

105

TB301

L79

# 材 料 力 学

(II)

龙 述 尧 主 编

湖南大学出版社

1999年·长沙

## 内 容 简 介

《材料力学》(I)是新材料力学全套教材的第2部分。内容包括:扭转和弯曲的几个补充问题、能量方法、静不定结构、动载荷问题、交变应力、矩阵位移法。各章之后附有习题,第1章后面附有求梁的变形的计算机程序,全书后面附有平面刚架的计算机程序和习题答案。

本书可作为高等工业学校机械、建筑、交通、航空、航天、力学、电气、环境、化工等专业的材料力学或工程力学课程的教材,也可供有关工程技术人员参考。

## 材料力学(II)

Cailiao Lixue

龙述尧 主编

- 
- 责任编辑 陈灿华  
 封面设计 谭石山  
 出版发行 湖南大学出版社  
社址 长沙市岳麓山 邮码 410082  
电话 0731-8821691 0731-8821315  
 经 销 湖南省新华书店  
 印 装 湖南大学印刷厂

- 
- 开本 787×1092 16开  印张 11.5  字数 290千  
 版次 1999年11月第1版  1999年11月第1次印刷  
 印数 1-5000  
 书号 ISBN 7-81053-191-3/TU·13  
 定价 15.00元
- 

(湖南大学版图书凡有印装差错,请向承印厂调换)

# 目 次

<b>1 扭转和弯曲的几个补充问题</b>	
1.1 圆柱形密圈螺旋弹簧的应力与变形 .....	(1)
1.2 非圆截面杆扭转的概念 .....	(4)
1.3 薄壁杆件的自由扭转 .....	(6)
1.4 非对称弯曲 .....	(11)
1.5 有限差分法求梁的变形 .....	(15)
习题 .....	(25)
<b>2 能量方法</b>	
2.1 应变能 .....	(28)
2.2 余能 .....	(32)
2.3 应变能和余能的一般表达式 .....	(34)
2.4 卡氏定理 .....	(35)
2.5 虚功原理 .....	(40)
2.6 计算莫尔积分的图乘法 .....	(45)
2.7 最小势能原理 .....	(48)
2.8 互等定理 .....	(54)
习题 .....	(56)
<b>3 静不定结构</b>	
3.1 静不定结构概述 .....	(64)
3.2 用力法解静不定结构 .....	(66)
3.3 对称与反对称性质的利用 .....	(73)
3.4 连续梁及三弯矩方程 .....	(77)
习题 .....	(81)
<b>4 动载荷问题</b>	
4.1 考虑惯性力构件的应力计算 .....	(86)
4.2 杆件受冲击时的应力和变形的计算 .....	(89)
4.3 冲击韧性 .....	(93)
习题 .....	(95)
<b>5 交变应力</b>	
5.1 交变应力与疲劳失效 .....	(99)
5.2 交变应力的分类及其基本参数 .....	(101)
5.3 材料的持久极限及其测定 .....	(103)
5.4 影响构件持久极限的因素及其改善措施 .....	(106)
5.5 材料及构件的持久极限曲线及其简化折线 .....	(111)
5.6 构件在对称循环下的疲劳强度计算 .....	(114)

5.7	非对称循环下的构件疲劳强度计算 .....	(116)
5.8	弯扭组合交变应力下的构件疲劳强度计算 .....	(118)
	习题 .....	(121)
<b>6</b>	<b>矩阵位移法</b>	
6.1	概述 .....	(125)
6.2	局部坐标系中的单元刚度矩阵 .....	(126)
6.3	坐标变换与整体坐标系中的单元刚度矩阵 .....	(129)
6.4	整体刚度矩阵 .....	(132)
6.5	非结点载荷的处理及整体刚度方程的求解 .....	(135)
6.6	平面刚架的计算机程序 .....	(141)
	习题 .....	(147)
	<b>习题答案</b> .....	<b>151</b>
	<b>附 录</b> .....	<b>157</b>
	<b>参考文献</b> .....	<b>176</b>

# 1 扭转和弯曲的几个补充问题

在《材料力学》(I)中,对圆轴的扭转和梁的平面弯曲进行了讨论。这些都是工程中较为简单也较为常见的基本变形。工程中还常有一些更为复杂的扭转和弯曲问题。本章主要讨论圆柱形密圈螺旋弹簧的应力与变形、非圆截面杆的扭转、薄壁杆件的自由扭转以及非对称弯曲,并介绍求解梁弯曲变形的有限差分法。

## 1.1 圆柱形密圈螺旋弹簧的应力与变形

弹簧具有变形大、弹性强等特点,在工程中应用很广。它可以缓冲减振(如车辆轮轴上的弹簧),又可用于控制机械运动(如凸轮机构中的压紧弹簧,内燃机中的气门弹簧等),还可用于测量力的大小(如弹簧秤中的弹簧)。

螺旋弹簧簧丝的轴线是一条空间螺旋线(图 1.1(a)),其应力和变形的精确分析十分复杂。但当螺旋角  $\alpha$  很小时,例如  $\alpha < 5^\circ$ ,便可略去  $\alpha$  角的影响,可近似地认为簧丝的横截面与弹簧轴线在同一平面内。一般将这种弹簧称为密圈螺旋弹簧。此外,当簧丝横截面的直径  $d$  远远小于弹簧圈的平均直径  $D$  时,还可以略去簧丝曲率的影响,近似地用直杆扭转公式计算。本节在上述简化的基础上,讨论密圈螺旋弹簧的应力和变形。

