叶轮机械内的三度空间流动分析

201教研室

吴国钊

南京航空学院

1976.6.

目录

叶轮机械内的三度空间流动分析

毛主席教导我们："分析的方法就是辩证的方法，所谓分析，就是分析事物的矛盾。"

叶轮机械（包括轴流式压气机，离心式压气机和透平等）中的气体流动是属于三度空间的流动（简称三元流），气体质点的参数（速度，压力，温度等）是随着气体质点在空间内所处的位置变化而变化的，空间内的位置可以由三个自变数（x，y、z）确定。同时气体质点的参数又是随着时间的变化而变化的。因此，这种三度空间内的流动，气体质点的参数由四个自变数（x、y、z、t）确定，也就是说，在数学上是四维的。

但是事物的发展总是由简单到复杂，人们的认识总是由浅入深的。在40年代燃气轮机发展初期，轴流式压气机与透平的设计只是计算平均直径处的气流参数的，叶片也是做成平直的，根部的，平均半径的以及顶部的叶型其几何进口角都是一样的，几何出口角也都是一样的，当时对叶片沿半径方向应该如何扭转并不清楚。随着叶轮机械生产实践的发展，人们对它内部的气体流动情况进行了逐渐深入的研究，发现叶片在不同半径上的圆周速度各不相同，如果气流进入工作叶片时的绝对速度C_1沿半径方向是均匀的，那么在不同半径处的相对速度W_1就各不相同，气体流入角β_1也都不一样。因此，为了在不同半径处的攻角不致过大，叶片在不同半径处的叶型就应该做得不一样，也就是说叶片要做成扭转的。那么究竟应该如何扭转呢？如何来选择扭转的规律？怎样的扭转规律才称合理呢？这就是我们要讨论的问题。

在实践中，提出这个问题的情况可以归结为两类：一类是对已经有的现成的叶轮机械进行摸底，分析、求出气体流动的速度场以及其他热力参数，以便弄清其设计的指导思想和设计规律的

这类问题称为正问题（或者称为分析问题）。在正问题中，叶栅的几何形状和几何参数是已知的，要求解级内的速度场和其他热力参数。另一类是根据已经提出的条件（例如，空气流量，增压比，流动的速度场），设计出一台叶轮机械或叶栅的几何形状和几何参数。这类问题称为反问题（或者称为设计问题），在反问题中，流速场是已知的，要求解叶栅的几何形状和几何参数。

不论是解决正问题还是解决反问题，都必须对叶轮机械内气体的三度空间流动进行详细的分析。

分析气体流动的方法主要是根据气体流动的自然规律找出在流动中必然遵循的条件。这些条件把气体的各个参数（包括已知的参数）相互联系起来。一般当条件足够多时，就可以找出未知参数与已知参数之间的关系。从数学上来讲，就是根据自然定律列出数学方程式，当独立的方程式的数目等于未知数的数目时，就可以将这些联立方程组，求解得出未知数的值。下面我们来推导气体在叶轮机械内流动的基本方程式。

第一节 基本方程式

一、园柱座标与直角座标表示速度与加速度的关系

在推导方程式之前，先要把座标确定下来。由于叶轮机械气流通道对于转动轴是对称的。因此采用园柱座标比较方便。如图1所示，沿半径方向（叫做径向）位置的改变以座标轴r表示，沿园周方向（叫做切向）位置的改变以座标θ表示，沿转轴轴线方向位置的改变以座标轴z表示。直角座标x，y，z的位置如图1所示。

