结构有限元
及ANSYS工程软件应用

Structure Finite Element
and ANSYS Engineering Software Application

马永斌 何鹏飞 编著

蘭州大學出版社
LANZHOU UNIVERSITY PRESS

结构有限元
及ANSYS工程软件应用

Structure Finite Element
and ANSYS Engineering Software Application

马永斌 何鹏飞 编著

蘭州大學出版社
LANZHOU UNIVERSITY PRESS

图书在版编目（ＣＩＰ）数据

结构有限元及ANSYS工程软件应用 / 马永斌，何鹏飞编著. -- 兰州 : 兰州大学出版社，2017.11
ISBN 978-7-311-05260-7

Ⅰ. ①结… Ⅱ. ①马… ②何… Ⅲ. ①有限元分析—应用软件 Ⅳ. ①O241.82-39

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第278753号

策划编辑　张爱民
责任编辑　郝可伟
封面设计　陈　文

书　　名　结构有限元及ANSYS工程软件应用
作　　者　马永斌　何鹏飞　编著
出版发行　兰州大学出版社　（地址:兰州市天水南路222号　730000）
电　　话　0931-8912613(总编办公室)　0931-8617156(营销中心)
　　　　　0931-8914298(读者服务部)
网　　址　http://www.onbook.com.cn
电子信箱　press@lzu.edu.cn
印　　刷　虎彩印艺股份有限公司
开　　本　710 mm×1020 mm　1/16
印　　张　12.25
字　　数　247千
版　　次　2017年11月第1版
印　　次　2017年11月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-311-05260-7
定　　价　29.00元

前　言

有限元方法（FEM，Finite Element Method）是利用数学近似的方法对真实物理系统（几何和载荷工况）进行模拟。利用简单而又相互作用的元素，即单元，就可以用有限数量的未知量去逼近无限未知量的真实系统。

有限元方法是用较简单的问题代替复杂问题后再求解。它将求解域看成是由许多称为有限元的小的互连子域组成，对每一单元假定一个合适的（较简单的）近似解，然后推导求解这个域总的满足条件（如结构的平衡条件），从而得到问题的解。这个解不是准确解，而是近似解，因为实际问题被较简单的问题所代替。由于大多数实际问题难以得到准确解，而有限元不仅计算精度高，而且能适应各种复杂形状，因而成为行之有效的工程分析手段。

有限元方法中的有限元是那些集合在一起能够表示实际连续域的离散单元。有限元方法的概念早在几个世纪前就已产生并得到了应用，例如用多边形（有限个直线单元）逼近圆来求得圆的周长，但作为一种方法而被提出，则是最近的事。有限元方法最初被称为矩阵近似方法，应用于航空器的结构强度计算，并由于其方便性、实用性和有效性而引起从事力学研究科学家的浓厚兴趣。经过短短数十年的努力，随着计算机技术的快速发展和普及，有限元方法迅速从结构工程强度分析计算扩展到几乎所有的科学技术领域，成为一种丰富多彩、应用广泛并且实用高效的数值分析方法。

有限元方法发展至今，已成为工程数值分析的有力工具，广泛应用于各个领域。就固体力学而言，在静力分析、动力分析及稳定性分析或者线性分析、非线性分析方面，有限元方法的应用都取得了巨大的成功，利用它已成功地解决了许多有重大意义的问题。

纵观当今有限元方法的发展，与其对应的计算机辅助工程分析（CAE）软件具有如下发展趋势：

1.CAE软件与各种CAD软件的无缝集成

为了满足解决复杂工程问题的要求，许多CAE软件都开发了与CAD软件（例如Pro/ENGINEER、Unigraphics、SolidEdge、SolidWorks、IDEAS、Bentley和AutoCAD等）的接口。有些CAE软件为了实现和CAD软件的无缝集成而采用了CAD的建模技术，如ADINA软件由于采用了基于Parasolid内核的实体建模技

