对称性原理

（二）

有限对称群的表象及其群论原理

唐有祺

科学出版社

目　　录

第一章　矩阵代数基础

第二章　对称换算和方阵表象

第三章　有限点群的不可约表象

第一章 矩阵代数基础

对称图象都是由若干个相等的部分或单元按照一定方式组成的，而这个方式经过抽象和概括，成为对称图象所属的对称操作群，简称对称群.

对称操作既可以使对称图象复原，又可以联系其中的各个相等的部分或单元.

现在我们考虑对称群G中有N个操作，即

$$G=\{\boldsymbol{R}_1(=\boldsymbol{E}),\boldsymbol{R}_2,\cdots,\boldsymbol{R}_N\}$$

则从空间的一个点 P_1 出发，通过这样的N个操作，可以在这个空间中引出N个成套的相当点：

$$P_1,P_2,\cdots,P_N$$

而这N个相当点的坐标或向量 $\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2,\cdots,\boldsymbol{\rho}_N$ 之间，可以通过与N个对称操作'等效'的N个方阵进行换算. 这样的换算称为对称换算，而相应的方阵称为对称换算方阵.

对称群G中的N个操作给出的N个对称换算方阵，形成G的一个表象，而通过这个表象中的方阵进行换算的东西，称为表象的基础. 表象的基础就是所谓向量.

对称群G的表象是由N个方阵组成的，而且一定是一个与G同构或同态的群.

实际上，意义较大的表象，其基础所涉及的空间往往是一个广义的向量空间.

本章的中心内容是矩阵代数基础.

我们要在§1 中介绍矩阵的定义和运算规则，然后在§2 中进一步介绍有关方阵的定义和定理.

不掌握矩阵代数中的这点基础，根本谈不到掌握对称群的表象.

§1. 矩阵的定义和运算规则

先交代矩阵的定义和运算规则.

1-1. 矩阵和换位矩阵

一般需要由两个代表序数的指标规定的一组数，形成一个矩阵.

例如 $m\times n$ 元的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

系由 $m\times n$ 个数所组成，它们各分成 m 个行和 n 个列，其中某一组元 a_{ij} 取决于代表它所在的行和列的序数的指标 i 和 j. 根据这样的矩阵，我们只要给出指标 i 和 j，就可给出组元 a_{ij}.

与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相等的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 必须也是一个 $m\times n$ 元的矩阵，而且其中的任一组元 $b_{ij}=a_{ij}$.

在上面的 $m\times n$ 元矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，我们可以把 m 个行顺序写成 m 个列，或把 n 个列顺序写成 n 个行，而这样得出的 $n\times m$ 元矩阵称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的换位矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$，即

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\mathrm{Tr}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

式中 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 代表 $\boldsymbol{A}$ 的换位矩阵，而记号 Tr 也代表换位. 换位矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 再换位后仍得原来的矩阵 $\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{A}=\mathrm{Tr}\tilde{\boldsymbol{A}}$.

1-2. 矩阵的加法

两个都是 $m\times n$ 元的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可以相加，并给出一个 $m\times n$ 元的矩阵 $\boldsymbol{C}$：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdot & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdot & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdot & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdot & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdot & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdot & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{C}$$

加法规则可以归纳为：

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

在加法规则的基础上，我们可以进一步给出：

$$\lambda\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdot & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdot & \lambda a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdot & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$$

$$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix}=\boldsymbol{O}^{(m\times n)}$$

1-3. 矩阵的乘法

矩阵的运算中最重要的是矩阵的乘法.

一个 $m\times n$ 元的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以左乘一个 $n\times p$ 元的矩阵 $\boldsymbol{B}$，并给出一个 $m\times p$ 元的矩阵 $\boldsymbol{C}$：

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdot & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdot & b_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdot & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdot & c_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdot & c_{mp} \end{bmatrix}=\boldsymbol{C}$$

矩阵的乘法规则可以表达如下：

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,b_{kj}$$

根据乘法规则，矩阵的乘法当遵循下列规律：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$$

$$(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\lambda(\boldsymbol{AB})$$

在乘法中，两个矩阵一般并不能互换．这是矩阵乘法的一个特色．

我们不难论证，乘积矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 的换位矩阵为：

$$\tilde{\boldsymbol{C}}=\tilde{\boldsymbol{B}}\tilde{\boldsymbol{A}}$$

1-4．方阵和向量

在矩阵中，我们以后经常遇到的是行数与列数相等的方阵．此外，我们也经常遇到 $m\times 1$ 元的列矩阵或 m 维的列向量：

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix}$$

它的换位矩阵

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\mathrm{Tr}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix}=[x_1x_2\cdot x_m]$$

是一个 $1\times m$ 元的行矩阵或 m 维的行向量．只需要一个代表序数的指标规定的一组数，形成一个向量．

练习和应用

1·1 请给出下列换位矩阵：

(1) $\mathrm{Tr}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $\mathrm{Tr}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(3) $\mathrm{Tr}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(4) $\mathrm{Tr}[xyz]$