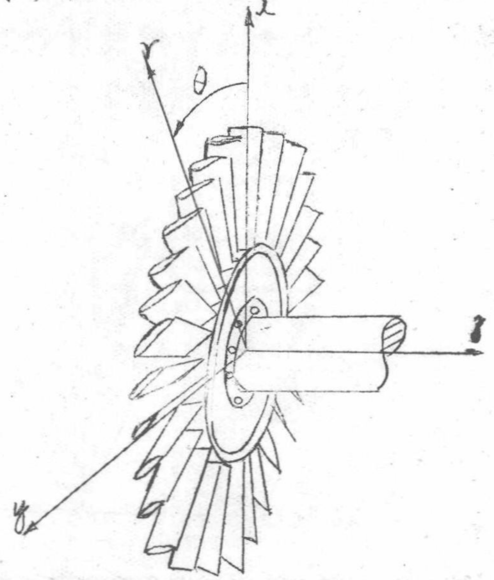

图1.座标的位置

在通道中气体质点A的位置可以用直角座标（x，y，z）表示，也可以用园柱座标（r，θ，z）表示（图2）两种座标系统之间的几何关系如下

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\theta \\ y = r\cdot\sin\theta \quad \text{——(1)} \\ z = z \end{cases}$$

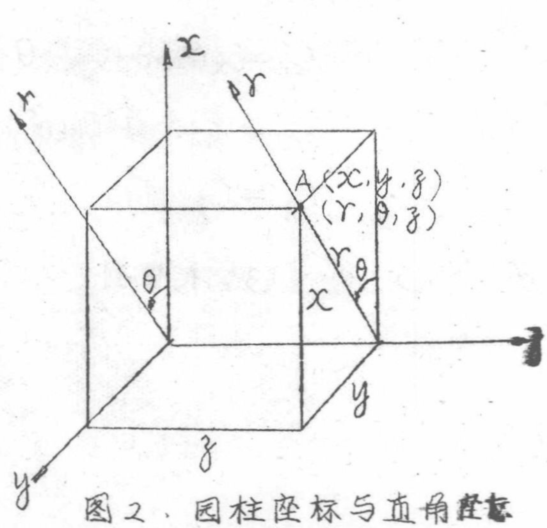

图2. 园柱座标与直角座标

气体质点A的速度为C，速度C在x，y，z三个方向的分量为C_x，C_y和C_z。其表示式为公式(1)对时间t求导数：

$$\left.\begin{aligned} C_x &= \frac{dx}{dt} = \cos\theta\frac{dr}{dt} - r\cdot\sin\theta\frac{d\theta}{dt} \\ C_y &= \frac{dy}{dt} = \sin\theta\frac{dr}{dt} + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt} \\ C_z &= \frac{dz}{dt} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

以园柱座标表示的话，速度C的三个分量为径向分速度C_r，切向分速度C_θ，和轴向分速度C_z，它们与直角座标表示的三个速度分量之间的关系为：（见图3）

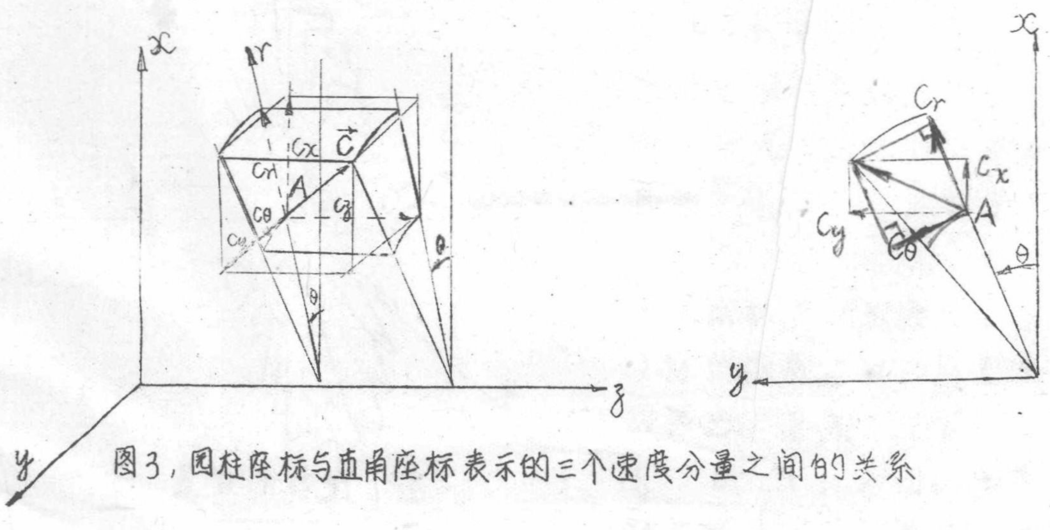

图3，园柱座标与直角座标表示的三个速度分量之间的关系

$$\left.\begin{aligned} C_r &= C_x\cos\theta + C_y\sin\theta \\ C_\theta &= -C_x\sin\theta + C_y\cos\theta \\ C_z &= C_z \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