术，能和以Parasolid为核心的CAD软件（如Unigraphics、SolidEdge、SolidWorks）实现真正无缝的双向数据交换。

2.由求解线性问题发展到求解非线性问题

随着科学技术的发展，线性理论已经远远不能满足设计的要求，许多工程问题如材料的破坏与失效、裂纹扩展等仅靠线性理论根本不能解决，必须进行非线性分析求解，如金属成形问题需要同时考虑结构的大位移、大应变（几何非线性）和塑性（材料非线性）；对塑料、橡胶、陶瓷、混凝土及岩土等材料进行分析或需考虑材料的塑性、蠕变效应时则必须考虑材料非线性。

3.由单一结构问题求解发展到多场耦合问题的求解

用于求解结构线性问题的有限元方法已经比较成熟，而通过有限元方法解决多场耦合问题是另一发展方向。如金属成形时由于塑性功而产生的“热力耦合”问题，流体在弯管中流动时产生的“流固耦合”问题等。

4.程序面向用户具有的开放性

随着商业化的提高，为了满足用户的需求，必须给用户一个开放的环境，允许用户根据自己的实际情况对软件进行扩充，包括自定义单元特性、自定义材料本构（结构本构、热本构、流体本构）、自定义流场边界条件、自定义结构断裂判据和裂纹扩展规律等等。

本书在编写过程中得到了许多有限元爱好者的帮助与支持。本书的部分资料来源于ANSYS的验证算例和书后所列参考文献，特向其作者表示感谢！同时非常感谢兰州大学出版社的各位编辑为本书的出版所付出的辛勤工作！

全书分为两篇，第一篇（第一至四章）由何鹏飞编写，约8万字；第二篇（第五至十二章）由马永斌编写，约16万字。马连生、宋曦、何天虎、赵永刚、杨静宁、滕兆春、李清禄、张靖华、赵玉峰等参与了编写指导工作。马永斌的硕士研究生彭玮、李琪、刘泽权参与了书稿校对。

由于编写者时间仓促、水平有限，书中难免存在缺点或错误，敬请批评指正。

作者

2017年6月

目 录

第一篇 有限元分析基本原理

第二篇 ANSYS工程软件应用

第一篇

有限元分析基本原理

第一章　有限元基础理论

1.1　有限元分析概念

有限元法：把求解区域看作由许多小的在节点处相互连接的单元（子域）所构成，其模型给出基本方程的分片（子域）近似解，由于单元（子域）可以被分割成各种形状和大小不同的尺寸，所以它能很好地适应复杂的几何形状、复杂的材料特性和复杂的边界条件。

有限元模型：真实系统理想化的数学抽象。由一些形状简单的单元组成，单元之间通过节点连接，并承受一定载荷。

有限元分析：利用数学近似的方法对真实物理系统（几何和载荷工况）进行模拟。利用简单而又相互作用的元素（单元），就可以用有限数量的未知量去逼近无限未知量的真实系统。

1.2　有限元理论基础

有限元方法的基础是变分原理和加权余量法，其基本求解思想是把计算域划分为有限个互不重叠的单元，在每个单元内，选择一些合适的节点作为求解函数的插值点，将微分方程中的变量改写成由各变量或其导数的节点值与所选用的插值函数组成的线性表达式，借助于变分原理或加权余量法，将微分方程离散求解。采用不同的权函数和插值函数形式，即可构成不同的有限元方法。

1.2.1　加权余量法

采用使余量的加权函数为零，求得微分方程近似解的方法称为加权余量法（Weighted Residual Method，WRM）。加权余量法是一种直接从所需求解的微分方程及边界条件出发，寻求边值问题近似解的数学方法。加权余量法是求解微分方程近似解的一种有效的方法。

设问题的控制微分方程为：

在 V 域内　　$L(u)-f=0$　　(1.1)

在 S 边界上　　$B(u)-g=0$　　(1.2)