### 1.1.1 弹簧丝横截面上的应力

沿弹簧轴线作用压力  $F$ 。从簧丝的任意横截面假想地将弹簧分成两部分,并取上面部分作

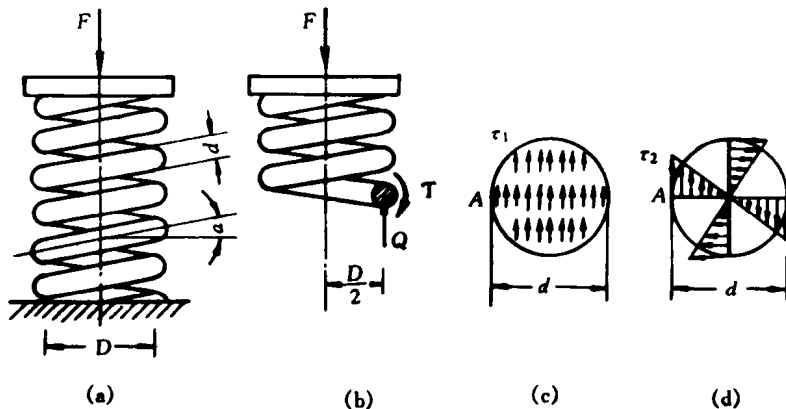


图 1.1

为研究对象(图 1.1(b))。在密圈情况下,可以认为簧丝横截面与弹簧轴线在同一平面内,即压力  $F$  与簧丝横截面在同一平面内。为保持取出部分的平衡,要求横截面上有一个与截面相切的内力系。这个内力系简化为一个通过截面形心的力  $Q$  和一个力偶矩  $T$ 。根据平衡条件,有

$$Q = F, \quad T = \frac{FD}{2} \quad (a)$$

其中:  $Q$  为簧丝横截面上的剪力;  $T$  为横截面上的扭矩。

与剪力  $Q$  对应的剪应力  $\tau_1$ , 按联接件的实用计算方法, 可以认为均匀地分布于横截面上(图 1.1(c))。即

$$\tau_1 = \frac{Q}{A} = \frac{4F}{\pi d^2} \quad (b)$$

与扭矩  $T$  对应的剪应力  $\tau_2$ , 认为与轴线为直线的圆轴的扭转剪应力相同(图 1.1(d)), 其最大剪应力为

$$\tau_{2\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{8FD}{\pi d^3} \quad (c)$$

在簧丝横截面上, 任意点处的总应力是剪切和扭转两种剪应力的矢量和。在靠近轴线的内侧点  $A$  处, 总应力达到最大值, 且

$$\tau_{\max} = \tau_1 + \tau_{2\max} = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{8FD}{\pi d^3} = \frac{8FD}{\pi d^3} \left( 1 + \frac{d}{2D} \right) \quad (d)$$

式中: 括号内的第二项代表剪切的影响, 当  $\frac{D}{d} \geq 10$  时,  $\frac{d}{2D}$  与 1 相比不超过 5%, 显然可以省略。这就相当于忽略剪切的影响, 而只考虑扭转的影响。这样, (d) 式可化为

$$\tau_{\max} = \frac{8FD}{\pi d^3} \quad (1.1)$$

在以上分析中, 用直杆的扭转公式计算应力, 没有考虑簧丝实际上是一个曲杆。这在  $\frac{D}{d}$  较小, 即弹簧的曲率较大时, 自然会引入较大的误差。此外, 认为剪切所引起的剪应力  $\tau_1$  “均匀分布”于截面上, 也是一种计算假定。考虑到簧丝曲率和  $\tau_1$  并非均匀分布, 可求得计算最大剪应力的修正公式:

$$\tau_{\max} = \left( \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0.615}{c} \right) \frac{8FD}{\pi d^3} = k \frac{8FD}{\pi d^3} \quad (1.2)$$

式中:

$$c = \frac{D}{d}, \quad k = \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0.615}{c} \quad (e)$$

$c$  称为弹簧指数;  $k$  为对近似公式(1.1)的一个修正系数, 称为曲度系数。表 1.1 中的  $k$  值, 就是根据(e)式算出的。可以看出,  $c$  越小, 则  $k$  越大。当  $c=4$  时,  $k=1.40$ 。这表明, 如这时按近似公式(1.1)计算应力, 其误差将高达 40%。

表 1.1 螺旋弹簧的曲度系数  $k$

$c$	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10	12	14
$k$	1.40	1.35	1.30	1.28	1.25	1.23	1.21	1.20	1.18	1.17	1.16	1.15	1.14	1.12	1.10

簧丝的强度条件是

$$\tau_{\max} \leq [\tau] \quad (f)$$

式中:  $\tau_{\max}$  是按公式(1.1)求出的最大剪应力,  $[\tau]$  是材料的许用剪应力。弹簧材料一般是弹簧钢, 其许用剪应力  $[\tau]$  的数值颇高。

### 1.1.2 弹簧的变形

弹簧在轴向压力(或拉力)作用下, 轴线方向的总缩短(或伸长)量  $\lambda$ , 就是弹簧的变形(图

2.2(a))。试验表明,在弹性范围内,压力  $F$  与变形  $\lambda$  成正比,即  $F-\lambda$  曲线为一条斜直线(图 1.2(b))。当压力从 0 开始缓慢地增加到其最终值  $F$  时,压力  $F$  所作的功等于斜直线下的阴影部分的面积,即

$$W = \frac{1}{2}F\lambda \quad (g)$$

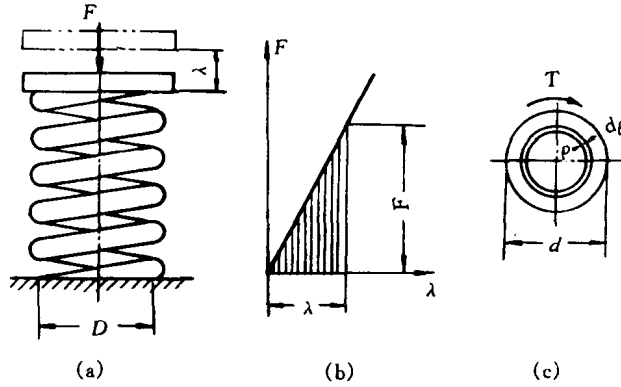


图 1.2

在簧丝横截面上,距圆心为  $\rho$  的任意点处(图 1.2(c)),其扭转剪应力为

$$\tau_\rho = \frac{T\rho}{I_p} = \frac{\frac{1}{2}FD\rho}{\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{16FD\rho}{\pi d^4}$$