将公式（2）代入（3）式得到：

$$\left.\begin{aligned}
&C_r = C_x\cos\theta + C_y\sin\theta = \left(\cos\theta\frac{dr}{dt} - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\cos\theta + \\
&\left(\sin\theta\frac{dr}{dt} + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\sin\theta = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt}。\\
&C_\theta = -C_x\sin\theta + C_y\cos\theta = -\left(\cos\theta\frac{dr}{dt} - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\sin\theta + \\
&\left(\sin\theta\frac{dr}{dt} + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\cos\theta = r(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\frac{d\theta}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}。\\
&C_z = C_z = \frac{dz}{dt}
\end{aligned}\right\}(4)$$

气体质点A的加速度为a，它在x，y，z三个方向的分量为a_x，a_y和a_z，其表示式可以由（2）式再对时间t求一次导数而得到：

$$\left.\begin{aligned}
&a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta - \sin\theta\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{dr}{dt} - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta\frac{d\theta}{dt}\cdot \\
&\cdot\frac{dr}{dt} - r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta - 2\frac{dr}{dt}\sin\theta\frac{d\theta}{dt} - r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\\
&a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \sin\theta\frac{d^2r}{dt^2} + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{dr}{dt} + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{dr}{dt} + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} - r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\cdot \\
&\cdot\frac{d\theta}{dt} = \sin\theta\frac{d^2r}{dt^2} + 2\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{dr}{dt} + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} - r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\\
&a_z = \frac{d^2z}{dt^2}
\end{aligned}\right\}(5)$$

以园柱座标表示，加速度a的三个分量为：

$$\left.\begin{aligned}
&\text{径向加速度：}a_r = a_x\cos\theta + a_y\sin\theta\\
&\text{切向加速度：}a_\theta = -a_x\sin\theta + a_y\cos\theta\\
&\text{轴向加速度：}a_z = a_z
\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

将（5）式代入（6）式得到：

$$
\left.
\begin{aligned}
a_r &= a_x\cos\theta + a_y\sin\theta = \left[\frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta - 2\frac{dr}{dt}\sin\theta\frac{d\theta}{dt} - r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\cos\theta \\
&\quad + \left[\sin\theta\frac{d^2r}{dt^2} + 2\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{dr}{dt} + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} - r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\sin\theta \\
&= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) - \frac{\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2}{r} = \frac{dC_r}{dt} - \frac{C_\theta^2}{r} \\
a_\theta &= -a_x\sin\theta + a_y\cos\theta = -\left[\frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta - 2\frac{dr}{dt}\sin\theta\frac{d\theta}{dt} - r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\sin\theta \\
&\quad + \left[\sin\theta\frac{d^2r}{dt^2} + 2\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{dr}{dt} + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} - r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\cos\theta \\
&= 2\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = \left(\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) + \frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\right) + \frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt} \\
&= \frac{dC_\theta}{dt} + \frac{C_\theta C_r}{r} = \frac{1}{r}\left(r\frac{dC_\theta}{dt} + C_\theta C_r\right) = \frac{1}{r}\left(r\frac{dC_\theta}{dt} + C_\theta\frac{dr}{dt}\right) = \frac{1}{r}\frac{d(C_\theta r)}{dt} \\
a_z &= a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dC_z}{dt}
\end{aligned}
\right\}\quad(7)
$$

