

大學叢書

方 程 式 論

布沙特 班登著

幹 仙 椿 譯

商務印書館發行

馬 序

余夙愛武林山水環湖名勝遊覽殆遍常於青峯碧澗間獲識幹子仙椿此君欣賞自然別具興趣數子身臨極巔上叱咤縱橫夷然自得余初以爲運動健兒也今夏此君攜其舊譯方程式論託余介紹余始奇之爲之瀏覽一週其書理論精深內容豐富與余在北洋大學習鑛學時所讀者迥異至其措詞之工譯筆之明敘述之慎詳結構之嚴密尤非坊間淺薄浮飾之作所可擬後將原本與譯本對閱始知原書之艱深絕非吾國學子所能洞曉此君有鑑於此乃爲之批卻導窾鉤玄抉微觸類引伸旁徵博採此後學者讀之即無良師益友亦得頭頭是道興味盎然恍如置身三竺六橋間大有左顧右盼掉臂遊行之樂余嘉此君譯述之勤且信此書必有益於世也乃爲之向書館介紹俾早刊行公諸同好余因之有感焉吾國自有譯書事業以來金裝燦爛蔚然成帙炫耀於吾人之眼簾者夥矣但理蘊淵深不合普通程度之書每致無人逐譯今幹君以明暢之筆發幽深之理推陳出新曲折入微極文字之能事以宣揚此海外之鴻祕庶幾莘莘學子得以升堂入室一窺全豹其在數學上之貢獻豈曰小補之哉幹君嘗言今後將以其畢生精力闡述近代名著謀吾國數學上之基本建設於此可知幹君之

抱負爲何如。其所以日馳騁乎崇山峻嶺之間。噓氣成雲。揮汗如雨。歷盡艱辛而不已者。其目的蓋別有在矣。本書將於明春貢諸世。余雖未曾專攻數學。竊幸閱君之書。樂君有志竟成。而喜爲士林道也。於是乎序。

嵯縣馬寅初識於杭州

(二十二年十二月十日)

馮 序

昔孔德常稱代數學之目的，惟在分析方程式，其言固不盡當，而方程式論之重要可見矣。近百年來，歐西疇人類多殫精竭慮，求解高次代數方程式，雖未大奏厥功，而近世代數之二大支羣論及不變論於焉發軔，遂使今日之代數學在數學上所佔地位，得與幾何學函數論諸大宗派相埒，則方程式論之重要，不尤可見歟。近百年來，西哲論方程式之書，無慮數十百種，然擇精語詳要，推班布二氏之所著作，余曩主講杭州優級師範學校，嘗遂譯為漢文，印作講義，惜原稿散佚，未能公諸同好。今歲幹君仙椿又取是書譯之，披讀一過，見其頗能以明暢之筆，達幽深之旨，原書之艱澀難讀者，均疏通而證明之，其闕略不備者，又博採羣書而補苴之，其於是書之用力，可謂勤矣。幹君將以其譯本付剞劂，爰識數語，弁諸簡端。

杭州馮祖荀

胡 序

幹子仙椿嘗從余遊。尤好治數理之學。鉤微索隱。務窮其蘊。今春出其遙譯之方程式論。索序於余。余嘉其纂輯之勤。且信此書之必有裨於世也。即爲之循覽一過。其書能通曉 William Snow Burnside 與 Arthur William Panton 二氏之艱奧。博採 Bertrand, Salmon, Clebsch 諸氏之菁華。視他書之菲簿浮飾。尙資沽譽者。蓋有間矣。仙椿久欲付棗。亟請於余。余雖不文。然無以謝之。聊綴數語。弁諸簡端。是爲序。

慈谿胡濬濟

目 錄

緒 論	1—3
1. 定 義	1
2. 數字方程式及代數方程式	2
3. 多項式	3
第一章 多項式之普通性質	4—20
4. 定理(多項式變數之值甚大時).....	4
5. 定理(多項式變數之值甚小時).....	6
6. 變數增減時多項式形式上之變化及導來 函數	8
7. 有理整函數之連續.....	10
8. 以二項式除多項式所得之商及其剩餘.....	11
9. 作函數表法	14
10. 多項式之圖表法	15
11. 多項式之極大值極小值	18
第二章 方程式之普通性質	21—36
12. 定理(關於方程式之實根).....	21
13. 定理(關於方程式之實根)	22

