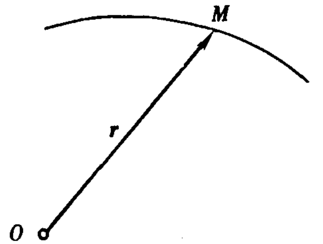

图 1-1

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1-1}$$

方程(1-1) 称为点 M 的**矢量形式的运动方程**。变矢量 $\boldsymbol{r}$ 的末端随时间变化在空间绘出的曲线(简称**矢端图**) 就是动点的运动轨迹。

二、点的速度的矢量法

设在瞬时 t，动点位于 M，矢径为 $\boldsymbol{r}$。经过 Δt，即在瞬时 $t+\Delta t$，动点运动到 M'，矢径变为 $\boldsymbol{r}'$，如图 1-2，在时间间隔 Δt 内矢径 $\boldsymbol{r}$ 的变化量为

$$\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}=\Delta\boldsymbol{r}=\overrightarrow{MM'} \tag{1-2}$$

它表示在时间间隔 Δt 内动点位置矢的改变，称为动点在 Δt 时间内的**位移**。

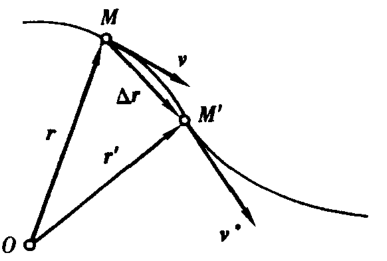

图 1-2

动点在 Δt 这段时间内运动的快慢程度，可用比值 $\Delta \boldsymbol{r}/\Delta t$ 来描述，并以 $\boldsymbol{v}^*$ 表示，即

$$\boldsymbol{v}^* = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} \qquad (1-3)$$

式中，$\boldsymbol{v}^*$ 称为动点在 Δt 时间内的**平均速度**（见图 1-2）。

当 $\Delta t \to 0$ 时，$\boldsymbol{v}^*$ 的极限称为动点在瞬时 t 的**速度** $\boldsymbol{v}$，即

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{v}^* = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}} \qquad (1-4)$$

即动点的速度等于它的矢径对时间的一阶矢导数。其方向沿动点的矢端图（即轨迹曲线）在对应点的切线，并指向动点前进的方向。在国际单位制中，速度的单位是 m/s。

三、点的加速度的矢量法

动点作曲线运动时，不仅速度的大小可能改变，速度的方向也在改变（图 1-2）。为了描述每瞬时动点速度的大小和方向改变的情况，现引入加速度的概念。

设动点在 M 和 M' 的速度分别为 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}'$，在时间间隔 Δt 内，动点速度的改变量为 $\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}$（见图 1-3）。比值 $\Delta \boldsymbol{v}/\Delta t$ 称为动点在 Δt 时间内的**平均加速度**，即

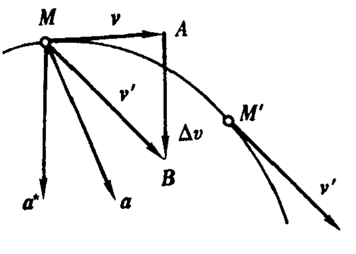

图 1-3

$$\boldsymbol{a}^* = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \qquad (1-5)$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，$\boldsymbol{a}^*$ 的极限值称为动点

在瞬时 t 的加速度 $\boldsymbol{a}$，即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{a}^{*}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{\boldsymbol{r}} \qquad (1-6)$$

即动点的加速度等于它的速度对时间的一阶矢导数，或等于它的矢径对时间的二阶矢导数。其方向沿速度矢端图的切线，并指向速度矢端运动的方向。在国际单位制中，加速度的单位是 $\mathrm{m/s^2}$。

思考题　若某瞬时 t_1，点的速度 $\boldsymbol{v}_1=0$，则必有 $\boldsymbol{a}_1=0$ 吗？

§1-3　点的运动的直角坐标法

一、点的运动方程的直角坐标法

设动点 M 作空间曲线运动（见图 1-4）。过固定点 O 作直角坐标系 $Oxyz$，设在瞬时 t，点 M 的矢径为 $\boldsymbol{r}$，坐标为 x,y,z，把点 M 的矢径写成分解式，即有

