大學叢書

方程式論

布沙特 班登著
幹仙椿譯

商務印書館發行

馬序

余夙愛武林山水.環湖名勝.遊覽殆遍.常於青峯碧澗間.獲識幹子仙椿.此君欣賞自然.別具興趣.數子身臨極巔上.叱咤縱橫.夷然自得.余初以爲運動健兒也.今夏此君攜其舊譯方程式論.託余介紹.余始奇之.爲之瀏覽一週.其書理論精深.內容豐富.與余在北洋大學習鑛學時所讀者迥異.至其措詞之工.譯筆之明.敍述之愼詳.結構之嚴密.尤非坊間淺薄浮飾之作所可擬.後將原本與譯本對閱.始知原書之艱深.絕非吾國學子所能洞曉.此君有鑑於此.乃爲之批郤導窾.鈎玄抉微.觸類引伸.旁徵博採.此後學者讀之.即無良師益友.亦得頭頭是道.興味盎然.恍如置身三竺六橋間.大有左顧右盼掉臂遊行之樂.余嘉此君譯述之勤.且信此書必有益於世也.乃爲之向書館介紹.俾早刋行.公諸同好.余因之有感焉.吾國自有譯書事業以來.金裝燦爛.蔚然成帙.炫耀於吾人之眼簾者夥矣.但理蘊淵深.不合普通程度之書.每致無人迻譯.今幹君以明暢之筆.發幽深之理推陳出新.曲折入微.極文字之能事.以宣揚此海外之鴻祕.庶幾莘莘學子.得以升堂入室.一窺全豹.其在數學上之貢獻.豈曰小補之哉.幹君嘗言.今後將以其畢生精力.闡述近代名著.謀吾國數學上之基本建設.於此可知幹君之

抱負爲何如.其所以日馳騁乎崇山峻嶺之間.嘘氣成雲.揮汗如雨.歷盡艱辛而不已者.其目的蓋別有在矣.本書將於明春貢諸世.余雖未曾專攻數學.竊幸閱君之書.樂君有志竟成.而喜爲士林道也.於是乎序.

嵊縣馬寅初識於杭州

(二十二年十二月十日)

馮　序

昔孔德常稱代數學之目的.惟在分析方程式.其言固不盡當.而方程式論之重要可見矣.近百年來.歐西疇人類多殫精竭慮.求解高次代數方程式.雖未大奏厥功.而近世代數之二大支羣論及不變論於焉發軔.遂使今日之代數學在數學上所佔地位.得與幾何學函數論諸大宗派相埒.則方程式論之重要.不尤可見歟.近百年來.西哲論方程式之書.無慮數十百種.然擇精語詳.要推班布二氏之所著作.余曩主講杭州優級師範學校.嘗迻譯爲漢文.印作講義.惜原稿散佚.未能公諸同好.今歲幹君仙椿又取是書譯之.披讀一過.見其頗能以明暢之筆.達幽深之旨.原書之艱澀難讀者.均疏通而證明之.其闕略不備者.又博採羣書而補苴之.其於是書之用力.可謂勤矣幹君將以其譯本付剞劂.爰識數語.弁諸簡端.

杭州馮祖荀

胡　序

幹子仙椿嘗從余遊.尤好治數理之學.鈎微索隱.務窮其竅.今春出其迻譯之方程式論.索序於余.余嘉其纂輯之勤.且信此書之必有裨於世也.即爲之循覽一過.其書能通曉 William Snow Burnside 與 Arthur William Panton 二氏之艱奥.博採 Bertrand, Salmon, Clebsch 諸氏之菁華.視他書之菲簿浮飾.耑資沽譽者.蓋有間矣.仙椿久欲付棗.亟請於余.余雖不文.然無以謝之.聊綴數語.弁諸簡端.是爲序.

慈谿胡濬濟

目　　錄

方程式論

緒論

1. 定義 數或代表數之文字.以各種算術運算記號連結之.稱爲數學式.式中含有之文字,如能變化.則稱變數.否則稱常數.變數變化時,數學式全體亦隨之變化.此數學式稱爲變數之函數.本書所討論只限於一變數之函數.

代數函數之數學式.所有之運算記號,只限於加減乘除冪開方六種.有理代數函數,只限於加減乘除冪五種.以下簡稱爲有理函數.整代數函數,以其所含之變數不在一分數中分母之位置爲限.以下簡稱爲整函數.令 n 爲正整數. $a, b, c,\cdots\cdots k, l$ 爲常數. x 爲變數.則

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots+kx+l$$

爲變數 x 之有理整函數.式中之常數係數 $a, b, c,\cdots\cdots$ 不論爲分數或無理數,上式仍爲有理整函數.

變數 x 之函數.一般以 $F(x), f(x), \phi(x), \psi(x)\cdots\cdots$ 等類之記號表之.

表有理整函數之式,稱爲有理整式.或曰多項式.以等號連結二多項式所成之式,稱爲方程式.若變數 x 之一值能適合此方程式,則稱此值爲方程式之根.若欲將此方程式完全解

開.即謂須將其所有之根一一定出.

若將方程式中等號右端所有之項,一律移於左端.且依 x 之降冪排列之.則此方程式可書爲次之形狀.

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

因此方程式中 x 之最高方乘爲 n,故稱之爲 n 次方程式.細檢此方程式中各項.其 x 之指數與其係數 a 下方所附數字之和,常等於方程式之次數 n.故知某項係數所附之數字,即能知其 x 之指數.

