

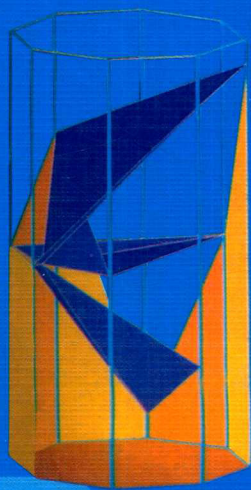
● 数学奥林匹克小丛书

高中卷

15

Shuxue Aolimpik

XIAOCONG  
SHU



图论

熊斌 郑仲义 编著

华东师范大学出版社



olimpik e

数学奥林匹克小丛书

高中卷

15

# 图论

olimpik e Xiao Congshu ● 熊斌 郑仲义 编著

华东师范大学出版社

## 图书在版编目 ( C I P ) 数据

数学奥林匹克小丛书·高中卷·图论/熊斌, 郑仲义  
编著. —上海: 华东师范大学出版社, 2005. 3  
ISBN 7-5617-4107-3

I. 数... II. ①熊...②郑... III. 数学课—高中—教学  
参考资料 IV. G634. 603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第016374号



数学奥林匹克小丛书·高中卷

## 图 论

编 著 熊 斌 郑仲义  
策划组稿 倪 明  
责任编辑 审校部编辑工作组  
特约编辑 董纯飞  
封面设计 高 山  
版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社  
市场部 电话 021-62865537  
门市(邮购) 电话 021-62869887  
门市地址 华东师大校内先锋路口

业务电话 上海地区 021-62232873  
华东 中南地区 021-62458734  
华北 东北地区 021-62571961  
西南 西北地区 021-62232893

业务传真 021-62860410 62602316  
<http://www.ecnupress.com.cn>

社 址 上海市中山北路3663号  
邮编 200062

印 刷 者 华东师范大学印刷厂  
开 本 787×960 16开  
印 张 7  
字 数 115千字  
版 次 2005年4月第一版  
印 次 2005年4月第一次  
印 数 16 000  
书 号 ISBN 7-5617-4107-3/G·2344  
定 价 9.00元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题, 请寄回本社市场部调换或电话021-62865537联系)

# 本书导读

1736年，数学家欧拉由解哥尼斯堡七桥问题而创立了图论这门学科，到现在已经二百多年了。图论是离散数学的骨干内容，而离散数学则是计算机科学技术与网络信息科学的理论基础。本书通过一些有趣的数学问题和数学游戏向读者比较通俗地介绍了一些图论的基本知识和图论中常用的初等方法，以扩大中学生的知识面，提高分析问题和解决问题的能力。

刘诗雄

中国数学奥林匹克委员会委员

武钢三中校长、特级教师

倪明

数学奥林匹克小丛书总策划

华东师范大学出版社副总编辑

单尊

第30、31届IMO中国队领队

南京师范大学教授、博士生导师

吴建平

中国数学会普委会副主任、中国数学奥委会副主席

第40届IMO中国队副领队、《中学生数学》主编

熊斌

第46届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员

华东师范大学副教授

余红兵

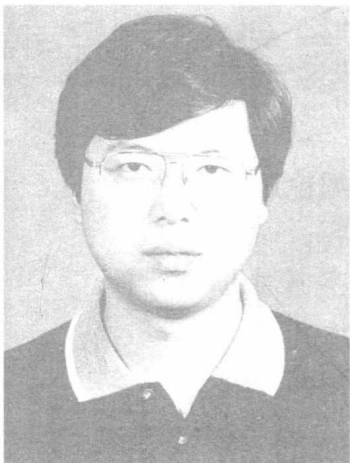
中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练

苏州大学教授、博士生导师

朱华伟

中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练

广州大学软件所常务副所长、研究员



**熊 斌** 华东师范大学数学系硕士生导师，中国数学奥林匹克高级教练，中国数学奥林匹克委员会委员，第46届IMO中国队领队，《数学通讯》数学竞赛专栏主持人，《数理天地》编委、记者，多次担任中国数学奥林匹克国家集训队教练，指导了多名学生在IMO中获得金牌，多次参与全国初中数学竞赛、全国联赛、西部数学奥林匹克、女子数学奥林匹克、希望杯全国数学邀请赛、中国数学奥林匹克的命题工作，在国内外杂志上发表论文50多篇，编著、翻译、主编著作100余本。

