College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

线性代数与空间解析几何学习指导

主　编　邱　威　王晓莺
副主编　凌焕章　王立刚

高等教育出版社

College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

线性代数与空间解析几何学习指导

Xianxing Daishu yu Kongjian Jiexi Jihe Xuexi Zhidao

主　编　邱　威　王晓莺
副主编　凌焕章　王立刚

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是与由范崇金、王锋主编的大学数学系列教材《线性代数与空间解析几何》相配套的教学参考书。本书的内容与主教材内容平行，并紧扣教材，分两部分。第一部分与教材章节相扣，共有八章，每章内容包括知识点与要求、典型题解析、综合与提高、同步自测题及其答案与提示。第二部分为教材的配套习题精解，可帮助学生加强对课程内容的理解及巩固。

本书可作为高等学校非数学类各专业学生学习线性代数课程的辅导书，也可作为硕士研究生入学考试的考前复习和强化训练参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与空间解析几何学习指导 / 邱威，王晓莺主编. -- 北京 ：高等教育出版社，2016.9

（大学数学学习辅导丛书）

ISBN 978-7-04-046347-7

Ⅰ.①线… Ⅱ.①邱… ②王… Ⅲ.①线性代数－高等学校－教学参考资料②立体几何－解析几何－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.①O151.2②O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 198553 号

策划编辑 张晓丽 责任编辑 李 茜 特约编辑 李 哲 封面设计 赵 阳
版式设计 马 云 插图绘制 杜晓丹 责任校对 高 歌 责任印制 赵义民

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	北京市鑫霸印务有限公司		http://www.hepmall.com
开 本	787mm×960mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	25		
字 数	450 千字	版 次	2016 年 9 月第 1 版
购书热线	010－58581118	印 次	2016 年 9 月第 1 次印刷
咨询电话	400－810－0598	定 价	38.80 元

物 料 号 46347－00

前言

线性代数是高等学校重要的公共数学基础理论课，又是硕士研究生入学考试必考科目。线性代数课程应用性广，理论上又高度抽象，为了帮助广大学生理解和消化课程内容，巩固和扩展所学知识，掌握和提高计算技能，学习和应用数学软件，配合《线性代数与空间解析几何》主教材，我们精心编写了本书。

全书基础知识部分共分8章，每章均由五部分组成：知识点与要求、典型题解析、综合与提高、同步自测题及其答案与提示。在知识点与要求部分，编者概括地提炼出该章的主要概念、重要定理和结论及学生应掌握的基本计算方法，以便读者能够提纲挈领地掌握该章的基本概念、基本理论和基本方法。在典型题解析和综合与提高部分，按难易程度分别对每一章节的典型题型进行了分类、剖析和解答。同步自测题涵盖了国内外优秀教科书和习题集的典型题目，增加了部分全国硕士研究生入学统考题目，丰富和拓展了所学知识，使读者可以有选择地进行学习，以提高学生解决问题的能力。本书中所有同步自测题均附有答案，帮助学生检验自己对所学知识的掌握程度。最后对《线性代数与空间解析几何》（范崇金、王锋主编）主教材书后部分习题进行了详细解答。

本书可作为高等学校各专业学习线性代数课程的辅导书，也可作为硕士研究生入学考试的考前复习和强化训练参考书。

本书由哈尔滨工程大学理学院工科数学教研部组织编写，由邱威、王晓莺任主编，凌焕章、王立刚任副主编。本书编写过程中得到哈尔滨工程大学理学院广大数学教师的支持，得到哈尔滨工程大学各级相关部门的支持，也得到高等教育出版社的大力支持，在此我们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，敬请广大读者批评指正。

编　者

2016 年 4 月 18 日

目录

第1章 行列式

1.1 知识点与要求

1. 理解二、三阶行列式定义,会用定义作简单运算.

2. 了解 n 元排列,逆序数,奇、偶排列的概念,会求 n 元排列的逆序数.