在纯剪切应力状态下,单位体积的应变能为

$$u = \frac{\tau_\rho^2}{2G} = \frac{128F^2D^2\rho^2}{G\pi^2d^8} \quad (h)$$

弹簧的应变能为

$$U = \int_V u dV \quad (i)$$

式中,  $V$  为弹簧簧丝的体积。若以  $dA$  表示簧丝横截面上的微分面积,  $ds$  表示沿簧丝轴线的微分长度,则  $dV = dA \cdot ds = 2\pi\rho d\rho ds$ 。积分(i)式的积分区域首先遍及簧丝的横截面,  $\rho$  由 0 到  $\frac{d}{2}$ , 然后遍及弹簧的长度,  $s$  由 0 到  $l$ 。若弹簧的有效圈数(即扣除两端与簧座接触部分后的圈数)为  $n$ , 则  $l = n\pi D$ 。将(h)式代入(i)式,按上述方式进行积分,得

$$\begin{aligned} U &= \int_V u dV = \frac{128F^2D^2}{G\pi^2d^8} \int_0^{d/2} \rho^2 \cdot 2\pi\rho d\rho \int_0^{n\pi D} ds \\ &= \frac{4F^2D^3n}{Gd^4} \end{aligned} \quad (j)$$

由于压力所做的功等于储存于弹簧的应变能,即

$$W = U$$

故有

$$\frac{1}{2}F\lambda = \frac{4F^2D^3n}{Gd^4}$$

由此得到

$$\lambda = \frac{8FD^3n}{Gd^4} = \frac{64FR^3n}{Gd^4} \quad (1.3)$$

式中:  $R = \frac{D}{2}$ , 是弹簧圈的平均半径。

引用记号

$$C = \frac{Gd^4}{8D^3n} = \frac{Gd^4}{64R^3n} \quad (1.4)$$

则(1.3)式可写成

$$\lambda = \frac{F}{C}$$

$C$  越大, 则  $\lambda$  越小。所以,  $C$  代表弹簧抵抗变形的能力, 称为弹簧刚度。

从(1.3)式可以看出,  $\lambda$  与  $d^4$  成反比。如希望弹簧有较好的减振和缓冲作用, 并有较大变形和比较柔软, 则应使弹簧丝直径  $d$  尽可能小一些。于是, 相应的  $\tau_{\max}$  的数值就会增高, 这就要求弹簧材料有较高的  $[\tau]$ 。此外, 根据(1.3)式, 增加圈数和加大平均直径  $D$ , 都可以使  $\lambda$  增加。

**例 1.1** 某柴油机的气阀弹簧, 簧圈平均半径  $R = 59.5 \text{ mm}$ , 簧丝横截面直径  $d = 14 \text{ mm}$ , 有效圈数  $n = 5$ 。材料的  $[\tau] = 350 \text{ MPa}$ ,  $G = 80 \text{ GPa}$ 。弹簧工作时总压缩变形(包括预压变形)为  $\lambda = 55 \text{ mm}$ 。试校核弹簧的强度。

解 由(1.3)式

$$\lambda = \frac{64FR^3n}{Gd^4}$$

可求得弹簧所受压力  $F$ :

$$F = \frac{\lambda G d^4}{64 R^3 n} = \frac{55 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^9 \times (14 \times 10^{-3})^4}{64 \times (59.5 \times 10^{-3})^3 \times 5} = 2510 \text{ (N)}$$

由  $R$  及  $d$  可求得

$$c = \frac{D}{d} = \frac{2R}{d} = \frac{2 \times 59.5}{14} = 8.5$$

由表 1.1 可查出弹簧曲度系数  $k$  的值为 1.17, 故

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= k \frac{8FD}{\pi d^3} = 1.17 \times \frac{8 \times 2510 \times 59.5 \times 2 \times 10^{-3}}{\pi \times (14 \times 10^{-3})^3} \\ &= 325 \text{ (MPa)} < [\tau] \end{aligned}$$

可见, 弹簧满足强度要求。

## 1.2 非圆截面杆扭转的概念

以前我们讨论过等直圆杆的扭转。但有些受扭杆件其横截面并非圆形。例如农业机械中有时采用方轴作为传动轴, 曲轴的曲柄承受扭转, 而其截面是矩形; 车床光杆有时也用截面为方形的杆; 房屋建筑中的梁、柱多为矩形截面, 这些构件除受拉压和弯曲外, 在某些情况下也受到扭矩的作用而产生扭转变形。

取一横截面为矩形的杆, 在其侧面上画出纵向线和横向线(图 1.3(a)), 扭转变形后, 可以看出横向线已变成空间曲线(图 1.3(b)), 表明变形后杆的横截面已不再保持为平面, 而是变为曲面, 这种现象称为翘曲。所以, 平截面假设对非圆截面杆件的扭转分析不适用。

非圆截面杆件的扭转可分为自由扭转和约束扭转。等直杆在两端受扭转力偶矩作用, 且其翘曲不受任何限制的扭转, 属于自由扭转。在这种情况下, 杆件各横截面的翘曲程度相同, 纵向