14. 定理(關於方程式之實根)	22
15. 普通方程式之根 虛根.....	23
16. 定理(定方程式中根之數目)	24
17. 等根	26
18. (方程式中虛根數目常為偶數)	28
19. Descartes 之符號規則 正根.....	29
20. Descartes 之符號規則 負根.....	31
21. 用 Descartes 規則證明虛根之存在.....	31
22. 定理(以二已知數之代變數)	32
第三章 根與係數之關係及根之等勢函數	37—61
23 根與係數之關係	37
24. 應用	38
25. 方程式相關二根之減次	43
26. 1 之立方根.....	45
27. 根之等勢函數	48
28. 等勢函數之理論	54
第四章 方程式之變化	62—92
29. 方程式之變化	62
30 變根之符號	62
31. 以一定量乘方程式之根	63
32. 逆根及逆方程式	65
33. 增減方程式之根	67

34. 消項	70
35. 二項係數	71
36. 三次方程式	74
37. 四次方程式	76
38. 同比異列變化	78
39. 等勢函數之變化	79
40. 變換方程式以其根之乘冪	81
41. 一般之變化	83
42. 平方差之三次方程式	84
43. 三次方程式中根之性質之標準	86
44. 差之一般方程式	87
第五章 逆方程式或二項方程式之解答	93—110
45. 逆方程式	93
46. 二項方程式之通普性質 命題 1	95
47. 命題 2	95
48. 命題 3	95
49. 命題 4	96
50. 命題 5	96
51. 命題 6	96
52. 命題 7	97
53. 方程式 $x^n - 1 = 0$ 之特根	97
54. 以圓函數解二項方程式	101

第六章 三次方程式及四次方程式之代數解法111—158

55. 方程式之代數解法.....111
56. 三次方程式之代數根114
57. 數字方程式之應用.....115
58. 化三次式爲兩立方之差117
59. 以根之等勢函數解三次方程式119
60. 三次方程式中二根之同比異列關係126
61. 四次方程式之第一解法 Euler 氏之假定.....127
62. 四次方程式之第二種解法133
63. 分解四次式爲二次因子 第一法.....135
64. 分解四次式爲二次因子 第二法.....139
65. 四次方程式之逆方程式140
66. 以根之等勢函數解四次方程式144
67. 四次方程式之平方差方程式.....147
68. 四次方程式中根之性質之準標148

第七章 導來函數之性質.....159—168

69. 導來函數之圖表法.....159
70. 多項式之極大極小值 定理160
71. Rolle 氏之定理161
72. 導來函數之組織162
73. 複根 定理163
74. 複根之決定164

75. 定理(變數經過方程式之一根)	166
76. 定理(變數經過方程式之一根)	166
第八章 根之等勢函數	169—184
77. 奈端之定理 命題 1	169
78. 命題 2	171
79. 命題 3	173
80. (以根之乘方和之項表係數之式)	174
81. 等勢函數之級數及其次數和	177
82. 根之等勢函數之計算	179
83. 同次積	182
第九章 根之極限	185—194
84. 極限之定義	185
85. 命題 1	185
86. 命題 2	186
87. 應用	187
88. 命題 3	189
89. 下限及負根之極限	191
90. 限制方程式	191
第十章 區分方程式之根	195—222
91. (一般解釋)	195
92. Fourier 及 Budan 之定理	195
93. 定理之應用	198

94. 根爲虛數時定理之應用	201
95. 前定理之系	203
96. Sturm 之定理	204
97. Sturm 之定理 等根	210
98. Sturm 定理之應用	212
99. 方程式之根皆爲實根之條件	218
100. 四次方程式之根皆爲實數之條件	219
第十一章 數字方程式之解答	223—254
101. 代數方程式及數字方程式	223
102. 定理(關於可通約根)	224
103. 奈端之約數法則	224
104. 約數法則之應用	225
105. 限制約數數目之方法	229
106. 複根之決定	230
107. 奈端之近似值方法	233
108. Horner 氏之數字方程式解法	235
109. 試約數之原理	238
110. Horner 氏之簡法	242
111. 方程式之根異常接近時 Horner 氏法則之 應用	244
112. Lagrange 氏之近似值方法	248
113. 四次方程式之數字解答	249