1·2 请练习矩阵的加法：

(1) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\pm\begin{bmatrix} u & v & w \\ x & y & z \end{bmatrix}$

(2) $7\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$

1·3 请阐述，矩阵的乘法规则可以“形象地”表达如下：

$$c_{ij}=[a_{i1}a_{i2}\cdot a_{in}]\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdot \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,b_{kj}$$

1·4 请练习矩阵的乘法：

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(5) $[xyz] \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

(6) $\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1·5 下面六个二维方阵按照矩阵的乘法形成一个六阶群：

$$\boldsymbol{E}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

请为这个群立出乘法表。

1·6 请根据公式 Tr $(AB)=\widetilde{B}\widetilde{A}$论证：

$$\mathrm{Tr}(ABCD)=\widetilde{D}\widetilde{C}\widetilde{B}\widetilde{A}$$

提示：$\mathrm{Tr}[(ABC)D]=\widetilde{D}\mathrm{Tr}(ABC)=\cdots$

1·7 请得出下列乘积：

(1) $\underset{(1\times m)}{[x_1x_2\cdot x_m]}\underset{(m\times 1)}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix}}$

(2) $\underset{(m\times 1)}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_m \end{bmatrix}}\underset{(1\times m)}{[x_1x_2\cdot x_m]}$

§ 2. 方阵的定义和定理

群的表象系由方阵组成。现在要对方阵的定义和定理有所介绍。

2-1. 方阵的迹和两个定理

在方阵中，全部对角元的和，称为方阵的迹。对角元系指方阵对角线上的各个组元。

例如 $m\times m$ 元或 m 维的方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mm} \end{bmatrix}$$

的迹为

$$\chi_A=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{mm}=\sum_{i=1}^{m}a_{ii}$$

方阵的对角元在换位中不变．因此，方阵 $\boldsymbol{A}$ 与它的换位方阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的迹一定相等，即

$$\chi_{\boldsymbol{A}}=\chi_{\tilde{\boldsymbol{A}}}$$

这个定理称为方阵换位迹不变定理．

我们还要进一步指出，同维方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的两个乘积方阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{BA}$ 具有相同的迹，即

$$\chi_{\boldsymbol{C}}=\chi_{\boldsymbol{AB}}=\chi_{\boldsymbol{BA}}=\chi_{\boldsymbol{D}}$$

根据乘法规则，不难给出

$$\chi_{\boldsymbol{C}}=\sum_{j=1}^{m}c_{jj}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}a_{jk}b_{kj}$$

$$\chi_{\boldsymbol{D}}=\sum_{k=1}^{m}d_{kk}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}b_{kj}a_{jk}$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}a_{jk}b_{kj}=\chi_{\boldsymbol{C}}$$

这个方阵乘积的迹不变定理说明，方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 在乘法中一般并不互换，但乘法的次序却并不影响乘积方阵的迹，即

$$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$$

但

$$\chi_{\boldsymbol{AB}}=\chi_{\boldsymbol{BA}}$$

在这个定理的基础上，我们不难进一步得出

$$\chi_{\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{AB}}=\chi_{\boldsymbol{A}}$$

式中方阵 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 为方阵 $\boldsymbol{B}$ 的倒易方阵，即

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{E}^{(m)}$$

在称为 m 维主方阵的 $\boldsymbol{E}^{(m)}$ 中，对角元全为1，而非对角元全为0。

2-2. 方阵的行列式和两个公式

方阵

$$
\boldsymbol{A}^{(m)}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mm} \end{bmatrix}
$$

的行列式为

$$
\det\boldsymbol{A}^{(m)}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & a_{mm} \end{bmatrix}=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\ A_{ij}
$$

$$
=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\ A_{ij}
$$

式中 A_{ij} 称为组元 a_{ij} 的余子式。在这个 m 维行列式中，划去第 i 行和第 j 列后可以得出一个 $(m-1)$ 维的行列式，然后按 $(-1)^{i+j}$ 加上正或负号，即可得出余子式 A_{ij}。而一维方阵 $\boldsymbol{A}^{(1)}=[a]$的行列式 $\det\boldsymbol{A}^{(1)}\equiv a$。

例如在上面的行列式 $\det\boldsymbol{A}^{(m)}$中，要得出余子式 A_{12}，可以先划去第 1 行和第 2 列，然后按$(-1)^{1+2}=-1$ 为得出的 $(m-1)$ 维行列式加上负号，即余子式 A_{12} 为

$$
A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & a_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdot & a_{mm} \end{vmatrix}
$$

在行列式 $\det \boldsymbol{A}^{(m)}$ 中，我们还可以进一步指出：

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} A_{i'j} = [a_{i1}\, a_{i2} \cdot a_{im}] \begin{bmatrix} A_{i'1} \\ A_{i'2} \\ \cdot \\ A_{i'm} \end{bmatrix}$$

$$= \delta_{ii'} |\det \boldsymbol{A}^{(m)}|$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\ A_{ij'} = [a_{1j}\, a_{2j} \cdot a_{mj}] \begin{bmatrix} A_{1j'} \\ A_{2j'} \\ \cdot \\ A_{mj'} \end{bmatrix}$$

$$= \delta_{jj'} |\det \boldsymbol{A}^{(m)}|$$

根据行列式的定义，我们最后可以给出下列两个重要公式：

$$\det \boldsymbol{A} = \det \tilde{\boldsymbol{A}}$$

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}$$

不难从后者进一步得出

$$\det(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{AB}) = \det \boldsymbol{A}$$