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \qquad (1-7)$$

式中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为固定直角坐标轴 x,y,z 的单位矢量。当点 M 运动时，这些坐标一般地可以表示为时间 t 的单值连续函数，即

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t) \qquad (1-8)$$

式(1-8) 称为点 M 的**直角坐标形式的运动方程**。动点的轨迹方程可由式(1-8) 消去时间

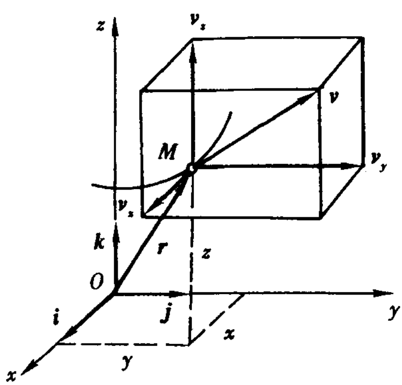

图　1-4

t 而得到。

二、点的速度在直角坐标轴上的投影

设点 M 作曲线运动，已知它的直角坐标形式的运动方程(1－8)。当函数 $x(t),y(t),z(t)$ 为已知时，动点 M 对应于任意瞬时 t 的位置也就完全确定。由式(1－4) 及式(1－7) 可知，点 M 的速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) \tag{1-9}$$

考虑到固定坐标轴的单位矢量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 都是常矢量，故有 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}=0$，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t}=0$，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t}=0$，所以式(1－9) 可写为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \tag{1-10}$$

而矢量 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 也可以沿三个坐标轴分解，若以 v_x,v_y,v_z 表示速度 $\boldsymbol{v}$ 在 x,y,z 轴上的投影(见图 1－4)，则有

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{1-11}$$

比较上两式，可得

$$\left.\begin{aligned}v_x&=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\v_y&=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\\v_z&=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\end{aligned}\right\} \tag{1-12}$$

即动点的速度在固定直角坐标轴上的投影，等于该点的对应坐标对时间的一阶导数。

有了速度的三个投影，就可以求得速度的大小和方向。速度的大小为

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \tag{1-13}$$

速度的方向可用速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 与各坐标轴正向间夹角的余弦来表示，即

$$\left.\begin{aligned} \cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i}) &= \frac{v_x}{v} \\ \cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{j}) &= \frac{v_y}{v} \\ \cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{k}) &= \frac{v_z}{v} \end{aligned}\right\} \tag{1-14}$$

式中 $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i})$，$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{j})$，$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{k})$ 分别表示速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 与坐标轴 x，y，z 正向间的夹角。

三、点的加速度在直角坐标轴上的投影

由动点的速度分解式(1-11)对时间 t 求导数可得其加速度，即

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \tag{1-15}$$

于是，动点的加速度 $\boldsymbol{a}$ 在固定轴 x，y，z 上的投影分别是

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\ a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\ a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-16}$$

即动点的加速度在固定直角坐标轴上的投影，等于该点速度的对应投影对时间的一阶导数，也等于该点的对应坐标对时间的二阶导数。

有了加速度的三个投影，就可以求得加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right)^2} \tag{1-17}$$

加速度的方向可由加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 与各坐标轴正向间夹角的余弦来

表示，即

$$\left.\begin{aligned}\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{i})&=\frac{a_x}{a}\\\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{j})&=\frac{a_y}{a}\\\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{k})&=\frac{a_z}{a}\end{aligned}\right\}\qquad(1-18)$$