由公式（7）可知，径向加速度a_r由两项组成，一项是$\frac{dC_r}{dt}$，它是径向速度的变化率，还有一项是$\frac{C_\theta^2}{r}$，这一项是这样构成的，因为质点具有切向分速度C_θ，我们知道当质点作圆周运动时，如果切向速度为C_θ，圆半径为r，则向心加速度为$\frac{C_\theta^2}{r}$，其方向是向着圆心的，即与r方向相反，所以前面有负号。切向加速度a_θ也由两项组成，一项是$\frac{dC_\theta}{dt}$，它是切向速度的变化率，还有一项是$\frac{C_\theta C_r}{r}$，它是由于质点具有切向分速度C_θ而作圆周运动，径向分速度C_r因圆周运动而时刻在改变其方向，这说明在切线方向一定有一加速度，大小为$\frac{C_\theta C_r}{r}$。圆柱座标表示的轴向加速度C_z与直角座标表示的z轴方向的加速度是相等的，这是因为两个轴是重合的。

二、连续方程式

取流动气体中的一个微团，它是一个大面体（见图4）半径方向的长度为dr，切线方向的角厚度为$d\theta$，轴向宽度为dz。

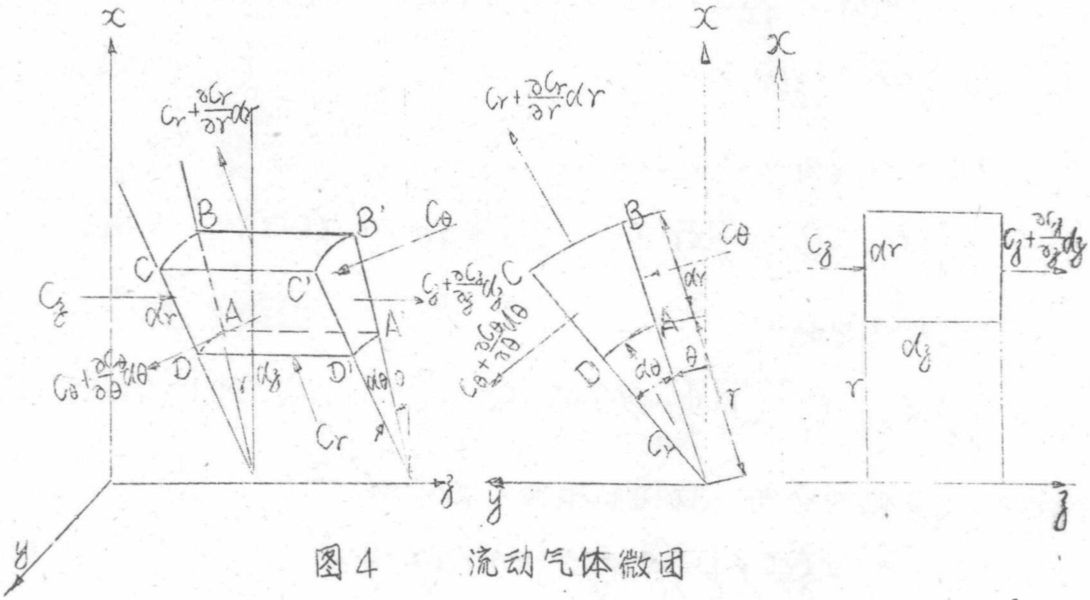

图4　流动气体微团

微团的体积为：

$$\Delta V=\frac{(r+r+dr)}{2}d\theta\,dr\,dz\approx r\,dr\,d\theta\,dz \qquad (8)$$

园柱面AA'D'D上的气体质点的径向分速度为C_r，园柱面BB'C'C上的气体质点的径向分速度为：$C_r+\frac{\partial C_r}{\partial r}dr$，平面ABB'A上的气体质点的切向分速度为$C_\theta$，平面DCC'D'上的气体质点的切向分速度为$C_\theta+\frac{\partial C_\theta}{\partial \theta}d\theta$。