式中，

L 、B 分别为微分方程和边界条件中的微分算子；

f 、g 为与未知函数 u 无关的已知函数域值；

u 为问题待求的未知函数。

当利用加权余量法求近似解时，首先在求解域上建立一个试函数 W_0 ，W_0 一般具有如下形式：

$$W_0=\sum_{i=1}^{n}C_iN_i=NC \tag{1.3}$$

式中，C_i 为待定系数，也可称为广义坐标；N_i 为取自完备函数集的线性无关的基函数。

由于 W_0 一般只是待求函数 u 的近似解，因此将式（1.3）代入式（1.1）和式（1.2）后将得不到满足，若记

$$\begin{cases}R_{\mathrm{I}}=L(W_0)-f & \text{在}V\text{域内}\\ R_{\mathrm{B}}=B(W_0)-g & \text{在}S\text{边界上}\end{cases} \tag{1.4}$$

显然 R_{I} 、R_{B} 反映了试函数与真实解之间的偏差，它们分别被称作内部余量和边界余量。

若在域 V 内引入内部权函数 W_{I} ，在边界上引入边界权函数 W_{B} ，则可以建立 n 个消除余量的条件，一般可表示为：

$$\int_V W_{\mathrm{I}i}R_{\mathrm{I}}\mathrm{d}V+\int_S W_{\mathrm{B}i}R_{\mathrm{B}}\mathrm{d}S=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1.5}$$

不同的权函数 $W_{\mathrm{I}i}$ 和 $W_{\mathrm{B}i}$ 反映了不同的消除余量的准则。从上式可以得到求解待定系数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的代数方程组。一经解得待定系数，由式（1.3）即可得所需边值问题的近似解。

由于试函数 W_0 的不同，余量 R_{I} 和 R_{B} 可有如下三种情况，

（1）内部法

试函数满足边界条件，即 $R_{\mathrm{B}}=B(W_0)-g$ ，此时消除余量的条件为

$$\int_V W_{\mathrm{I}i}R_{\mathrm{I}}\mathrm{d}V=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1.6}$$

（2）边界法

试函数满足控制方程，即 $R_I=L(W_0)-f$ ，此时消除余量的条件为

$$\int_S W_{\mathrm{B}i}R_{\mathrm{B}}\mathrm{d}S=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1.7}$$

（3）混合法

试函数满足控制方程和边界条件，此时用式（1.5）消除余量。

混合法对于试函数的选取最方便，但在相同精度条件下，工作量最大。对内部法和边界法必须使基函数事先满足一定条件，这对复杂结构分析往往有一定困

难，但试函数一经建立，其工作量较小。

无论采用何种方法，在建立试函数时均应注意以下几点：

（a）试函数应由完备函数集的子集构成。已被采用过的试函数有幂级数、三角级数、样条函数、贝赛尔函数、切比雪夫和勒让德多项式等等。

（b）试函数应具有直到比消除余量的加权积分表达式中最高阶导数低一阶的导数连续性。

（c）试函数应与问题的解析解或问题的特解相关联。若计算问题具有对称性，应充分利用它。

显然，任何独立的完全函数集都可以作为权函数。按照对权函数的不同选择得到不同的加权余量计算方法，主要有：子域法、配点法、最小二乘法、矩法和伽辽金法。其中伽辽金法的精度最高。

以内部法为例，按权函数分类时加权余量的五种基本方法如下。

（1）子域法（Subdomain Method）

将求解域 V 划分为 n 个子域 V_i，在每个子域内令权函数等于1，在子域外取权函数为0，即，

$$W_{\mathrm{I}i}=\begin{cases}1 & \text{在}V_i\text{域内}\\ 0 & \text{在}V_i\text{域外}\end{cases} \tag{1.8}$$

如果在各个子域内分别选取权函数，则其在求解形式上类似于有限元法。

（2）配点法（Collocation Method）

子域法是令余量在一个子域上的总和为0，而配点法是使余量在指定的 n 个点（配点）上等于0，权函数为

$$W_{\mathrm{I}i}=\delta(P-P_i)$$

式中，δ 为Dirac（狄拉克）函数，其定义为，P、P_i 分别代表求解域内任一点和配点。

$$\begin{cases}\delta(x-x_i)=\begin{cases}0 & x\neq x_i\\ \infty & x=x_i\end{cases}\\ \int_a^b\delta(x-x_i)\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & x_i\notin[a,b]\\ 1 & x_i\in[a,b]\end{cases}\end{cases} \tag{1.9}$$