2-3．分隔方阵和方块方阵

一个方阵可以分隔为较小的亚矩阵，并通过它们表达成一个元数较低的分隔方阵。

例如下面两个三维的方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都可按相似的方式分为四个较小的亚矩阵，并可通过它们表达成一个二维的分隔方阵：

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \hline \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{A}_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{21} = [a_{31} a_{32}], \quad \boldsymbol{A}_{22} = [a_{33}]$$

$$
\boldsymbol{B}=\left[\begin{array}{cc|c} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \hline \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{array}\right]
$$

$$
\boldsymbol{B}_{11}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_{12}=\begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{B}_{21}=[b_{31}b_{32}], \quad \boldsymbol{B}_{22}=[b_{33}]
$$

经过这样分隔以后，方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的乘积当可给出如下：

$$
\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{22} \\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22} \end{bmatrix}
$$

我们以后经常遇到的分隔方阵将是一组相似的方块方阵。这是一组同维的方阵，它们的非零组元都相似地集中在对角线附近，并形成一系列为对角线所贯穿的亚方阵。

例如下面的三维方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是两个相似的方块方阵：

$$
\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_{33} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O}^{(2\times1)} \\ \hline \boldsymbol{O}^{(1\times2)} & \boldsymbol{A}_{22} \end{array}\right]
$$

$$
\boldsymbol{B}=\left[\begin{array}{cc|c} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ \hline 0 & 0 & b_{33} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{O}^{(2\times1)} \\ \hline \boldsymbol{O}^{(1\times2)} & \boldsymbol{B}_{22} \end{array}\right]
$$

这两个相似的方块方阵的乘积当为

$$
\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{O}^{(2\times1)} \\ \boldsymbol{O}^{(1\times2)} & \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22} \end{bmatrix}=\boldsymbol{C}
$$

乘积方阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 亦为一个与 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似的方块方阵。

现在设想两个较大的相似方块方阵：

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & A_{33} & \\ & & & A_{44} \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & B_{33} & \\ & & & B_{44} \end{bmatrix}$$

它们的乘积当亦为一个相似的方块方阵：

$$C=AB=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & & & \\ & A_{22}B_{22} & & \\ & & A_{33}B_{33} & \\ & & & A_{44}B_{44} \end{bmatrix}$$

在一组这样的方块方阵中，各个亚方阵自成一系，从而具有独立性。

上面的方块方阵 A 可以写成组成它的亚方阵 $A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}$ 的直和，即

$$A=A_{11}\dot{+}A_{22}\dot{+}A_{33}\dot{+}A_{44}$$

采用 $\dot{+}$ 为直和的符号，以示有别于一般的加号。与方块方阵 A 相似的方阵 B 可以写成

$$B=B_{11}\dot{+}B_{22}\dot{+}B_{33}\dot{+}B_{44}$$

相似的方块方阵 A 和 B 的乘积可以写成

$$C=AB=A_{11}B_{11}\dot{+}A_{22}B_{22}\dot{+}A_{33}B_{33}\dot{+}A_{44}B_{44}$$

在方块方阵 A 中，有时亚方阵 $A_{11}, A_{22}, \cdots$ 都是一维方阵。

这样的方块方阵称为对角方阵.

例如下面给出的是一个 $m\times m$ 元或 m 维的对角方阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & a_{mm} \end{bmatrix}$$

下面的 m 维对角方阵就是所谓 m 维主方阵:

$$\boldsymbol{E}^{(m)}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

2-4. 方阵的直积和有关的定理

两个方阵可以按照两种乘法得出两种乘积.

两个 m 维的方阵可以根据 1-3 中的乘法得出一个 m 维的方阵. 这种乘法称为内乘法,所得乘积称为内积.

一个 m 维的方阵 $\boldsymbol{A}$ 与一个 n 维的方阵 $\boldsymbol{B}$ 也可以通过外乘法得出一个 $m\times n$ 维的方阵. 这样的乘积称为直积. 方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的直积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 定义如下:

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & a_{12}\boldsymbol{B} & \cdot & a_{1m}\boldsymbol{B} \\ a_{21}\boldsymbol{B} & a_{22}\boldsymbol{B} & \cdot & a_{2m}\boldsymbol{B} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}\boldsymbol{B} & a_{m2}\boldsymbol{B} & \cdot & a_{mm}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$

式中

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdot & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdot & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdot & b_{nn} \end{bmatrix}$$

下面将二维的方阵 $\boldsymbol{A}$ 与二维的方阵 $\boldsymbol{B}$ 的直积展开如下: