Advanced Algebra

高等代数

安 军 蒋 娅 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

Advanced Algebra

高等代数

安 军　蒋 娅 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

高等代数 / 安军，蒋娅编著．— 北京：北京大学出版社，2016.5
ISBN 978-7-301-27085-1

Ⅰ．①高… Ⅱ．①安… ②蒋… Ⅲ．①高等代数－高等学校－教材 Ⅳ．① O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 084041 号

书　　名	高等代数 GAODENG DAISHU
著作责任者	安军　蒋娅　编著
责任编辑	尹照原
标准书号	ISBN 978-7-301-27085-1
出版发行	北京大学出版社
地　　址	北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址	http://www.pup.cn
新浪微博	@ 北京大学出版社
电子信箱	zpup@pup.cn
电　　话	邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021 出版部 62754962
印 刷 者	北京大学印刷厂
经 销 者	新华书店
	730 毫米 ×980 毫米　16 开本　27.25 印张　475 千字
	2016 年 5 月第 1 版　2016 年 5 月第 1 次印刷
定　　价	48.00 元

内容提要

全书共分十章，内容包括行列式、矩阵、线性方程组、多项式、线性空间、线性变换、矩阵相似标准形、欧氏空间、二次型、MATLAB应用简介. 为了与现行高中数学内容衔接，将“数学归纳法”和“复数及其运算”放在书后作为附录.

作者根据多年从事高等代数、线性代数教学的经验，充分照顾大多数高等院校数学类专业学生的接受能力和教学需求，精心选择教学内容，合理安排结构体系. 注重理论发展线索的描述和概念的自然引入，激发学生们的学习兴趣. 在叙述数学命题时，尽可能将数学语言转化为中文语言，便于理解和记忆. 语言精练、文笔流畅、由浅入深地向读者传授高等代数的基础知识和基本方法，同时，注重知识前后联系，培养学生能力. 各章安排了丰富的例题和习题，除最后一章外，每章结束都有补充例题和补充习题，以此来满足不同层次学生的学习要求. 本书前九章包含例题252道，习题388道，部分题目的设计源于考研原题，有的给出了多种解法. 除了少数容易的证明题外，绝大多数习题都有答案或提示附于书后. 考虑到高等代数应该与现代应用数学相结合，特别安排最后一章介绍MATLAB软件及其在高等代数中的应用，目的在于帮助学生快速完成烦琐运算，将更多精力用于理解高等代数的基本思想和运算逻辑，提高学习兴趣.

本书可作为高等学校数学教育(师范)、数学与应用数学、信息与计算科学、金融数学等专业的教材，也可以作为经济学、统计学或其他理工科专业的教材或教学参考书. 尤其对有考研志向的青年学生，本书将是合适的入门教材和复习参考书.

前　言

“高等代数”是数学类各专业的一门重要基础课.作者在多年的教学工作中深深地感到，对于刚从高中跨入大学校门的年轻人来说，不宜过多地向他们介绍抽象概念和严格的定理证明，应该在讲清理论发展线索的同时，通过列举适当例子教会学生运用这些理论和方法解决实际问题. 基于这个想法，作者认真研究了同类教材的先进经验，教学中不断探索和总结，在保证教材科学性前提下，精心选择知识点，合理安排内容体系，写成了这本《高等代数》教材. 为达到“学生自学容易，教师备课轻松”之目的，本书突出了以下特点：

第一，选择知识点略小于北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组编著的《高等代数》[1]所覆盖的范围，与国内大多数高校数学专业研究生入学考试大纲相当.

第二，安排了丰富的例题和习题，注重知识前后联系，强调培养学生运用知识解决问题的能力，照顾理论课与习题课合二为一教学班级的实际需求.

第三，做到语言精练、文笔流畅，由浅入深地向读者传授高等代数基本知识和基本方法，在教会学生理解抽象数学概念、用中文语言表达数学命题方面深下功夫.

具体到细节的处理，本书与传统教材相比亦有诸多不同.

在“矩阵”一章，突出了矩阵与单位列向量相乘(或单位行向量与矩阵相乘)、矩阵分块初等变换的地位和作用；在“线性方程组”一章，从分析例题入手探讨线性方程组有解的条件，强化了用中文语言表述向量组线性相关性的命题，便于学生理解和记忆；在“多项式”一章，加强了综合除法与因式分解的运用；在“线性变换”一章，突出了同构映射的地位和作用，将“不变子空间”放在最后一节，便于教学取舍；在“矩阵相似标准形”一章，突出了行列式因子、不变因子和初等因子的相互关系及运用，强调了最小多项式是最后一个不变因子，强化了对“最小多项式”的理解及应用；在“二次型”一章，强调了矩阵的等价、相似与合同的区别与联系，突出了合同的判别条件及应用，加强了正定(半正定)二次型的等价刻画及应用.

从第五章“线性空间”开始，抽象性进一步增强，难度增加，各章节加强了概念的自然引入和知识发展线索的介绍，激发学生的求知欲望和学习兴趣. 除最

后一章外,其余每章末都有“补充例题”和“补充习题”. 本书前九章共有例题252道,习题388道,部分题目选自近年考研原题. 不少例题或定理证明使用了多种方法,目的是培养学生灵活运用知识的能力. 除少数较容易的证明题外,绝大部分习题均有答案或提示附于书后.