3. 了解对换的概念及以下两个结论:

(1) 对换改变排列的奇偶性.

(2) 任意 n 元排列均可经有限次对换变成标准排列,且奇(偶)排列经过奇(偶)数次对换变成标准排列.

4. 理解 n 阶行列式的定义,会用定义计算行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n \in A_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

5. 掌握行列式元素余子式、代数余子式的概念.

在 n 阶行列式中,去掉元素 a_{ij} 所在的行和列,剩余的 $n-1$ 行 $n-1$ 列元素按照原来的位置构成的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij};余子式 M_{ij} 与 $(-1)^{i+j}$ 的乘积称为元素 a_{ij} 的代数余子式,记为 A_{ij}(即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$).

6. 熟练掌握行列式以下性质,并会用这些性质计算行列式.

(1) 行列式做转置,其值不变.

(2) 交换行列式中两行(列)位置,行列式变号.

(3) 若行列式中两行(列)元素完全相同,则该行列式为零.

(4) 行列式某行(列)元素的公因子可以提到行列式符号外面.

(5) 若行列式中某两行(列)元素对应成比例,则该行列式为零.

(6) 若行列式的某一行(列)可写成两部分之和,则行列式可按该行(列)拆成两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(7) 把行列式某行(列)元素的若干倍加到另一行(列)上,行列式值不变.

(8) 行列式按行(列)展开定理:

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} D, 当\ i=j\ 时, \\ 0, 当\ i\neq j\ 时. \end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases} D, 当\ i=j\ 时, \\ 0, 当\ i\neq j\ 时. \end{cases}$$

7. 掌握以下特殊行列式的计算结果,并会利用行列式结果简单计算.

(1) 上、下三角行列式,对角行列式.

(2) $$\begin{vmatrix} * & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

(3) 范德蒙德行列式

$$V_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2&\cdots&a_1^{n-1}\\1&a_2&a_2^2&\cdots&a_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_n&a_n^2&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i),$$

且当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相等时，$V_n\neq0$.

(4) $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&*\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\*&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$.

8. 会用以下方法计算行列式.

(1) 用定义(例 1.4).

(2) 化上(下)三角行列式(例 1.5).

(3) 按行(列)展开降阶计算(例 1.5).

(4) 所有元素加到第一行(列)，提出公因子(例 1.6).

9. 掌握克拉默法则，会用克拉默法则解方程组

在方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$ 中，若 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq0$，

则该方程组有唯一解，即 $x_1=\dfrac{D_1}{D},x_2=\dfrac{D_2}{D},\cdots,x_n=\dfrac{D_n}{D}$，式中，$D_i$ 为 D 中将第 i 列元素换成 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所得行列式.

1.2 典型题解析

例 1.1 求下列排列的逆序数，并判断奇偶.

(1) 1347265;

(2) $n(n-1)\cdots21$.

分析 在一个排列中考察每个元素前面有几个比自己大的数，把这些个数相加，即得此排列的逆序数.

在1347265中,数字1前面有0个比1大的数,数字3前面有0个比3大的数,数字4前面有0个比4大的数,数字7前面有0个比7大的数,数字2前面有3个比2大的数,数字6前面有1个比6大的数,数字5前面有2个比5大的数,因此$\tau(1347265)=0+0+0+0+3+1+2=6$.

解

$$\tau(1347265)=0+0+0+0+3+1+2=6,$$

1347625为偶排列.

同理

$$\tau(n(n-1)\cdots 21)=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

当n被4整除或被4除余1时,$n(n-1)\cdots 21$为偶排列;当n被4除余2或3时,$n(n-1)\cdots 21$为奇排列.

例1.2 若排列$x_1x_2\cdots x_n$的逆序数为a,则排列$x_nx_{n-1}\cdots x_1$的逆序数为多少?