平面ABCD上的气体质点的轴向分速度为C_z，平面A'B'C'D'上的气体质点的轴向分速度为$C_z+\frac{\partial C_z}{\partial z}dz$。因为园柱面AA'D'D上的气体质点具有径向分速度C_r，所以微团体积在dt时间内沿r方向将减小$C_r\cdot r\cdot d\theta\cdot dz\cdot dt$。同时，因为园柱面BB'C'C上的气体质点具有径向分速度$(C_r+\frac{\partial C_r}{\partial r}dr)$，所以微团体积在$dt$时间内沿$r$方向将增大$(C_r+\frac{\partial C_r}{\partial r}dr)(r+dr)d\theta\,dz\,dt$。因此，微团体积径向总的变化为：

$$\left[\left(C_r+\frac{\partial C_r}{\partial r}dr\right)(r+dr)-C_r r\right]d\theta\cdot dz\,dt$$

方括弧内的二阶微量$\left(\frac{\partial C_r}{\partial r}dr\cdot dr\right)$忽略不计之后，得到：

$$\left(\frac{C_r}{r}+\frac{\partial C_r}{\partial r}\right)r\,dr\,r\,dz\,d\theta\,dt \qquad (9a)$$

同理，微团体积切向总的变化为：

$$\left[\left(C_\theta+\frac{\partial C_\theta}{\partial \theta}d\theta\right)-C_\theta\right]dz\,dr\,dt=\frac{1}{r}\frac{\partial C_\theta}{\partial \theta}r\,dr\,r\,dz\,d\theta\,dt \qquad (9b)$$

微团体积轴向总变化为：

$$\left[\left(C_z+\frac{\partial C_z}{\partial z}dz\right)-C_z\right]\left(r+\frac{dr}{2}\right)d\theta\cdot dr\,dt\approx\frac{\partial C_z}{\partial z}r\,dr\,r\,dz\,d\theta\,dt \qquad (9c)$$

微团体积总的变化为径向，切向和轴向变化之和：

$$d(\Delta V)=\left(\frac{C_r}{r}+\frac{\partial C_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial C_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial C_z}{\partial z}\right)r\,dr\,r\,dz\,d\theta\,dt$$

微团体积的变化率：$+\frac{\partial C_r}{\partial r}$

$$\frac{d(\Delta V)}{dt}=\left(\frac{C_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial C_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial C_z}{\partial z}\right)r\,dr\,r\,dz\,d\theta$$

由此相对体积变化率$\frac{1}{\Delta V}\frac{d(\Delta V)}{dt}$为：

$$\frac{1}{\Delta V}\frac{d(\Delta V)}{dt}=\frac{C_r}{r}+\frac{\partial C_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial C_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial C_z}{\partial z} \qquad (10)$$

设气体微团单位体积的质量为ρ，则微团的质量Δm为：

$$\Delta m=\rho\Delta V。$$

根据质量守恒定律，虽然微团的体积随着时间在变化，但是质量是不会自己产生或自己減少的。因此$\frac{d(\Delta m)}{dt}=0$

于是，$\frac{d(\rho\Delta V)}{dt}=0$　　$\Delta V\frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{d(\Delta V)}{dt}=0$

即：$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{1}{\Delta V}\frac{d(\Delta V)}{dt}=0 \qquad (11)$$

上式中第一项$\frac{d\rho}{dt}$，是ρ对t的全导数，它的意义是气体密度随时间变化而发生的总的变化。因为ρ是随时间和气体质点所处的位置不同而变化的，所以ρ是r，θ，z和t的函数。因此，

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial r}\frac{dr}{dt}+\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{dz}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+C_r\frac{\partial\rho}{\partial r}+\frac{C_\theta}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}+C_z\frac{\partial\rho}{\partial z} \qquad (12)$$

上式中等号右边第一项是ρ对t的偏导数，它的意义是当质点位置不变（即r，θ和z不变）时间变化时密度发生的变化。上式中右边第二、三和四项是由于时间变化而使质点位置变化（即r θ和z变化）结果引起的密度变化。因为时间变化时，流体质点是沿着流线运动的，其位置变化是沿着流线的座标变化的，所以(12)式$\frac{d\rho}{dt}$是沿着流线气体密度的变化。这一点对三元流很重要，三元流的计算许多地方都是要考虑沿流线的计算。