第十二章 複數及複變數	255—274
114 複數 圖表法	255
115. 複數 加法及減法	256
116. 乘法及除法	257
117. 複數之他種運算	258
118. 複變數	259
119. 複變數函數之連續	261
120. 複變數畫一小閉曲線時 $f(x)$ 中幅角之相當 變化	261
121. Cauchy 氏之定理	263
122. 普通方程式中根之數目	264
123. 基本定理之第二證法	265
124. 複數根之決定 三次方程式之解答	266
125. 四次方程式之解法	269
126. 續四次方程式之解法	271

方 程 式 論

緒 論

1. 定義 數或代表數之文字.以各種算術運算記號連結之.稱爲數學式.式中含有之文字.如能變化.則稱變數.否則稱常數.變數變化時.數學式全體亦隨之變化.此數學式稱爲變數之函數.本書所討論只限於一變數之函數.

代數函數之數學式.所有之運算記號.只限於加減乘除冪開方六種.有理代數函數.只限於加減乘除冪五種.以下簡稱爲有理函數.整代數函數.以其所含之變數不在一分數中分母之位置爲限.以下簡稱爲整函數.令 n 爲正整數. a, b, c, \dots, k, l 爲常數. x 爲變數.則

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + kx + l$$

爲變數 x 之有理整函數.式中之常數係數 a, b, c, \dots 不論爲分數或無理數.上式仍爲有理整函數.

變數 x 之函數.一般以 $F(x), f(x), \phi(x), \psi(x), \dots$ 等類之記號表之.

表有理整函數之式.稱爲有理整式.或曰多項式.以等號連結二多項式所成之式.稱爲方程式.若變數 x 之一值能適合此方程式.則稱此值爲方程式之根.若欲將此方程式完全解

開。即謂須將其所有之根一一定出。

若將方程式中等號右端所有之項，一律移於左端。且依 x 之降冪排列之。則此方程式可書為次之形狀。

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

因此方程式中 x 之最高方乘為 n ，故稱之為 n 次方程式。細檢此方程式中各項。其 x 之指數與其係數 a 下方所附數字之和，常等於方程式之次數 n 。故知某項係數所附之數字，即能知其 x 之指數。

因方程式中各項，同以任一常數除之，此方程式之根不變。今以 a_0 除上式各項。則上之方程式可書為次之形狀。

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \cdots + p_{n-1}x + p_n = 0.$$

若 p_1, p_2, \cdots, p_n ， n 個係數皆不為 0，則稱此方程式為完全方程式。否則稱為不完全方程式。不含有 x 之項，稱為方程式之絕對項，或常數項。若方程式各項之係數皆為數字，則稱之為數字方程式。若為文字，則稱之為代數方程式。

2. 數字方程式及代數方程式 在研究數學及物理學之問題中，其最後結果，常表現為一方程式。且須定出此方程式之根，始能將原問題解決。根之重要既若此。故治數學者咸從事於求任意次方程式之根。所當遵守之法則。而方程論一學因之成立。即若方程式為數字，則須求滿足此方程式之一數值或多數值。關於此節在數學上已有一大進步表現。至於發現數字方程式之根之精確值或近似值之法則。本書後當

特別說明.茲不贅.

至代數方程式則無此種等量進步.吾人已知二次代數方程式之根,能用其各項之係數表明,而成爲二次數字方程式中根之公式即以後者各項之數字係數,代入公式內各相當文字係數中,即可將後者之根定出.至於代數三次方程式及四次方程式,雖能將其根之公式定出.然有時用於數字方程式,竟不能決定其根.以視二次方程式之公式.其用途又較狹隘矣.