因方程式中各項,同以任一常數除之,此方程式之根不變.令以 a_0 除上式各項.則上之方程式可書爲次之形狀.

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0.$$

若 $p_1, p_2, \cdots\cdots p_n$, n 個係數皆不爲0,則稱此方程式爲完全方程式.否則稱爲不完全方程式.不含有 x 之項,稱爲方程式之絕對項,或常數項.若方程式各項之係數皆爲數字,則稱之爲數字方程式.若爲文字,則稱之爲代數方程式.

2. 數字方程式及代數方程式 在研究數學及物理學之問題中.其最後結果,常表現爲一方程式.且須定出此方程式之根,始能將原問題解決.根之重要既若此.故治數學者咸從事於求任意次方程式之根所當遵守之法則.而方程論一學因之成立.即若方程式爲數字.則須求滿足此方程式之一數值或多數值.關於此節在數學上已有一大進步表現.至於發現數字方程式之根之精確值或近似值之法則.本書後當

特別說明.茲不贅.

至代數方程式則無此種等量進步.吾人已知二次代數方程式之根,能用其各項之係數表明,而成爲二次數字方程式中根之公式即以後者各項之數字係數,代入公式內各相當文字係數中,即可將後者之根定出.至於代數三次方程式及四次方程式,雖能將其根之公式定出.然有時用於數字方程式,竟不能決定其根.以視二次方程式之公式.其用途又較狹隘矣.

至欲求五次或五次以上代數方程式之根.乃近世解析學上之問題.非如前述各種代數方程式,僅藉普通代數記號,便能以係數之項表根之價值也.

3. 多項式 由上述便知方程論之重要目的,在發見變數 x 能令多項式爲 0 之值.實行此計劃時,又當討論對於變數之每一值多項式所取之相應值.在次章便知變數 x 之值自 $-\infty$ 至 ∞ 連續變化時,多項式之相應值亦連續變化.此項研究,在多項式理論中甚佔重要.

解數字方程式,純用實驗方法.當檢查對於變數之某值多項式之相應值時.若此多項式爲 0.則此變數之值卽此數字方程式之根.若此多項式不爲 0.然吾人總能依此方法將根所在之位置定出.令此根在 a 與 b 二數之間.吾人又可依同一方法在 ab 二數間求出二數 a_1b_1.使方程式之根在 a_1 與 b_1 之間.以下逐次如此.便可將根之近似值或其眞值定出.

第一章

多項式之普通性質

4. 討論對於變數之值之變化，多項式之相應值之變化時.須先討論對於變數之甚大及甚小值,多項式中何項關係較大.本節及以下諸節便爲此問題而設.

將多項式書之如次.

$$a_0x^n\left(1+\frac{a_1}{a_0}\frac{1}{x}+\frac{a_2}{a_0}\frac{1}{x^2}+\frac{a_3}{a_0}\frac{1}{x^3}+\cdots\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_0}\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{a_0}\frac{1}{x^n}\right),$$

自上式吾人便知當 x 之值與 ∞ 接近時,多項式之值與 a_0x^n 接近.次之定理能給吾人一數值.若將此數值或比此較大之數值代 x. 能令上式中 a_0x^n 一項比其餘各項之和大.

定理 於多項式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

之係數絕對值 $|a_1|\,|a_2|\cdots\cdots|a_n|$ 中,以 $|a_k|$ 爲最大時.若 x 之值等於或大於 $\frac{|a_k|}{a_0}+1$. 則第一項之值比其餘各項之和之絕對值大.

上式中第一項之係數 a_0 假定爲正.以下準此.

證 吾人之目的,在證明 x 之值等於或大於 $\frac{|a_k|}{a_0}+1$ 時,同時

$$a_0x^n>|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n|. \tag{1}$$

今作不等式.

$$a_0x^n > |a_k|(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1). \qquad (2)$$

因(2)式右端≧1 ~~式右端~~.故 x 之值若能滿足(2)式.則必能滿足(1)式.因(2)式右端括弧內爲一等比級數,其總和爲 $\frac{x^n-1}{x-1}$.故(2)式得化之爲

$$1 > \frac{|a_k|}{a_0(x-1)}\frac{x^n-1}{x^n}. \qquad (2')$$

然 x 之值比 1 大.故 x^n 比 x^n-1 大.因之 $\frac{x^n-1}{x^n}$ 當小於 1.故

$$\frac{|a_k|}{a_0(x-1)} > \frac{|a_k|}{a_0(x-1)}\frac{x^n-1}{x^n}.$$

今作一不等式

$$1 \geqq \frac{|a_k|}{a_0(x-1)}. \qquad (3)$$

故 x 之值若滿足(3)式.則 x 之值必滿足(2)式.因之能滿足(2)式.故終能滿足(1)式也.然自(3)式 $x \geqq \frac{|a_k|}{a_0}+1$.故本定理能成立.

由本定理可知當 x 之值自 $\frac{|a_k|}{a_0}+1$ 向 ∞ 處增長時,多項式 $f(x)$ 常爲正.又若 x 之符號由正變負.則 n 爲偶數時 a_0x^n 之符號爲正.n 爲奇數時 a_0x^n 之符號爲負.此時 x 之值自 $-\left(\frac{|a_k|}{a_0}+1\right)$ 向 $-\infty$ 處減少.且若 n 爲偶數,則多項式 $f(x)$ 之符號常爲正.若 n 爲奇數,則多項式 $f(x)$ 之符號常爲負.此理可由次之補題明之.

補題　於多項式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$