# 数学奥林匹克小丛书

- 冯志刚** 第44届IMO中国队副领队  
上海中学特级教师
- 葛军** 中国数学奥林匹克高级教练、江苏省数学会普委会副主任  
南京师范大学副教授
- 冷岗松** 中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练  
上海大学教授、博士生导师
- 李胜宏** 第44届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员  
浙江大学教授、博士生导师
- 李伟固** 中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练  
北京大学教授、博士生导师
- 刘诗雄** 中国数学奥林匹克委员会委员  
武钢三中校长、特级教师
- 倪明** 数学奥林匹克小丛书总策划  
华东师范大学出版社副总编辑
- 单尊** 第30、31届IMO中国队领队  
南京师范大学教授、博士生导师
- 吴建平** 中国数学会普委会副主任、中国数学奥委会副主席  
第40届IMO中国队副领队、《中学生数学》主编
- 熊斌** 第46届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员  
华东师范大学副教授
- 余红兵** 中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练  
苏州大学教授、博士生导师
- 朱华伟** 中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练  
广州大学软件所常务副所长、研究员



数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛。在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大。我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业。我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目。

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率。这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才。由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者。在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺 (J.W.Milnor)、芒福德 (D.B.Mumford)、奎伦 (D.Quillen) 等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔 (A.Schinzel) 学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔 (L.Fejér)、里斯 (M.Riesz)、舍贵 (G.Szegö)、哈尔 (A.Haar)、拉多 (T.Radó) 等都曾是数学竞赛获奖者。匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”，成为培养优秀人才的有力措施。

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久。



当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意。这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因为有某些缺点，就否定这项活动。

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版。这套书，规模大、专题细。据我所知，这样的丛书还不多见。这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书。

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人員，不少是国家集训队的教练和国家队的领队。他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动。华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血。我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好。

王元



1	图的定义	001
2	顶点的度	011
3	托兰定理	019
4	树	030
5	欧拉问题	038
6	哈密顿问题	046
7	平面图	055
8	拉姆赛问题	062
9	竞赛图	074
	习题解答	081



图论是以图作为研究对象的一个数学分支. 这里说的图, 是指由一些点及连接这些点对的一些线段构成的图形, 用来直观地表示具有某种二元关系的集合.

近年来, 图论研究发展迅速, 在诸多领域里获得了广泛的应用.

我们经常遇到这样一些现象或问题:

在一群人中, 有的两人之间互相认识, 有的互不相识;

一次足球锦标赛有若干个队参加, 其中有的两队之间比赛过, 有的没有比赛过;

有若干个大城市, 有的两个城市之间有航线相通, 有的没有航线相通;

平面上的一个点集, 其中任意两点之间有的距离为 1, 有的距离不为 1.

在上面这些现象或问题中都包含两方面的内容: 其一是一些“对象”, 如人群、足球队、城市、点等等; 其二是这些对象两两之间的某种特定关系, 如“互相认识”、“比赛过”、“通航”、“距离为 1”等. 为了表示这些对象和他们之间的关系, 我们可以用一个点表示一个对象, 称这些点为顶点, 如果两个对象之间有所讨论的关系, 就在相应的两点之间连上一条线, 称这些线为边, 这样就构成了一个图形.

这个用来表示某类对象及他们间特定关系的, 由若干个顶点与连接某些顶点的边的图形, 我们直观地称之为图\*.

例如图 1-1 中给出了 3 个图  $G_1$ 、 $G_2$ 、 $G_3$ , 其中顶点由小圆圈表示.

\* 图的一般数学定义为: 一个图  $G$  是一个三元组  $(V, E, \phi)$ , 其中  $V$  和  $E$  是两个不相交的集合,  $V$  非空,  $\phi$  是  $E$  到  $V$  的元素对集合中的一个映射.  $V$ 、 $E$ 、 $\phi$  分别称为图  $G$  的顶点集、边集和关联函数.

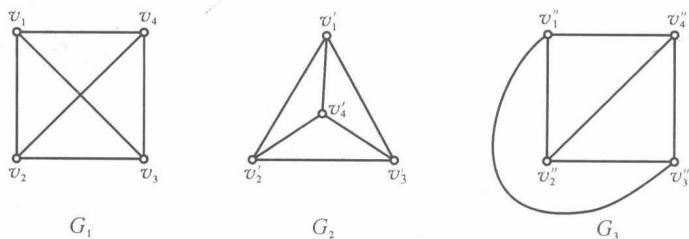


图 1-1

我们注意到,在直观地叙述图的定义中,并没有规定这些顶点的位置以及边的曲直长短也没有规定这些顶点、边都要在同一平面中.然而要求作为连接两点的边不要通过第三点,也不要与自己相交.在图论中,如果两个图  $G$  与  $G'$  的顶点之间可以建立起一一对应,并且  $G$  中连接顶点  $v_i$  与  $v_j$  之间的边数  $k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) 与连接  $G'$  中相应的顶点  $v'_i$  与  $v'_j$  的边数相同时,便称图  $G$  与  $G'$  是同构的,认为  $G$  与  $G'$  是相同的图.