分析 此题用例1.1的方法计算非常复杂,此时可以考虑用逆序数的基本定义,即在一个排列中考察每个元素的前后次序,若小数在前,大数在后,则称构成一个顺序;若大数在前,小数在后,则称构成一个逆序,排列中逆序的总个数称为排列的逆序数.

本题中注意$x_1x_2\cdots x_n$与$x_nx_{n-1}\cdots x_1$的关系,若某两个元素在$x_1x_2\cdots x_n$中构成顺序,则在$x_nx_{n-1}\cdots x_1$中就一定构成逆序,反之亦然,从而$x_nx_{n-1}\cdots x_1$的逆序数就是$x_1x_2\cdots x_n$中顺序的个数.

解 在$x_1x_2\cdots x_n$中任选两数比较前后次序,共可找出$C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$对比较次序,由$x_1x_2\cdots x_n$的逆序数为a,则顺序个数为$\dfrac{n(n-1)}{2}-a$,而$x_nx_{n-1}\cdots x_1$的逆序数就是$x_1x_2\cdots x_n$中顺序个数,因此$\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_1)=\dfrac{n(n-1)}{2}-a$.

例1.3 求$f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$中$x^3$的系数.

分析 $f(x)$按行列式定义展开表示24项相加减,每项主体部分为行列式中四个既不同行也不同列的元素相乘,我们只需将展开式中含有x^3项都找出来,就可得到x^3的系数了.

下面我们来找四个既不同行也不同列元素相乘,出现 x^3 的项,若第一行元素取左上角第一个 x,则其余元素要在右下方 $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 3 & x & 2 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中找到两个 x 和一个数值,我们发现 $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 3 & x & 2 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中,任意找定两个 x 后,要互不同行也不同列就只能再找另一个 x,也就是在 $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 3 & x & 2 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中无法找到互不同行也不同列的两个 x 和一个数值,因此想在 $f(x)$ 的项中出现 x^3,则第一行元素不能选左上角的 x;若第一行元素选数字 1,则第三行就不能选 x,此时选择两个数字从而不出现 x^3. 同理,第一行若选数字 0 也不会出现 x^3.

综上,若想出现 x^3,第一行元素必须选取第 2 个 x,剩下 3 个元素在划去第一行和第二列后所剩的元素中找两个 x 和一个数值,只有一种找法. 找出行列式展开式中含 x^3 的主体部分为 $x,1,x,x$,再确定符号,就可以得到含有 x^3 项了.

解 在 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 的展开式中找含 x^3 项的主体部分,经分析只有 $x\cdot 1\cdot x\cdot x$ 这一项,即 $f(x)$ 展开式中 x^3 的项为 $(-1)^{\tau(2134)}x\cdot 1\cdot x\cdot x$,所以 $f(x)$ 中 x^3 项的系数为 -1.

例 1.4 用定义计算行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

解 D_1 按定义式展开表示 $n!$ 项相加减,其中非零项只有

$$(-1)^{\tau(2\,3\,\cdots\,n\,1)}1\times 2\times\cdots\times n=(-1)^{n-1}n!,$$

而其余项均为零,因此

$$D_1=(-1)^{\tau(2\,3\,\cdots\,n\,1)}1\times 2\times 3\times\cdots\times n+0+0+\cdots+0=(-1)^{n-1}n!.$$

同理

$$D_2=(-1)^{\tau((n-1)(n-2)\cdots 1\ n)}1\times 2\times\cdots\times n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!.$$

例 1.5 计算行列式 $D_1=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&-1&3\\3&0&1\end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\4&-6&1&2\end{vmatrix}$.