考虑到高等代数与现代应用数学相结合,减轻读者计算负担,本书专门安排了第十章介绍 MATLAB 软件及其在高等代数中的应用.读者学完第二章后可以自学第十章,在课时充足的情况下也可以由教师讲授. 读者通过本章的学习,能应用 MATLAB 软件快速准确地完成复杂的运算以验证手工计算的正确性,将更多精力用于理解运算逻辑,拓宽应用数学知识面,提高学习兴趣.

在教学中,略去“§1.5:拉普拉斯展开定理,§7.5:有理标准形,第十章:MATLAB应用简介”,以及部分定理的证明(已加“*”标明)与部分例题或习题不在课堂讲授(留给学生课外自学),其余内容能在128课时左右完成.

在写作过程中,作者充分汲取同类教材的优点,特别值得一提的是:北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组编的《高等代数》、张禾瑞等编的《高等代数》[2]、屠伯埙等编的《高等代数》[3]、张志让等编的《高等代数》[4]、西北工业大学编的《高等代数》[5]、熊全淹等编的《线性代数》[6]、杨子胥编的《高等代数》[7]这些经典书籍对作者启发很深,受益匪浅.

感谢武汉大学邹新堤教授对作者编写本书的支持和帮助,邹老师仔细审阅了本书初稿,提出许多宝贵修改意见和建议,使本书增色不少. 感谢钟润华讲师参与了第一章和第二章部分修订工作. 感谢罗家贵教授、丁宣浩教授、陈义安教授、袁德美教授、李勇副教授、廖书副教授、吴明忠副教授、曾小林副教授、黄应全讲师对作者编写本书的关心和支持.感谢重庆市教委自然科学基金项目(编号:KJ130705、KJ120732)和国家自然科学基金项目(编号:11301568)的支持. 最后,要特别感谢北京大学出版社尹照原编辑,正是由于他认真负责和高效率的工作,本书方能及早面世,各位亦能及时分享到作者的心得和体会.

本书写成后历经数学与应用数学专业、金融数学专业本科教学试用和反复多次修改校正. 尽管作者一直追求尽善尽美,但因水平所限,书中的问题和错误实在难免,恳请同行专家和广大读者提出宝贵的批评意见和建议,来函邮件发至:scottan@sohu.com.

安军 蒋娅

2016年3月

目　　录

第一章 行 列 式

行列式起源于研究线性方程组是否有唯一解，其思想和方法早在公元前三世纪我国历史上第一部数学教科书《九章算术》中就有记载．1683 年，日本数学家关孝和在一部研究如何建立并求解方程的著作中引进了行列式．在欧洲，德国数学家莱布尼茨是第一个提出行列式概念的人，1693 年莱布尼茨在写给数学家洛必达的一封信中使用了行列式，并给出线性方程组系数行列式为零的条件．时至今日，行列式的理论和方法已非常成熟，它不仅应用于数学的各个分支，在物理学、化学、生命科学、经济管理和工程技术等领域中都有广泛的应用．本章主要介绍行列式的基本概念、性质与计算方法，然后介绍 n 元线性方程组的克莱姆法则．

§1.1 二阶与三阶行列式

1.1.1 二阶行列式

定义 1.1 设 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 为四个数，我们称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

为一个**二阶行列式**，其中每一个数 a_{ij} 称为**元素**．元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为**列标**，表明该元素位于第 j 列．a_{11},a_{22} 称为**主对角线元素**，a_{12},a_{21} 称为**副对角线元素**．

因此，二阶行列式等于主对角线元素之积减去副对角线元素之积，这就是二阶行列式的**对角线法则**．

考察二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，用消元法解得

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

其中 D_1,D_2 分别是常数项替换 D 的第 1 列和第 2 列得到的二阶行列式．当 $D\neq 0$ 时，二元线性方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{1.2}$$

例 1.1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2=12, \\ 2x_1+\ x_2=1. \end{cases}$$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=12-(-2)=14,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-24=-21,$$

因此，

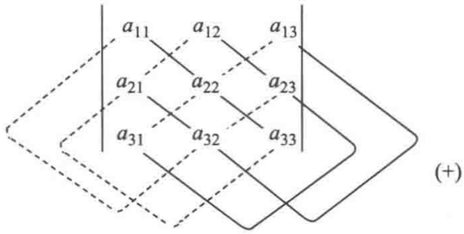
$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{14}{7}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{7}=-3.$$

1.1.2 三阶行列式

定义 1.2 设 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$为九个数，我们称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

为一个**三阶行列式**,其展开式 6 项的正负符号由下图给出:



连在实线上的 3 个数相乘为正,连在虚线上的 3 个数相乘为负,这就是三阶行列式的**对角线法则**.

例 1.2　计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

解　由对角线法则得

$$\begin{aligned} D &= 1\times 2\times(-2) + (-2)\times 4\times(-4) + 2\times 1\times(-3) \\ &\quad -(-4)\times 2\times(-3) - 2\times(-2)\times(-2) - 1\times 4\times 1 \\ &= -14. \end{aligned}$$

例 1.3　求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

解　方程左端的三阶行列式

$$D = 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12 = x^2 - 5x + 6 = 0,$$

解得 $x=2$ 或 $x=3$.

与二元线性方程组相似,对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{1.3}$$