例如,图 1-1 中的三个图  $G_1$ 、 $G_2$ 、 $G_3$  是同构的.

如果对图  $G = (V, E)$  与  $G' = (V', E')$  有  $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ , 即图  $G'$  的顶点都是图  $G$  的顶点,图  $G'$  的边也都是图  $G$  的边,则称  $G'$  是  $G$  的子图. 例如如图 1-2 中的  $G_1$ 、 $G_2$  都是  $G$  的子图.

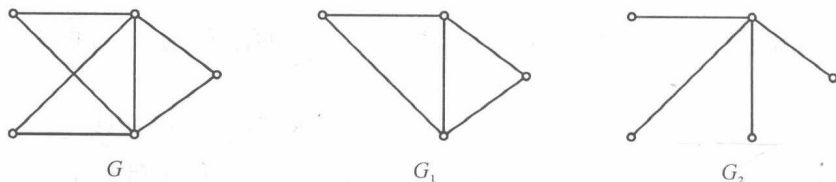


图 1-2

若在一个图  $G$  中的两个顶点  $v_i$  与  $v_j$  之间有边  $e$  相连,则称点  $v_i$  与  $v_j$  是相邻的,否则就称点  $v_i$  与  $v_j$  是不相邻的.如果顶点  $v$  是边  $e$  的一个端点,称点  $v$  与边  $e$  是关联的.在图 1-3 中,顶点  $v_1$  与  $v_2$  是相邻的,而顶点  $v_2$  与顶点  $v_5$  是不相邻的.顶点  $v_3$  与边  $e_4$  是关联的.

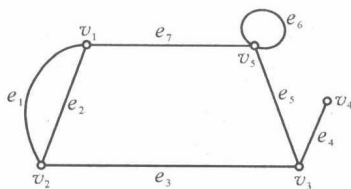


图 1-3

有些顶点本身也有边相连,这样的边称为环.如图 1-3 所示的边  $e_6$  是环.

连结两个顶点的边有时可能不止一条,若两个顶点之间有  $k$  ( $k \geq 2$ ) 条边

相连,则称这些边为平行边.例如,图 1-3 中的边  $e_1$ 、 $e_2$  是平行边.

如果一个图没有环,并且没有平行边,这样的图称为简单图.图 1-1 中的  $G_1$ 、 $G_2$ 、 $G_3$  都是简单图,而图 1-3 所示的就不是一个简单图.在简单图中,连结顶点  $v_i$  与  $v_j$  之间的边可用  $(v_i, v_j)$  表示.当然,  $(v_i, v_j)$  与  $(v_j, v_i)$  表示的是同一条边.

如果一个简单图中,每两个顶点之间都有一条边,这样的图称为完全图.通常将有  $n$  个顶点的完全图记为  $K_n$ .图 1-4 中是完全图  $K_3$ 、 $K_4$ 、 $K_5$ .

完全图  $K_n$  的边的数目是  $C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$ .

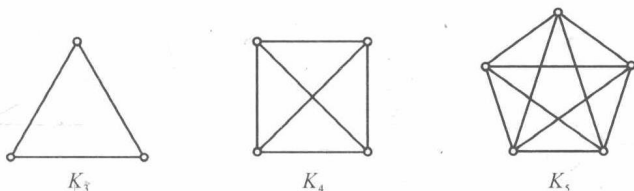


图 1-4

在图  $G = (V, E)$  中,若顶点个数  $|V|$  ( $|V|$  也称为  $G$  的阶)和边数  $|E|$  都是有限的,则称图  $G$  是有限图.如果  $|V|$  或  $|E|$  是无限的,则称  $G$  为无限图.

本篇中,除非特别说明,我们所说的图都是指有限简单图.

利用上述的这些基本概念可以帮助我们思考并解决一些问题.