思考题 点作直线运动，若沿其轨迹取固定坐标轴 Ox，试列写该点的运动方程及速度、加速度表达式。

§1-4 点的运动的自然法

一、自然轴系、曲率与曲率半径

当点沿已知曲线轨迹运动时，轨迹的几何性质会影响点的运动要素。在用自然法分析点运动的速度和加速度之前，我们先简要回顾空间曲线的有关几何性质。

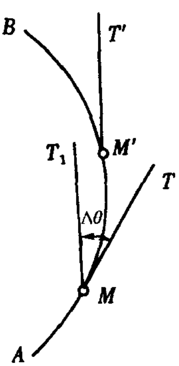

图 1-5

设有空间曲线 AB（见图 1-5），在其上任取相邻近的两点 M 和 M'，两点间的一段弧长 $\widehat{MM'}$ 以 Δs 表示；点 M 和 M' 处的切线分别以 MT 和 $M'T'$ 表示。自点 M 作 MT_1，使 MT_1 平行于 $M'T'$；所得 MT 与 MT_1 的夹角 $\Delta\theta$ 称为**邻角**，恒取正值，它表示 M 和 M' 处两切线方向的变化。$\Delta\theta$ 与 Δs 的比值 $\frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}$ 是曲线在这段弧长 Δs 内切线方向变化率的平均值。它可以用来说明曲线在 Δs 内弯曲的程度，因此称为弧段 $\widehat{MM'}$ 的**平均曲率**。用 k^* 表示这个比值，有

$$k^{*}=\frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}$$

为了说明曲线在点 M 处的弯曲程度，应令点 M' 趋近于点 M。这样，平均曲率 k^{*} 将趋近于极限值 k，这个极限值就是曲线在点 M 处的曲率，即

$$k=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s} \tag{1-19}$$

曲率 k 的倒数称为曲线在点 M 处的**曲率半径** ρ

$$\rho=\frac{1}{k} \tag{1-20}$$

圆周的曲率半径就是圆周自身的半径。对于一般曲线，曲率半径的几何意义可说明如下。通过点 M 以及曲线上靠近 M 的另外两点作一圆周，则当这两个点向点 M 无限趋近时，这个圆将趋近于某个极限圆，它和曲线相切于点 M。这个圆称为曲线在点 M 的**曲率圆**。它的半径就是曲线在点 M 的曲率半径，而它的圆心则称为**曲率中心**。直线可以看成曲率半径 $\rho=\infty$ 的曲线。

现在介绍自然轴系。在图 1-5 中，通过点 M 作一个包含 MT 和 MT_1 的平面。当 M' 向 M 接近时，这个平面的位置将绕 MT 转动。当点 M' 趋于点 M，即当 Δs 趋于零时，这个平面将转到某一极限位置，而这个极限位置的平面也就是上述曲率圆的平面，并称为曲线在点 M 处的**密切面或曲率平面**。

通过点 M 作垂直于切线的平面称为曲线上点 M 处的**法面**。法面内由点 M 作出的一切直线都和切线垂直，因而都是曲线的**法线**。为区别起见，规定在密切面内的法线称为曲线在点 M 处的**主法线**（见图 1-6）。法面内与主法线相垂直的法线称为**副法线**。这样，切线、主法线和副法线在点 M 形成三面正交架。

现在规定：切线方向的单位矢量以 $\boldsymbol{\tau}$ 表示，指向弧坐标 s（见后）增加的一方，主法线方向的单位矢量以 $\boldsymbol{n}$ 表示，指向曲线凹边（即指向曲率中心），副法线方向的单位矢量以 $\boldsymbol{b}$ 表示，且有

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n}$$

由 $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ 三个单位矢量确定的正交轴系称为**自然轴系**（见图 1-6）。对于曲线上的任一点，都有属于该点的一组自然轴系。当点运动时，随着点在轨迹曲线上位置的变化，其自然轴系的方位也随之而改变。所以 $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ 都是随着点的位置而变化的变矢量。