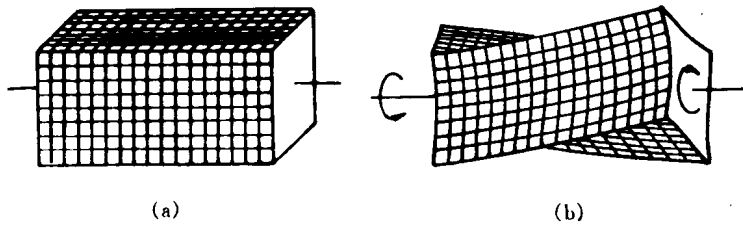


图 1.3

纤维的长度无变化,故横截面上没有正应力而只有剪应力。图 1.4(a)表示“工”字钢的自由扭转。若由于约束条件或受力条件的限制,造成杆件各横截面的翘曲程度不同,则势必引起相邻两截面间纵向纤维的长度发生变化。于是,在横截面上,除剪应力外还有正应力。这种情况称为约束扭转。图 1.4(b)为“工”字钢约束扭转的示意图。象“工”字钢、槽钢等薄壁杆件,约束扭转时横截面上的正应力往往是相当大的。但一些实体杆件,如截面为矩形的杆件,因约束扭转而引起的正应力很小,与自由扭转差别不大。

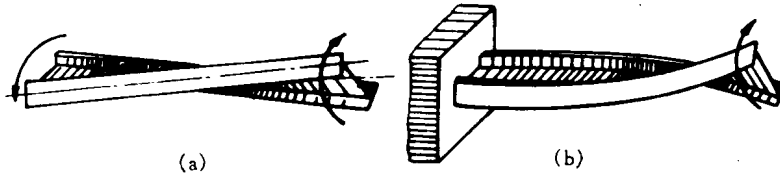


图 1.4

可以证明,杆件扭转时,横截面上边缘各点的剪应力都与截面边界相切。这是因为,如果不相切,则总可用边界切线方向的分量  $\tau_t$  和法线方向的分量  $\tau_n$  来表示(图 1.5(a))。根据剪应力互等定理, $\tau_n$  应与杆件自由表面上的剪应力  $\tau'_n$  相等,但在自由表面上不可能有剪应力  $\tau'_n$ ,即  $\tau'_n = \tau_n = 0$ 。这样,在边缘各点上,就只能可能存在沿边界切线方向的剪应力  $\tau_t$ 。在横截面的凸角处(图 1.5(b)),如果有剪应力,当然可以把它分解成分别沿  $ab$  边和  $ac$  边法线的分量  $\tau_1$  和  $\tau_2$ ,但按照上面的证明, $\tau_1$  和  $\tau_2$  皆应等于 0,故截面凸角处的剪应力等于 0。

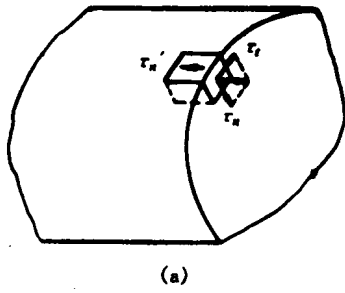
非圆截面杆件的扭转,一般在弹性力学中进行讨论,这里直接引用弹性力学的一些结果,并且只限于横截面为矩形的情况。矩形截面杆扭转时,横截面上剪应力大致分布如图 1.6 所示。边缘点上的剪应力形成与边界相切的顺流,4 个角点上剪应力等于 0。整个横截面上的最大剪应力出现在矩形长边的中点,且由以下公式计算:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha hb^2} \quad (1.5)$$

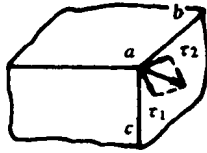
式中: $\alpha$  是一个与比值  $h/b$  有关的系数,其值见表 1.2。短边中点的剪应力  $\tau_1$  是短边上的最大剪应力,并按以下公式计算:

$$\tau_1 = \nu \tau_{\max} \quad (1.6)$$

式中: $\tau_{\max}$  是长边中点的最大剪应力;系数  $\nu$  与比值  $h/b$  有关,见表 1.2。



(a)



(b)

图 1.5

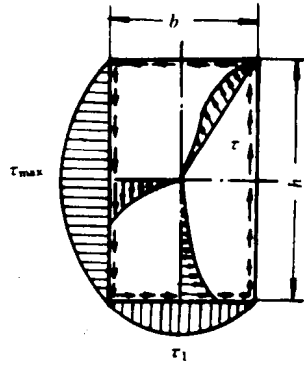


图 1.6

表 1.2 矩形截面杆扭转时的系数  $\alpha, \beta$  和  $\nu$ 

$h/b$	1.0	1.2	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	6.0	8.0	10.0	$\infty$
$\alpha$	0.208	0.219	0.231	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
$\beta$	0.141	0.166	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333
$\nu$	1.000	0.930	0.858	0.796	0.767	0.753	0.745	0.743	0.743	0.743	0.743

杆件两端相对扭转角的计算公式为

$$\varphi = \frac{Tl}{G\beta hb^3} = \frac{Tl}{GI_t} \quad (1.7)$$

式中:

$$GI_t = G\beta hb^3$$

也称为杆件的抗扭刚度。 $\beta$ 也是与比值  $h/b$  有关的系数,见表 1.2。

当  $h/b > 10$  时,截面成为狭长矩形,这时  $\alpha = \beta \approx \frac{1}{3}$ 。如以  $\delta$  表示狭长矩形的短边的长度,则(1.5)和(1.7)式可化为

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{T}{\frac{1}{3}h\delta^2} \\ \varphi &= \frac{Tl}{G\frac{1}{3}h\delta^3} \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