**例 1** 某大型聚会有 605 个人参加.已知他们每个人都至少和其中的另一个人握过手.证明:必有一人至少和其中的两个人握过手.

**证明** 将 605 个人用 605 个点  $v_1, v_2, \dots, v_{605}$  表示,如果其中两个人握过手,就在相应的顶点之间连一条边.

本例要证明:必有一人至少和其中的两个人握过手.倘若不然,则每个人至多和其中一个人握过手,再从题设的每个人至少和其中一个人握过手,于是便有,每个人恰与其他一个人握过手.这样就得出,图  $G$  恰由若干个两点间连一条边的图形构成(图 1-5).

设图  $G$  有  $r$  条边,则  $G$  便有  $2r$  (偶数)个顶点,这与  $G$  的顶点数为 605 (奇数)矛盾.

本例得以证明.

**例 2** 能否让马跳动几次,将图 1-6 所示的阵势变为如图 1-7 所示的阵势? (“马”按照国际象棋规则跳动)

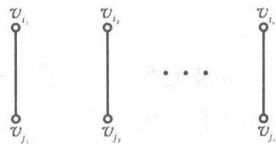


图 1-5

白马		白马
黑马		黑马

图 1-6

白马		黑马
黑马		白马

图 1-7

1	4	7
2	5	8
3	6	9

图 1-8

如图 1-8 所示,将九个方格编号.再把每个方格对应为平面上一点.若马能从一个方格跳往另一个方格,则在相应两点之间连一条边,如图 1-9.

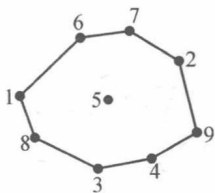


图 1-9



图 1-10



图 1-11

于是由图 1-6 所示的开始的阵势以及图 1-7 所示的要求变成的阵势分别变成了图 1-10、图 1-11 中的两个图形.

显然,马在一个圆上的前后跟随顺序是无法从两白两黑紧贴转化为黑白相间的,所以不能按要求改变阵势.

**例 3** 有  $n$  名选手  $A_1, A_2, \dots, A_n$  参加数学竞赛,其中有些选手是互相认识的,而且任何两个不相识的选手都恰好有两个共同的熟人.若已知选手  $A_1$  与  $A_2$  互相认识,但他俩没有共同的熟人,证明他俩的熟人一样多.

**证明** 用  $n$  个点  $v_1, v_2, \dots, v_n$  表示这  $n$  名选手  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ,如果两个选手互相认识,那么就在相应的两个点之间连一条边,这样就得到一个简单图  $G$ .图  $G$  中的顶点满足:任意两个不相邻的顶点都恰好有两个共同相邻的顶点.要证明的是相邻的两个顶点  $v_1$  与  $v_2$  各自引出的边的条数一样多.

如果记与  $v_1$  相邻的顶点集合为  $N(v_1)$ ,与  $v_2$  相邻的顶点集合为  $N(v_2)$ .若在  $N(v_1)$  中除  $v_2$  外还有点  $v_i$ ,则  $v_i \notin N(v_2)$ .否则  $A_1$  与  $A_2$  有共同熟人  $A_i$ .于是  $v_2$  与  $v_i$  除  $v_1$  外还应有一个与它们共同相邻的点  $v_j$ ,则  $v_j \in N(v_2)$ .如图 1-12 所示.对于  $N(v_1)$  中不同于  $v_2$  的点  $v_i, v_k$ ,它们不可能与

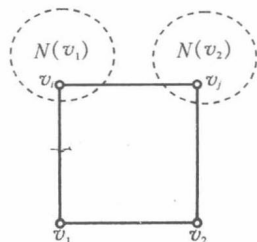


图 1-12

$N(v_2)$ 中除  $v_1$  外的一个点  $v_j$  都相邻(否则,两个不相邻的顶点  $v_1, v_j$  有三个共同相邻的顶点  $v_2, v_i, v_k$ ). 因而,对于  $N(v_1)$ 中不同于  $v_i$  的  $v_k$ ,必在  $N(v_2)$ 中存在不同于  $v_j$  的相邻点  $v_l$ . 由此可得  $N(v_1)$ 中的顶点个数不大于  $N(v_2)$ 中的顶点个数. 同样地,  $N(v_2)$ 中的顶点个数不大于  $N(v_1)$ 中的顶点个数. 于是,从点  $v_1$  与  $v_2$  引出的边的条数是相等的.