流线还是迹线问题？在dt时刻内流线与迹线是重合的。

将(12)式和(10)式代入(11)式可以得到

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+C_r\frac{\partial\rho}{\partial r}+\frac{C_\theta}{r}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}+C_z\frac{\partial\rho}{\partial z}+\rho\left(\frac{C_r}{r}+\frac{\partial C_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial C_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial C_z}{\partial z}\right)=0 \qquad (13a)$$

把对r的偏导数项合并在一起，对θ的偏导数合并在一起，对z的偏导数也合并在一起，最后得到连续方程式：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho rC_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho C_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(\rho C_z)}{\partial z}=0 \qquad (13b)$$

气体流动必然遵循质量守恒的自然规律，因此它的密度ρ和速度的三个分量C_r，C_θ，C_z之间应该满足连续方程式，即满足(13a)式或(13b)式。

如果流动是稳定的，这就是指气体参数不随着时间变化，那么(13)式中的第一项$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$。

如果流体是不可压缩的，那么$\rho=$常数，(13)式就简化为：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rC_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial C_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial C_z}{\partial z}=0 \text{ 。}$$

三、能量方程式

由工程热力学我们知道，可逆过程的熵的微分公式为：$dS=\frac{\delta q}{T}$
式中 δq —— 在变化过程中外界对系统内单位质量气体所加的热量

T —— 气体的绝对温度

不可逆过程的熵的微分公式为：

$$dS>\frac{\delta q}{T},$$

不可逆过程外界对系统内单位质量气体所加的热量 δq 除以温度 T 总是要小于熵的增加 dS，或者说，不可逆过程的 δq 总是要小于 TdS。当不可逆过程与外界绝热时，那么 $\delta q=0$，而 $TdS>0$，即熵是增加的。事实上，对于不可逆过程 TdS 等于 δq，再加上由于粘性的影响外界对气体所做的功。

由上面两个熵的公式可以得到：$T\frac{dS}{dt}\geq\delta\dot{q}$ 。

式中 $\delta\dot{q}$ —— 单位时间内变化过程中外界对系统内单位质量气体所加的热量。

事实上存在下述关系式（参看文献[1]）：

$$T\frac{dS}{dt}=\delta\dot{q}+AV\Phi.$$

A —— 热功当量

式中 V —— 气体的比容，

Φ —— 称为消失函数，是外界对于系统内每单位体积气体表面上的粘性力在单位时间内对气体所作的功。

Φ 的表达式为：[3]

$$\Phi=\mu\left\{2\nabla\cdot\left[(\vec{C}\cdot\nabla)\vec{C}\right]+(\nabla\times\vec{C})^2-2(\vec{C}\cdot\nabla)(\nabla\cdot\vec{C})-\frac{2}{3}(\nabla\cdot\vec{C})^2\right\}$$

∇ 的意义见后面第二节径向运动方程式。

另外，由热力学第一定律知道：

$$T\frac{dS}{dt}=\frac{du}{dt}+Ap\frac{dv}{dt}.$$

式中 u —— 系统内单位质量气体的内能。

由上面两个$T\frac{dS}{dt}$的式子，得到：

$$\frac{du}{dt}+Ap\frac{dv}{dt}=\delta\dot{q}+AV\Phi \qquad (14)$$

(14)式可以写成：

$$\frac{du}{dt}+Ap\frac{d(\gamma^{-1})}{dt}=\delta\dot{q}+A\frac{\Phi}{\gamma} \qquad (15)$$

式中γ——气体的比重。

上式说明在单位时间内外界对系统内单位重量气体所加的热量与粘性力所作的功之和等于在同一时间内单位重量气体内能的增加与体积变化气体对外所做的功之和。

四、运动方程式

毛主席教导我们："矛盾是简单的运动形式（例如机械性的运动）的基础，更是复杂的运动形式的基础。""事实上，即使是外力推动的机械运动，也要通过事物内部的矛盾性。"

取流动气体中的一个六面体微团（图5），作用于此微团的六个表面上的外力分别为：

(1)、圆柱面$AA'D'D$的面积为$r\cdot d\theta\cdot dz$，作用在它上面的压强为p，因此作用在它上面的力为$prd\theta dz$。