在狭长矩形截面上,扭转剪应力的变化规律如图 1.7 所示。虽然最大剪应力出现在长边的中点,但沿长边各点剪应力实际上变化不大,只是在靠近短边处才迅速减小为 0。

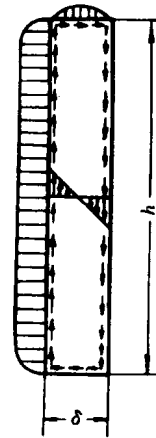


图 1.7

### 1.3 薄壁杆件的自由扭转

为减轻结构本身重量,工程上常采用各种轧制型钢,如“工”字钢、槽钢等;也经常使用薄壁

管状杆件。这类杆件的壁厚远小于横截面的其它两个尺寸(高和宽),称为薄壁杆件。若截面中线是一条封闭的折线或曲线,则称为闭口薄壁杆件(图 1.8(a));若截面中线为一条不封闭的折线或曲线,则称为开口薄壁杆件(图 1.8(b))。本节讨论开口和闭口薄壁杆件的自由扭转。

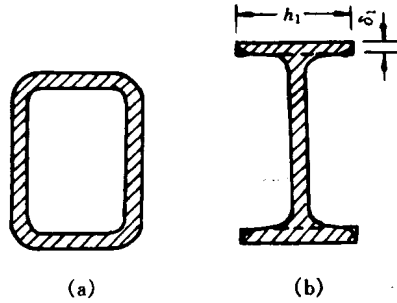


图 1.8

在自由扭转的情况下,横截面上只有剪应力而无正应力。

### 1.3.1 开口薄壁杆件自由扭转的变形

开口薄壁杆件,如槽钢、“工”字钢等,其横截面可以看作是由若干个狭长矩形组成的(图 1.8(b))。自由扭转时,假设横截面在其本身平面内形状不变,即在变形过程中,横截面在其本身平面内的投影只作刚性平面运动,则整个横截面和组成截面的各部分的扭转角相等。若以  $\varphi$  表示整个截面的扭转角,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i$  分别代表各组成部分的扭转角,则

$$\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_i \quad (a)$$

若以  $T$  表示整个截面上的扭矩,  $T_1, T_2, \dots, T_i$  分别表示截面各组成部分上的扭矩,则

$$T = T_1 + T_2 + \dots + T_i = \sum T_i \quad (b)$$

由(1.8)式有

$$\varphi_1 = \frac{T_1 l}{G \cdot \frac{1}{3} h_1 \delta_1^3}, \varphi_2 = \frac{T_2 l}{G \cdot \frac{1}{3} h_2 \delta_2^3}, \dots, \varphi_i = \frac{T_i l}{G \cdot \frac{1}{3} h_i \delta_i^3} \quad (c)$$

由式(c)解出  $T_1, T_2, \dots, T_i$ , 代入(b)式并结合(a)式,可得到

$$\begin{aligned} T &= \varphi \cdot \frac{G}{l} \left( \frac{1}{3} h_1 \delta_1^3 + \frac{1}{3} h_2 \delta_2^3 + \dots + \frac{1}{3} h_i \delta_i^3 \right) \\ &= \varphi \cdot \frac{G}{l} \sum \frac{1}{3} h_i \delta_i^3 \end{aligned} \quad (d)$$

引用记号

$$I_t = \sum \frac{1}{3} h_i \delta_i^3 \quad (e)$$

则(d)式可写成

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_t} \quad (f)$$

式中,  $GI_t$  即为抗扭刚度。

在组成截面的任一个狭长矩形上,长边各点剪应力可由(1.8)式进行计算:

$$\tau_i = \frac{T_i}{\frac{1}{3} h_i \delta_i^2} \quad (g)$$

由于  $\varphi = \varphi_i$ , 故由(c)及(f)两式得

$$\frac{T_i l}{G \frac{1}{3} h_i \delta_i^3} = \frac{Tl}{GI_t}$$

由此解出

$$T_i = \frac{\frac{1}{3} h_i \delta_i^3}{I_i} T$$

代入(g)式得

$$\tau_i = \frac{T \delta_i}{I_i} \quad (h)$$

由(h)式可以看出,当 $\delta_i$ 为最大时,剪应力 $\tau_i$ 达最大值,故 $\tau_{\max}$ 发生在宽度最大的狭长矩形的长边上,且

$$\tau_{\max} = \frac{T \delta_{\max}}{I_i} \quad (1.9)$$

沿截面的边缘,剪应力与边界相切,形成顺流,如图1.9所示。因而,在同一厚度线的两端,剪应力方向相反。

计算槽钢、“工”字钢等开口薄壁杆件的 $I_i$ 时,应对(e)式略加修正。这是因为在这些型钢截面上,各狭长矩形连接处有圆角,翼缘内侧有斜率,增加了杆件的抗扭刚度。修正公式为

$$I_i = \eta \cdot \frac{1}{3} \sum h_i \delta_i^3 \quad (i)$$

式中: $\eta$ 为修正系数。对于角钢, $\eta=1.00$ ;对于槽钢, $\eta=1.12$ ;对于“T”字钢, $\eta=1.15$ ;对于“工”字钢, $\eta=1.20$ 。