**例 4** 九名数学家在一次国际数学会议上相遇,发现他们中的任意三个人中,至少有两个人可以用同一种语言对话. 如果每个数学家至多可说三种语言,证明至少有三名数学家可以用同一种语言对话. (1978 年美国数学奥林匹克试题)

**证明** 用九个点  $v_1, v_2, \dots, v_9$  表示这九名数学家,如果某两个数学家能用第  $i$  种语言对话,则在它们相应的顶点之间连一条边并涂以相应的第  $i$  种颜色,这样就得到了一个有九个顶点的简单图  $G$ ,它的边涂上了颜色,每三点之间至少有一条边,每个顶点引出的边至多有三种不同的颜色. 要证明的是: 图  $G$  中存在三个点,它们两两相邻,且这三条边具有相同的颜色(这种三角形称为同色三角形).

如果边  $(v_i, v_j), (v_i, v_k)$  具有相同的第  $i$  种颜色,则按边涂色的意义,点  $v_j$  与  $v_k$  也相邻,且边  $(v_j, v_k)$  也具有第  $i$  种颜色. 所以对顶点  $v_1$  来说,有两种情形:

(1) 点  $v_1$  与点  $v_2, \dots, v_9$  都相邻,根据抽屉原则知,至少有两条边,不妨设为  $(v_1, v_2), (v_1, v_3)$ ,具有相同的颜色,从而  $\triangle v_1 v_2 v_3$  是同色三角形.

(2) 点  $v_1$  与点  $v_2, \dots, v_9$  中的至少一个点不相邻,不妨设点  $v_1$  与点  $v_2$  不相邻. 由于每三点之间至少有一条边,所以从  $v_3, v_4, \dots, v_9$  发出的,另一个端点是  $v_1$  或  $v_2$  的边至少有 7 条,由此可知,点  $v_3, v_4, \dots, v_9$  中至少有 4 个点与点  $v_1$  或  $v_2$  相邻,不妨设点  $v_3, v_4, v_5, v_6$  与点  $v_1$  相邻,如图 1-13 所示. 于是边  $(v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_1, v_5), (v_1, v_6)$  中必定有两条具有相同的颜色,设  $(v_1, v_3), (v_1, v_4)$  同色,则  $\triangle v_1 v_3 v_4$  是同色三角形.

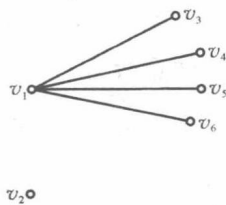


图 1-13

**注:** 若把题中的九改成八,命题就不成立了. 图 1-14 给出的是一个反例.  $v_1, v_2, \dots, v_8$  表示 8 个顶点 1, 2,  $\dots, 12$  表示 12 种颜色,则图中无同色三角形.

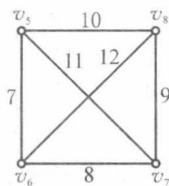
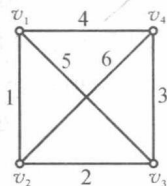


图 1-14

下面这个例子是 2000 年全国高中数学联赛加试第 3 题.

**例 5** 有  $n$  个人, 已知他们中的任意两人至多通电话一次, 他们中的任意  $n-2$  个人之间通电话的总次数相等, 都是  $3^m$  次, 其中  $m$  是自然数. 求  $n$  的所有可能值.

**解** 显然  $n \geq 5$ . 记  $n$  个人为几个点  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . 若  $A_i, A_j$  之间通电话, 则连  $(A_i, A_j)$ . 因此这  $n$  个点中必有边相连, 不妨设为  $(A_1, A_2)$ .

倘若设  $A_1$  与  $A_3$  之间无边, 分别考虑  $n-2$  个点  $A_1, A_4, A_5, \dots, A_n$ ;  $A_2, A_4, A_5, \dots, A_n$ ; 及  $A_3, A_4, A_5, \dots, A_n$ . 由题意知  $A_1, A_2, A_3$  分别与  $A_4, A_5, \dots, A_n$  之间所连边的总数相等, 记为  $k$ .

将  $A_2$  加入到  $A_1, A_4, A_5, \dots, A_n$  中, 则这  $n-1$  个点之间边的总数  $S = 3^m + k + 1$ . 从这  $n-1$  点中任意去掉一点剩下的  $n-2$  个点所连边数都是  $3^m$ , 故每个点都与其余  $n-2$  个点连  $k+1$  条边. 从而

$$S = \frac{1}{2}(n-1)(k+1).$$

同理, 考虑  $A_3$  加入  $A_1, A_4, A_5, \dots, A_n$  中所得的  $n-1$  个点的情况可知边的总数为  $t = 3^m + k = \frac{1}{2}(n-1)k$ .