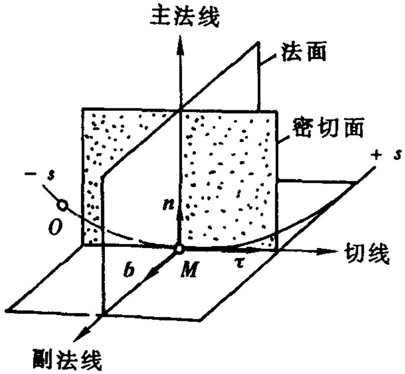

图 1-6

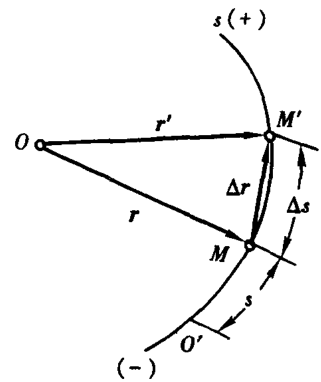

图 1-7

二、点的运动方程

设动点 M 沿已知轨迹曲线运动（见图 1-7）。在轨迹上任取一点 O' 为参考点（原点）。为了唯一地确定动点在轨迹上的位置，把轨迹的一端定为运动的正方向，另一端定为运动的负方向。点在轨迹上某瞬时 t 的位置，可由参考点 O' 到点 M 的那段轨迹的弧长 $\overset{\frown}{O'M}$ 表示，并根据动点在参考点的哪一边加上相应的正负号。这种带正负号的弧长称为**点的弧坐标**，用 s 表示。当点运动时，其弧坐标 s 随时间不断变化，是 t 的单值连续函数，即

$$s = f(t) \tag{1-21}$$

方程(1-21) 称为以**自然法表示的动点的运动方程**。

三、点的速度在自然轴上的投影

由固定点 O 画出动点 M 的矢径 $\boldsymbol{r}$，则点的速度等于

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

把上式分子分母同乘以弧坐标的微分 $\mathrm{d}s$，得

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \tag{1-22}$$

这里，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}$。当 Δs 趋于零时，$\left|\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}\right|$ 的大小趋于1，而 $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}$ 的方向则永远沿着点 M 切线的正向 $\boldsymbol{\tau}$，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}=\boldsymbol{\tau}$$

若以 v_τ 表示速度在切线轴上的投影，则速度表达式(1-22)可写为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}=v_\tau\boldsymbol{\tau} \tag{1-23}$$

由点的运动的矢量法知，点的速度方向沿轨迹的切线，因而有

$$v=v_\tau=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dot{s} \tag{1-24}$$

即动点的速度在切线上的投影，等于它的弧坐标对时间的一阶导数。

四、点的加速度在自然轴上的投影

式(1-23)对时间求导数，可得动点的加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v\boldsymbol{\tau})=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t} \tag{1-25}$$

式中

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{s}$$

至于矢导数$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}$则可求出如下。设沿切线$M'T'$的单位矢为$\boldsymbol{\tau}'$，则$\Delta\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}$(见图1-8)，其模$|\Delta\boldsymbol{\tau}|=2|\boldsymbol{\tau}|\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}=2\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}$(因为$|\boldsymbol{\tau}|=1$，又邻角$\Delta\theta$恒取正值)，故$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}$的大小为

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{\tau}|}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta t}=$$

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2}\cdot\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta s|}{\Delta t}$$

但

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2}=1,\qquad\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}=\frac{1}{\rho},\qquad\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta s|}{\Delta t}=|\boldsymbol{v}|$$

故有

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{|v|}{\rho}$$

导数$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}$的方向与$\Delta\boldsymbol{\tau}$的极限方向相同，即在密切面内，垂直于切线$MT$，并与$\boldsymbol{n}$的指向相同或相反。当动点朝弧坐标增加的一方运动时(见图1-8(a))，v为正值，矢导数$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}$指向曲线的凹边即与$\boldsymbol{n}$的指向相同。如速度$\boldsymbol{v}$朝相反的方向(见图1-8(b))，$v$为负值，则$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}$指向曲线的凸边即与$\boldsymbol{n}$的指向相反。但是，无论哪种情况，矢量$v\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$总是指向曲线的凹边即与$\boldsymbol{n}$的指向相同。因而

$$v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t}=\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}$$

故加速度等于

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}\tag{1-26}$$