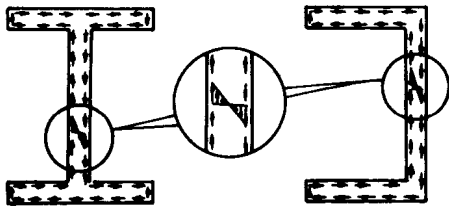


图 1.9

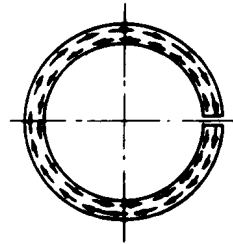


图 1.10

中线为曲线的开口薄壁杆件,若其截面的厚度不变(图1.10),则计算时可将其展直,按狭长矩形截面加以计算。

关于闭口薄壁杆件,这里只讨论横截面仅有内外两个边界的单孔薄壁管形杆件(图1.11(a))。

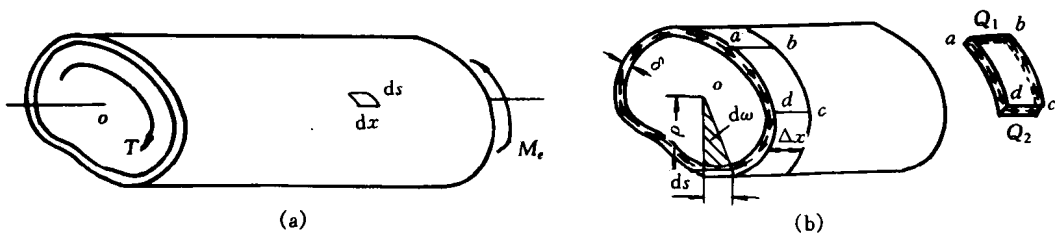


图 1.11

杆件的壁厚 $\delta$ 沿截面中线可以变化,但与杆件的其他尺寸相比总是很小,因此,可以认为

沿厚度方向剪应力  $\tau$  均匀分布。这样,沿截面中线每单位长度内的剪力就可以写成  $\tau\delta$ ,且  $\tau\delta$  与截面中线相切。用两个相邻的横截面和两个任意纵向截面,从杆中取出一部分  $abcd$ (图 1.11(b))。若截面在  $a$  点的厚度为  $\delta_1$ ,剪应力为  $\tau_1$ ,在  $d$  点的厚度和剪应力分别为  $\delta_2$  和  $\tau_2$ ,则根据剪应力互等定理,在纵向面  $ab$  和  $cd$  上的剪力分别为

$$Q_1 = \tau_1\delta_1\Delta x, \quad Q_2 = \tau_2\delta_2\Delta x$$

自由扭转时,横截面上无正应力, $bc$  和  $ad$  两侧面上没有平行于杆件轴线的力。将作用于  $abcd$  部分上的力向杆件轴线方向投影,由平衡条件可知:

$$Q_1 = Q_2$$

即

$$\tau_1\delta_1\Delta x = \tau_2\delta_2\Delta x$$

故有

$$\tau_1\delta_1 = \tau_2\delta_2$$

$a$  和  $b$  是横截面上的任意两点,这说明在横截面上的任意点,剪应力与壁厚的乘积不变。若以  $f$  代表这一乘积,则

$$f = \tau\delta = \text{常量}$$

$f$  称为剪力流。沿截面中线截取微分长度  $ds$ ,在中线长为  $ds$  的微分面积上剪力为  $\tau\delta ds = f ds$ ,它与截面中线相切。若对截面内的  $o$  点取矩,则整个截面上内力对  $o$  点的矩即为截面上的扭矩,于是有

$$T = \int_s f ds \cdot \rho = f \int_s \rho ds$$

式中: $\rho$  为由  $o$  点到截面中线的切线的垂直距离; $\rho ds$  等于图 1.11(b)中三角形面积(图中阴影部分) $d\omega$  的两倍。所以,积分  $\int_s \rho ds$  是截面中线所围面积  $\omega$  的两倍,即

$$T = 2f\omega$$

$$f = \frac{T}{2\omega} \quad (1.10)$$

由于  $f = \delta\tau$  是常量,故在  $\delta$  最小处,剪应力最大,即

$$\tau_{\max} = \frac{f}{\delta_{\min}} = \frac{T}{2\omega\delta_{\min}} \quad (1.11)$$

### 1.3.2 闭口薄壁杆件自由扭转的变形

由(1.10)式求得横截面上任一点处的剪应力为

$$\tau = \frac{f}{\delta} = \frac{T}{2\omega\delta}$$

在自由扭转的情况下,横截面上的扭矩  $T$  与外加扭转力偶矩  $M_t$  相等,所以,上式又可写成

$$\tau = \frac{M_t}{2\omega\delta}$$

纯剪切状态下单位体积的应变能为

$$u = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{M_t^2}{8G\omega^2\delta^2}$$

在杆件内取  $dV = \delta dx ds$  的单元体, $dV$  的应变能为

$$dU = u dV = \frac{M_t^2}{8G\omega^2\delta^2} \cdot \delta dx ds$$

整个杆件的应变能为

$$U = \int dU = \int_l \left[ \oint \frac{M_x^2}{8G\omega^2\delta} ds \right] dx = \frac{M_x^2 l}{8G\omega^2} \oint \frac{ds}{\delta}$$

在线弹性范围内,若杆件两端的相对扭转角为  $\varphi$ ,则外加扭转力偶矩  $M_x$  在变形过程中所作的功为

$$W = \frac{1}{2} M_x \varphi$$

由  $U=W$ , 得

$$\frac{1}{2} M_x \varphi = \frac{M_x^2 l}{8G\omega^2} \oint \frac{ds}{\delta}$$

由此求得

$$\varphi = \frac{M_x l}{4G\omega^2} \oint \frac{ds}{\delta} \quad (1.12)$$

若杆件的壁厚  $\delta$  不变,则上式化为

$$\varphi = \frac{M_x l S}{4G\omega^2 \delta} \quad (1.13)$$

式中:  $S = \oint ds$ , 为截面中线的长度。

例 1.2 截面为圆环形的开口和闭口薄壁杆件如图 1.12 所示,设两杆具有相同的平均半径  $r$  和壁厚  $\delta$ 。试比较两者的扭转强度和刚度。

解 计算环形开口薄壁杆件的扭转应力和变形时,可以把环形展直,看作狭长矩形。这时矩形的长边为  $h=2\pi r$ , 宽为  $\delta$ , 于是有

$$\frac{1}{3} h \delta^3 = \frac{2}{3} \pi r \delta^3$$

$$\frac{1}{3} h \delta^2 = \frac{2}{3} \pi r \delta^2$$

由 (1.8) 式可求得环形开口薄壁杆件的应力和扭转角为

$$\tau_1 = \frac{T}{\frac{1}{3} h \delta^2} = \frac{3T}{2\pi r \delta^2}$$

$$\varphi_1 = \frac{Tl}{G \cdot \frac{1}{3} h \delta^3} = \frac{3Tl}{2\pi r \delta^3 G}$$