因为  $S = t + 1$ , 得

$$\frac{1}{2}(n-1)(k+1) = \frac{1}{2}(n-1)k + 1,$$

即  $n = 3$ , 矛盾. 所以  $A_1, A_3$  之间有边.

同理  $A_2, A_3$  之间也有边. 进而  $A_1, A_2$  与所有  $A_i$  ( $i = 3, 4, \dots, n$ ) 之间有边.

对于  $A_i, A_j$  ( $i \neq j$ ), 因为  $A_i$  与  $A_1$  之间有边, 可知  $A_i$  与  $A_j$  之间有边. 因此这  $n$  个点构成一个完全图. 所以

$$3^m = \frac{1}{2}(n-2)(n-3).$$



故  $n = 5$ .

**例6** 有  $n (n > 3)$  个人,他们之间有些人互相认识,有些人互相不认识,而且至少有一个人没有与其他人都认识.问:与其他人都认识的人数的最大值是多少?(美国数学竞赛试题)

**解** 作图  $G$ : 用  $n$  个点表示这  $n$  个人,两顶点相邻当且仅当相应的两个人互相认识.

由于至少有一个人没有与其他人都认识,所以图  $G$  中至少有两点不相邻,设  $v_1, v_2$  之间没有边  $e = (v_1, v_2)$ . 则图  $G$  的边数最多时的图形为  $K_n - e$ , 即从完全图  $K_n$  中去掉边  $e$  后所得的图. 从而与其他顶点都相邻的顶点个数的最大值为  $n - 2$ . 故与其他人都认识的人数的最大值是  $n - 2$ .

下面这个例子是 1988 年第 29 届国际数学奥林匹克试题.

**例7** 设  $n$  为一正整数,且  $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$  是某个集合  $B$  的子集. 设

- (1) 每一个  $A_i$  恰含有  $2n$  个元素;
- (2) 每一个  $A_i \cap A_j (1 \leq i < j \leq 2n + 1)$  恰含有一个元素;
- (3)  $B$  的每个元素至少属于  $A_i$  中的两个.

问对怎样的  $n$ , 可以将  $B$  中元素各标上数 0 或 1, 使得每个  $A_i$  恰含有  $n$  个标上了 0 的元素?

**解** 首先, (3) 中的“至少”实际上也可以改成“恰”. 因为如果有一个元素  $a_1 \in A_1 \cap A_{2n} \cap A_{2n+1}$ , 那么剩下的  $2n - 2$  个子集  $A_2, A_3, \dots, A_{2n-1}$  每个至多含  $A_1$  中一个元素, 从而  $A_1$  中至少有一个元素不属于  $A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_{2n-1} \cup A_{2n} \cup A_{2n+1}$ , 这与 (3) 矛盾.

于是作完全图  $K_{2n+1}$ , 每一个顶点  $v_i$  表示一个子集  $A_i$ , 每一条边  $(v_i, v_j) = b_{ij} (1 \leq i, j \leq 2n + 1, i \neq j)$  表示集  $A_i$  与  $A_j$  所共有的那个元素. 于是题目就转化为: 对怎样的  $n$ , 可以给  $K_{2n+1}$  的每条边贴一个 0 或 1 的标签, 使得从图中任一点  $v_i$  出发的  $2n$  条边中恰有  $n$  条边贴有 0 的标签.

因为  $K_{2n+1}$  有  $n(2n + 1)$  条边, 如果上述贴标签的要求能够满足, 则贴 0 的边共有  $\frac{1}{2}n(2n + 1)$  条, 于是  $n$  必须是偶数.

反之, 若  $n = 2m$  是偶数, 我们把  $K_{2n+1}$  中的边  $(v_i, v_{i-m}), (v_i, v_{i-m+1}), \dots, (v_i, v_{i-1}), (v_i, v_{i+1}), \dots, (v_i, v_{i+m}), i = 1, 2, \dots, 2n + 1$ , 全标上 0, 其余的标上 1, 则得本题所要求的贴标签方法(要注意的是, 顶点的下标的加法是按模  $2n + 1$  进行的, 即  $v_{(2n+1)+i} = v_i$ ).

所以, 当且仅当  $n$  为偶数时, 可以满足题目要求.