至欲求五次或五次以上代數方程式之根.乃近世解析學上之問題.非如前述各種代數方程式,僅藉普通代數記號,便能以係數之項表根之價值也.

3. 多項式 由上述便知方程論之重要目的,在發見變數 x 能令多項式爲 0 之值.實行此計劃時,又當討論對於變數之每一值多項式所取之相應值.在次章便知變數 x 之值自 $-\infty$ 至 ∞ 連續變化時,多項式之相應值亦連續變化.此項研究,在多項式理論中甚佔重要.

解數字方程式,純用實驗方法.當檢查對於變數之某值多項式之相應值時.若此多項式爲 0. 則此變數之值即此數字方程式之根.若此多項式不爲 0. 然吾人總能依此方法將根所在之位置定出.令此根在 a 與 b 二數之間.吾人又可依同一方法在 ab 二數間求出二數 a_1, b_1 . 使方程式之根在 a_1 與 b_1 之間.以下逐次如此.便可將根之近似值或其真值定出.

第一章

多項式之普通性質

4. 討論對於變數之值之變化，多項式之相應值之變化時，須先討論對於變數之甚大及甚小值，多項式中何項關係較大，本節及以下諸節便為此問題而設。

將多項式書之如次。

$$a_0 x^n \left(1 + \frac{a_1}{a_0} \frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0} \frac{1}{x^2} + \frac{a_3}{a_0} \frac{1}{x^3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{a_0} \frac{1}{x^n} \right),$$

自上式吾人便知當 x 之值與 ∞ 接近時，多項式之值與 $a_0 x^n$ 接近。次之定理能給吾人一數值。若將此數值或比此較大之數值代 x ，能令上式中 $a_0 x^n$ 一項比其餘各項之和大。

定理 於多項式

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

之係數絕對值 $|a_1| |a_2| \cdots |a_n|$ 中，以 $|a_k|$ 為最大時，若 x 之值等於或大於 $\frac{|a_k|}{a_0} + 1$ ，則第一項之值比其餘各項之和之絕對值大。

上式中第一項之係數 a_0 假定為正。以下準此。

證 吾人之目的，在證明 x 之值等於或大於 $\frac{|a_k|}{a_0} + 1$ 時，同時

$$a_0 x^n > |a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n|. \quad (1)$$

今作不等式.

$$a_0x^n > |a_k|(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1). \quad (2)$$

因(2)式右端 \cong 1式右端. 故 x 之值若能滿足(2)式. 則必能滿足(1)式. 因(2)式右端括弧內為一等比級數. 其總和為 $\frac{x^n - 1}{x - 1}$. 故(2)式得化之為

$$1 > \frac{|a_k|}{a_0(x-1)} \frac{x^n - 1}{x^n}. \quad (2')$$

然 x 之值比 1 大. 故 x^n 比 $x^n - 1$ 大. 因之 $\frac{x^n - 1}{x^n}$ 當小於 1. 故

$$\frac{|a_k|}{a_0(x-1)} > \frac{|a_k|}{a_0(x-1)} \frac{x^n - 1}{x^n}.$$

今作一不等式

$$1 \cong \frac{|a_k|}{a_0(x-1)}. \quad (3)$$

故 x 之值若滿足(3)式. 則 x 之值必滿足(2)式. 因之能滿足(2)式. 故終能滿足(1)式也. 然自(3)式 $x \cong \frac{|a_k|}{a_0} + 1$. 故本定理能成立.

由本定理可知當 x 之值自 $\frac{|a_k|}{a_0} + 1$ 向 ∞ 處增長時. 多項式 $f(x)$ 常為正. 又若 x 之符號由正變負. 則 n 為偶數時 a_0x^n 之符號為正. n 為奇數時 a_0x^n 之符號為負. 此時 x 之值自 $-\left(\frac{|a_k|}{a_0} + 1\right)$ 向 $-\infty$ 處減少. 且若 n 為偶數. 則多項式 $f(x)$ 之符號常為正. 若 n 為奇數. 則多項式 $f(x)$ 之符號常為負. 此理可由次之補題明之.

補題 於多項式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$