环形闭口薄壁截面的  $\omega$  和  $S$  分别为

$$\omega = \pi r^2, \quad S = 2\pi r$$

将  $\omega$  和  $S$  分别代入 (1.11) 式和 (1.13) 式, 求得

$$\tau_2 = \frac{T}{2\omega\delta} = \frac{T}{2\pi r^2\delta}$$

$$\varphi_2 = \frac{TlS}{4G\omega^2\delta} = \frac{Tl}{2G\pi r^3\delta}$$

当  $T$  和  $l$  相同时, 两者应力之比为

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = 3 \left( \frac{r}{\delta} \right)$$

扭转角之比为

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = 3 \left( \frac{r}{\delta} \right)^2$$

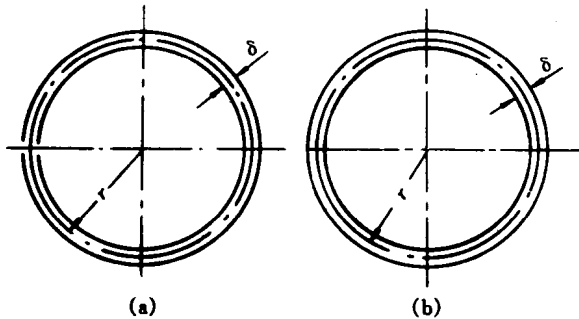


图 1.12

由于  $r$  远远大于  $\delta$ , 所以开口薄壁杆件的应力和变形都远远大于同样情况下闭口薄壁杆件的应力和变形。

## 1.4 非对称弯曲

当梁具有纵向对称面, 且载荷都作用于这一对称面内时, 梁的挠曲线为这一对称面内的曲线。这是人们所熟悉的平面弯曲。下面讨论梁无纵向对称面, 或者虽有纵向对称面, 但载荷并不在这个平面内的情况。

### 1.4.1 纯弯曲问题

#### 1.4.1.1 几何关系和物理关系

设以梁的轴线为  $x$  轴, 横截面内通过形心的两根任意轴为  $y$  轴和  $z$  轴 (图 1.13)。显然,  $y$  轴和  $z$  轴并不一定是形心主惯性轴。可以认为两端的纯弯曲力偶矩在  $xy$  平面内, 并将其记为  $M_x$ 。这并不影响问题的普遍性, 因为作用于两端的弯曲力偶矩, 总可以分解为分别在  $xy$  和  $xz$  两个平面中的力偶矩  $M_x$  和  $M_y$ , 故可以先讨论  $M_x$  引起的应力; 再讨论  $M_y$  引起的应力, 然后将两者叠加。对当前讨论的纯弯曲问题, 仍采用如下两个假设, 即

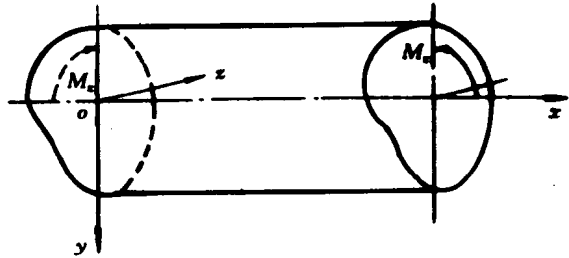


图 1.13

(1) 平面假设;

(2) 纵向纤维间无正应力。

以相邻的两个横截面从梁中取出长为  $dx$  的微段, 如图 1.14(a) 所示。图中画阴影线的曲

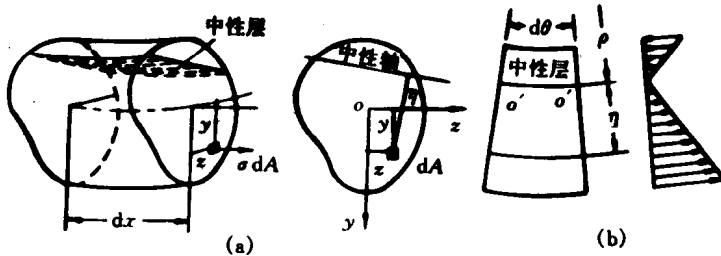


图 1.14

面为中性层, 它与横截面的交线为中性轴。根据平面假设, 变形后两相邻横截面各自绕中性轴相对转动  $d\theta$  角, 并仍保持为平面。图 1.14(b) 表示垂直于中性轴的纵向平面, 它与中性层的交线为  $o'o'$ ,  $\rho$  为  $o'o'$  的曲率半径。距中性层为  $\eta$  的纤维的应变为

$$\epsilon = \frac{(\rho + \eta)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{\eta}{\rho} \quad (a)$$

所以, 纵向纤维的应变  $\epsilon$  与它到中性层的距离  $\eta$  成正比。当然, 中性层的位置亦即中性轴在截面上的位置尚待确定。(a) 式即为变形几何关系。

根据纵向纤维间无正应力的假设,各纵向纤维均为单向拉伸或压缩。若应力低于比例极限,则按虎克定律,有

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\eta}{\rho} \quad (\text{b})$$

此即应力与应变之间的物理关系。它表明,横截面上任一点的正应力与该点到中性轴的距离  $\eta$  成正比(图 1.14(b))。

#### 1.4.1.2 静力关系

横截面上只有由微内力  $\sigma dA$  组成的内力系,它是垂直于横截面的空间平行力系,与它相应的内力分量是轴力  $N$ 、弯矩  $M_z$  和  $M_y$ ,分别为

$$N = \int_A \sigma dA, \quad M_y = \int_A z \sigma dA, \quad M_z = \int_A y \sigma dA$$