此法只在配点上保证余量为0，不需要做积分计算，所以为最简单的加权余量计算方法。

（3）最小二乘法（Least Square Method）

通过使在整个求解域上余量的平方和取极小来建立消除余量的条件。

若记余量的平方和为 $I(C)$，即 $I(C)=\int_V R_{\mathrm{I}}^2\mathrm{d}V=\int_V R_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}R_{\mathrm{I}}\mathrm{d}V$，则极值条件为

$$\frac{\partial I(C)}{\partial C}=2\int_V\left(\frac{\partial R_{\mathrm{I}}}{\partial C}\right)^{\mathrm{T}}R_{\mathrm{I}}\mathrm{d}V=0 \tag{1.10}$$

此法权函数为

$$W_{\mathrm{I}i}=\frac{\partial R_{\mathrm{I}}}{\partial C_i} \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1.11}$$

（4）伽辽金法（Galerkin Method）

使余量与每一个基函数正交，即以基函数作为权函数。

$$W_{\mathrm{I}i}=N_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1.12}$$

当试函数 W_0 包含整个完备函数集时，此法必能够得到精确解。

（5）矩法（Method of Moment）

与伽辽金法相似，用完备函数集作为权函数，其与伽辽金法的区别在于，它与试函数无关，消除余量的条件是从0开始的各阶矩阵为零。

对于一维问题：$W_{\mathrm{I}i}=x^{i-1} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$ （1.13）

对于二维问题：$W_{\mathrm{I}i}=x^{i-1}y^{i-1} \quad (i=1,2,\cdots,n)$ （1.14）

上述五种方法，如果待定系数足够多，即高阶近似时，精度彼此相近；对于低阶近似，最小二乘法、伽辽金法和矩法的求解精度要高于子域法和配点法。

1.2.2 虚功原理

虚功原理包含虚位移原理和虚应力原理，是虚位移原理和虚应力原理的总称。它们都可以认为是与某些控制方程相等效的积分“弱”形式。

虚功原理：变形体中任意满足平衡的力系在任意满足协调条件的变形状态上做的虚功等于零，即体系外力的虚功与内力的虚功之和等于零。

虚位移原理是平衡方程和力的边界条件的等效积分的“弱”形式；

虚应力原理是几何方程和位移的边界条件的等效积分的“弱”形式。

● 虚位移原理的力学意义：

如果力系是平衡的，则它们在虚位移和虚应变上所做的功的总和为零。反之，如果力系在虚位移（及虚应变）上所做的功的和等于零，则它们一定满足平衡方程。所以，虚位移原理表述了力系平衡的必要条件。一般而言，虚位移原理不仅可以用于线弹性问题，而且可以用于非线性弹性及弹塑性等非线性问题。

● 虚应力原理的力学意义：

如果位移是协调的，则虚应力和虚边界约束反力在它们上面所做的功的总和为零。反之，如果上述虚力系在它们上面所做的功的和为零，则它们一定是满足协调的。所以，虚应力原理表述了位移协调的必要条件。

虚应力原理可以应用于线弹性以及非线性弹性等不同的力学问题。但是必须指出，无论是虚位移原理还是虚应力原理，它们所依赖的几何方程和平衡方程都是基于小变形理论的，它们不能直接应用于基于大变形理论的力学问题。

1.2.3 最小总势能法

应变能：作用在物体上的外载荷会引起物体变形，变形期间外力所做的功以弹性能的形式储存在物体中，即为应变能。

由 n 个单元和 m 个节点组成的物体的总势能等于总应变能和外力所做功

的差：

$$\Pi = \sum_{e=1}^{n} \Lambda^{(e)} - \sum_{i=1}^{m} F_i u_i \tag{1.15}$$

最小势能原理：对于一个稳定的系统，相对于平衡位置发生的位移总会使系统的总势能最小，即：

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i}\sum_{e=1}^{n} \Lambda^{(e)} - \frac{\partial}{\partial u_i}\sum_{i=1}^{m} F_i u_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \tag{1.16}$$