(2)、圆柱面$BB'C'C$的面积为$(r+dr)d\theta dz$作用在它上面的压强为：$(p+\frac{\partial p}{\partial r}dr)$。因此作用在它上面的力为：$-(p+\frac{\partial p}{\partial r}dr)(r+dr)d\theta dz$。

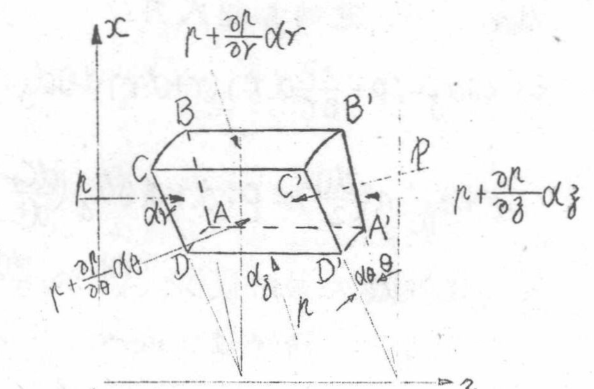

图5、气体微团受力情况

（－号表示力的方向与r轴的正方向相反）。

(3)、作用在平面$ABB'A'$上的力为$P\cdot dr dz$。

(4)，作用在平面$CC'D'D$上的力为$-(p+\frac{\partial p}{\partial\theta}d\theta)dr dz$。

(5)，作用在平面$ABCD$上的力为$p(r+\frac{dr}{2})d\theta dr$。

(6)，作用在平面$A'B'C'D'$上的力为$-(p+\frac{\partial p}{\partial z}dz)\cdot(r+\frac{dr}{2})d\theta\cdot dr$。

由(8)式知微团的体积为$\Delta V=r dr d\theta dz$。

微团的质量为：$\Delta m=\rho\cdot\Delta V=\rho r dr d\theta dz$。

根据牛顿力学$F=ma$，可以列出三个方向的运动方程式。

由上面六个力在r方向(径向)的分力之和等于$\Delta m a_r$就可得到径向运动方程式。

力(1)是径向的，它的径向分力就是$pr d\theta dz$，

力(2)也是径向的，它的径向分力就是$-(p+\frac{\partial p}{\partial r}dr)(r+dr)d\theta dz$

力(3)在径向的分力为$p dr\cdot dz \sin(\frac{d\theta}{2})$，(见图5)

力(4)在径向的分力为$(p+\frac{\partial p}{\partial\theta}d\theta)dr dz \sin(\frac{d\theta}{2})$。

力(5)和力(6)垂直于(r，θ)平面，因此，径向分力为零

径向加速度(公式(7))为：$a_r=\frac{dC_r}{dt}-\frac{C_\theta^2}{r}$。

因此，径向运动方程式为：

$$pr d\theta dz-(p+\frac{\partial p}{\partial r}dr)(r+dr)d\theta dz+p dr dz\sin(\frac{d\theta}{2})+(p+\frac{\partial p}{\partial\theta}d\theta)\cdot$$

$$\cdot dr dz\sin(\frac{d\theta}{2})=\rho r dr d\theta dz(\frac{dC_r}{dt}-\frac{C_\theta^2}{r})$$。

因为$d\theta$很小，所以$\sin(\frac{d\theta}{2})\approx\frac{d\theta}{2}$，同时又忽略高阶微量．经过化简整理后，得到径向运动方程式为：

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{dC_r}{dt}-\frac{C_\theta^2}{r} \qquad (16a)$$

同理，可列出：

切向运动方程式 $$-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{r\partial\theta}=\frac{1}{r}\frac{d(C_\theta r)}{dt} \qquad (16b)$$

轴向运动方程式 $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{dc_z}{dt}$ (16C)

毛主席教导我们："任何过程如果有多故矛盾存在的话，其中必定有一种是主要的，……抓住了這个主要矛盾，一切问题就迎刃而介了。"