横截面左侧的外力,只有  $xy$  平面中的弯曲力偶矩,这里也记为  $M_z$ ,除此之外无其他外力。因此,截面左段梁的平衡方程是

$$N = \int_A \sigma dA = 0 \quad (\text{c})$$

$$M_y = \int_A z \sigma dA = 0 \quad (\text{d})$$

$$M_z = \int_A y \sigma dA \quad (\text{e})$$

将(b)式代入(c)式,得

$$\int_A \sigma dA = \frac{E}{\rho} \int_A \eta dA = 0$$

因  $\frac{E}{\rho} \neq 0$ ,故有  $\int_A \eta dA = 0$ 。这里,  $\eta$  是  $dA$  到中性轴的距离。这表明横截面  $A$  对中性轴的静矩等于 0,中性轴必然通过截面形心。于是可把图 1.14 所示的中性轴改画成图 1.15 所示的位置。这样,联接各截面形心的轴线就在中性层内,长度不变。在横截面上,以  $\theta$  表示由  $y$  轴到中性轴的夹角,且以反时针方向为正。 $dA$  到中性轴的距离  $\eta$  就可表示为

$$\eta = y \sin \theta - z \cos \theta$$

代入(b)式,得

$$\sigma = \frac{E}{\rho} (y \sin \theta - z \cos \theta) \quad (\text{f})$$

将(f)式代入平衡方程(d),得

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{E}{\rho} \left( \sin \theta \int_A y z dA - \cos \theta \int_A z^2 dA \right) \\ &= \frac{E}{\rho} (I_{yz} \sin \theta - I_y \cos \theta) = 0 \end{aligned}$$

由此求得

$$\tan \theta = \frac{I_y}{I_{yz}} \quad (1.14)$$

中性轴通过截面形心,  $y$  轴与它的夹角  $\theta$  又可用上式确定,所以中性轴的位置就可完全确

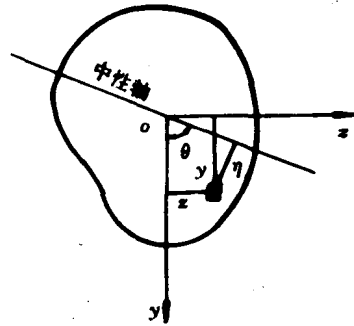


图 1.15



定。

把(f)式代入平衡方程(e)得

$$\begin{aligned} M_z &= \frac{E}{\rho} \left( \sin\theta \int_A y^2 dA - \cos\theta \int_A yz dA \right) \\ &= \frac{E}{\rho} (I_z \sin\theta - I_{yz} \cos\theta) \end{aligned} \quad (g)$$

从(f)式和(g)式中消去 $\frac{E}{\rho}$ ,得

$$\sigma = \frac{M_z(I_y y - I_{yz} z)}{I_y I_z - I_{yz}^2} \quad (1.15)$$

这是仅在 $xy$ 平面内作用纯弯曲力偶矩 $M_z$ ,且 $xy$ 平面并非形心主惯性平面时弯曲正应力的计算公式。这时,弯曲变形(挠度)发生在垂直于中性轴的纵向平面内,它与 $M_z$ 的作用平面 $xy$ 并不重合。

若只在 $xz$ 平面内作用纯弯曲力偶矩 $M_y$ ,则可用导出公式(1.15)的同样方法,求得相应的正应力计算公式,为

$$\sigma = \frac{M_y(I_z z - I_{yz} y)}{I_y I_z - I_{yz}^2} \quad (1.16)$$

一般情况是在包含杆件轴线的任意纵向平面内,作用一对纯弯曲力偶矩。这时,可把这一对纯弯曲力偶矩分解成作用于 $xy$ 和 $xz$ 两平面内的 $M_z$ 和 $M_y$ ,于是叠加(1.15)式和(1.16)式,得相应的弯曲正应力为

$$\sigma = \frac{M_z(I_y y - I_{yz} z)}{I_y I_z - I_{yz}^2} + \frac{M_y(I_z z - I_{yz} y)}{I_y I_z - I_{yz}^2} \quad (1.17)$$

#### 1.4.1.3 一般情况下中性轴位置的确定

若以 $y_0, z_0$ 表示中性轴上任一点的坐标,因中性轴上各点的正应力等于0,则将 $y_0, z_0$ 代入(1.17)式,应有

$$\sigma = \frac{M_z(I_y y_0 - I_{yz} z_0)}{I_y I_z - I_{yz}^2} + \frac{M_y(I_z z_0 - I_{yz} y_0)}{I_y I_z - I_{yz}^2} = 0$$

或者写成

$$(M_z I_y - M_y I_{yz}) y_0 + (M_y I_z - M_z I_{yz}) z_0 = 0 \quad (h)$$

这是中性轴的方程,表明中性轴是通过原点(截面形心)的一条直线。如以 $\theta$ 表示由 $y$ 轴到中性轴的夹角,且以反时针方向为正,则由(h)式得

$$\tan\theta = \frac{z_0}{y_0} = -\frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{M_y I_z - M_z I_{yz}} \quad (1.18)$$

#### 1.4.1.4 两种特殊情况

(1) 若只在 $xy$ 平面内作用纯弯曲力偶矩 $M_z$ ,且 $xy$ 平面为形心主惯性平面,即 $y, z$ 轴为截面的形心主惯性轴,则因 $I_{yz}=0, M_y=0$ , (1.17)式或(1.15)式都可化为

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z} \quad (1.19)$$

而且由(1.14)式或(1.18)式都可得出 $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,故中性轴与 $z$ 轴重合。垂直于中性轴的 $xy$ 平面,既是梁的挠曲线所在的平面,又是弯曲力偶矩 $M_z$ 的作用平面。这种情况即为平面弯曲。显然,对于载荷与弯曲变形都在纵向对称面内的弯曲,就属于平面弯曲。此外,对实体杆件,若弯曲力