1.3　有限元法的收敛性

有限元法是一种数值分析方法，因此应考虑收敛性问题。

有限元法的收敛性是指：当网格逐渐加密时，有限元解答的序列收敛到精确解；或者当单元尺寸固定时，每个单元的自由度数越多，有限元的解答就越趋近于精确解。

有限元的收敛条件包括如下四个方面：

（1）在单元内，位移函数必须连续。多项式是单值连续函数，因此选择多项式作为位移函数，在单元内的连续性能够保证。

（2）在单元内，位移函数必须包括常应变项。每个单元的应变状态总可以分解为不依赖于单元内各点位置的常应变和由各点位置决定的变量应变。当单元的尺寸足够小时，单元中各点的应变趋于相等，单元的变形比较均匀，因而常应变就成为应变的主要部分。为反映单元的应变状态，单元位移函数必须包括常应变项。

（3）在单元内，位移函数必须包括刚体位移项。一般情况下，单元内任一点的位移包括形变位移和刚体位移两部分。形变位移与物体形状及体积的改变相联系，因而产生应变；刚体位移只改变物体位置，不改变物体的形状和体积，即刚体位移是不产生变形的位移。一个空间物体包括三个平动位移和三个转动位移，共有六个刚体位移分量。

由于一个单元牵连在另一些单元上，其他单元发生变形时必将带动这个单元做刚体位移，由此可见，为模拟一个单元的真实位移，假定的单元位移函数必须包括刚体位移项。

（4）位移函数在相邻单元的公共边界上必须协调。对一般单元而言，协调性是指相邻单元在公共节点处有相同的位移，而且沿单元边界也有相同的位移，也就是说，要保证不发生单元的相互脱离开裂和相互侵入重叠。要做到这一点，就要求函数在公共边界上能由公共节点的函数值唯一确定。对一般单元，协调性保证了相邻单元边界位移的连续性。

但是，在板壳的相邻单元之间，还要求位移的一阶导数连续，只有这样，才能保证结构的应变能是有界量。

总的说来，协调性是指在相邻单元的公共边界上满足连续性条件。

前三条又叫完备性条件，满足完备条件的单元叫完备单元；第四条是协调性要求，满足协调性的单元叫协调单元，否则称为非协调单元。完备性要求是收敛的必要条件；四条全部满足，构成收敛的充分必要条件。

在实际应用中，要使选择的位移函数全部满足完备性和协调性要求是比较困难的，在某些情况下可以放松对协调性的要求。

需要指出的是，有时非协调单元比与它对应的协调单元还要好，其原因在于近似解的性质。假定位移函数就相当于给单元施加了约束条件，使单元变形服从所加约束，这样的替代结构比真实结构更刚性一些。但是，这种近似结构由于允许单元分离、重叠，使单元的刚度变软了，或者形成了变形（例如板单元在单元之间的挠度连续，而转角不连续时，刚节点变为铰节点）。对于非协调单元，上述两种影响有误差相消的可能，因此利用非协调单元有时也会得到很好的结果。在工程实践中，非协调单元必须通过“小片试验后”才能使用。

1.4 有限元法求解的基本步骤

1.结构离散化

对整个结构进行离散化，将其分割成若干个单元，单元间彼此通过节点相连。

2.求出各单元的刚度矩阵 $[K]^{(e)}$

$[K]^{(e)}$ 是由单元节点位移量 $\{\Phi\}^{(e)}$ 求单元节点力向量 $\{F\}^{(e)}$ 的转移矩阵，其关系式为:

$$\{F\}^{(e)}=[K]^{(e)}\{\Phi\}^{(e)}$$

3.集成总体刚度矩阵 $[K]$ 并写出总体平衡方程

总体刚度矩阵 $[K]$ 是由整体节点位移向量 $\{\Phi\}$ 求整体节点力向量 $\{F\}$ 的转移矩阵，其关系式为：

$$\{F\}=[K]\{\Phi\}$$

此即为总体平衡方程。

4.引入支撑条件，求出各节点的位移

节点的支撑条件有两种：一种是节点 n 沿某个方向的位移为零；另一种是节点 n 沿某个方向的位移为一给定值。