牛顿力学定律 $F=ma$ 中的F力应该包括所有作用在气体微团上的外力，我们在推导中只考虑了微团周围的气体作用于微团上的压强所产生的力。实际上除了這个力之外，还有重力，粘性力。由于气体的密度很小，重力可以忽略不计。粘性力的影响在边界层内因为速度梯度很大，所以显着，不能忽略。在中心主流区内，因为速度梯度很小，粘性力可以忽略不计。气体在轴流式压气机内的流动是否存在中心主流区，看法不一致。英国在40年代有关于二、三级压气机的试验报告，其中气流速度沿叶片高度的分布图如图6所示。它説明不存在中心主流区，整个流场内部应考虑粘性。美国前几年GE公司有关于十二级的压气机试验报告[2]流动的速度分布图如图7所示，它说明即使在后面级中气流可以区分为一个中心主流区和两端两个边界层流动区，在主流区内速度梯度很小，可以不考虑粘性。

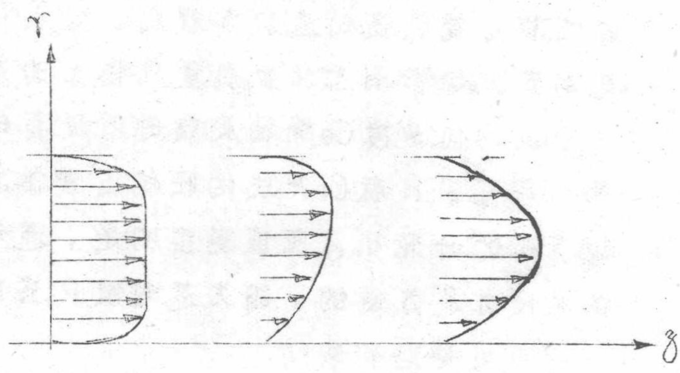

图6 气流速度沿叶高的分布

对粘性影响的研究工作，目前做得还很不够，有待于进一步深入研究。

(16) 式比较全面的形式应为：

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\text{粘性力项}=\frac{dC_r}{dt}-\frac{C_\theta^2}{r} \qquad (17a)$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\partial\theta}+\text{粘性力项}=\frac{1}{r}\frac{d(C_\theta r)}{dt} \qquad (17b)$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\text{粘性力项}=\frac{dC_z}{dt} \qquad (17c)$$

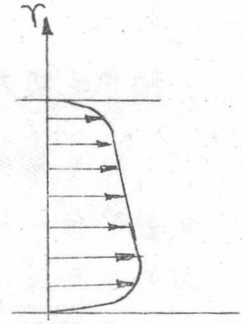

图7 气流速度沿叶高的分布

第二节 径向运动方程式

公式(17a)是径向运动方程式，(或者称为径向平衡方程式)，略去$\frac{dC_r}{dt}$，(17a)式成为：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{C_\theta^2}{r} \qquad (18)$$

此式称为简化径向运动方程式。公式左边项是压强沿半径方向变化而产生的作用于单位质量气体上的力。公式右边项是单位质量气体以切向速度C_θ绕轴旋转时所具有的向心加速度。方程式(18)常々被用来计算C_θ产生的径向压强梯度，成功地设計出大轮毂比和轻载荷的叶轮机。应该指出的是，這种计算只是当熵沿径向不变的时候才是方便的，因为這时候ρ只是P的函数，(18)式才很容易用来对P沿r积分。

下面我们再来看径向运动方程式(17a)，因为速度的径向分量C_r是r，θ，z和t的函数，所以右边第一项$\frac{dC_r}{dt}$为：

$$\frac{dC_r}{dt}=\frac{\partial C_r}{\partial t}+\frac{\partial C_r}{\partial r}\frac{dr}{dt}+\frac{\partial C_r}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt}+\frac{\partial C_r}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$=\frac{\partial C_r}{\partial t}+C_r\frac{\partial C_r}{\partial r}+\frac{C_\theta}{r}\frac{\partial C_r}{\partial\theta}+C_z\frac{\partial C_r}{\partial z} \qquad (19)$$

上式中等号右边第一项是C_r对t的偏导数，物理意义是当质点位