解 $D_1=-\begin{vmatrix}1&-1&3\\2&1&1\\3&0&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-1&3\\0&3&-5\\0&3&-8\end{vmatrix}$

$$=-\begin{vmatrix}1&-1&3\\0&3&-5\\0&0&-3\end{vmatrix}=-1\times 3\times(-3)=9,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-1&2&0&6\\1&1&0&3\\2&-1&0&0\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1&2&6\\1&1&3\\2&-1&0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}3&2&6\\3&1&3\\0&-1&0\end{vmatrix}=(-1)\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3&6\\3&3\end{vmatrix}=-9.$$

总结 (1) 从 D_1 的解法可总结出数字行列式化为上三角行列式的一般步骤：首先，使 $a_{11}\neq 0$（一般通过交换两行或两列位置将 a_{11} 化为 ± 1，以使后面步骤变得简单）；然后，把第一行分别乘以 $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \cdots, -\frac{a_{n1}}{a_{11}}$ 加到第 $2,3,\cdots,n$ 行对应元素上去，于是第一列元素除了 a_{11} 外全为零了. 重复上面的做法，将主对角线元素 $a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{n-1,n-1}$ 以下的元素全部化为零，于是行列式就变成了上三角行列式.

(2) D_2 的计算方法为“降阶法”，一般步骤：首先选出元素比较简单的一行（或一列），利用行列式性质变换，使该行（或列）只含一个非零元素，其余元素全化为零；然后行列式按该行（或列）展开降阶. 重复上面的降阶方法，最终将行列

式降为二阶,就可以直接计算了.

例 1.6 计算行列式 $D_1 = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & 1+x & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1+x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

解 $$D_1 = \begin{vmatrix} a+3b & a+3b & a+3b & a+3b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+3b)(a-b)^3,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & 1+x & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x^4.$$

总结 若行列式中每行(列)元素之和为一个共同的数值,可将行列式中其他列(行)元素的一倍加到第一列(行)上,这样在第一列(行)中可将共同数值提出来.

例 1.7 计算行列式 $D_1 = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$.

解

$$D_1=\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 2a+1 & 2b+1 & 2c+1 & 2d+1 \\ 2a+3 & 2b+3 & 2c+3 & 2d+3 \\ 2a+5 & 2b+5 & 2c+5 & 2d+5 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 2a+1 & 2b+1 & 2c+1 & 2d+1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

例 1.8　计算行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} 3 & 6 & -10 & 9 & -14 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

解

$$D_1=\begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n}\right)n!,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}=420.$$

总结　行列式中非零元素排列在第一行、第一列和主对角线上，而其他元素全为零，即若非零元素位置构成“↖”的形状，则这样的行列式称为“箭形行列式”. 类似地，“↙”“↗”和“↘”形状的行列式也称为“箭形行列式”. 箭形行列

式的处理方法为尽量在原有的零元素及主对角线上大部分元素不变的条件下，将箭头的一个边化为零，这样行列式就变成上(下)三角行列式了.

例 1.9 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 201 & 102 & -99 & 98 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

解

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 200 & 100 & -100 & 100 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=100\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=100\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}+(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=200\begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=400\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=400\times(-6)+1=-2399.$$

例 1.10 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & e_5 \end{vmatrix}$.

解 $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_4 & d_5 \\ e_4 & e_5 \end{vmatrix}=0.$

总结 利用行列式性质(9)：$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$的时候，要注意公式中的$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的部分要求是“正方”的，而$\boldsymbol{O}$与$*$的部分可以是“正方”的，也可以是“长方”的，有的同学做此题时这样分块

$$\left|\begin{array}{ccc:cc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & c_4 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & e_5 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_4 & c_5 \\ a_4 & a_5 \\ e_4 & e_5 \end{vmatrix},$$

这是错误的.

例 1.11 设三阶行列式$D=\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{vmatrix}=3$，其中，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$表示$D$中的第一行、第二行和第三行，求$\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1 \\ 4\boldsymbol{\alpha}_2 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1 \\ 4\boldsymbol{\alpha}_2 \end{vmatrix} \xlongequal{2\times r_1 \to r_2} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \\ 4\boldsymbol{\alpha}_2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} -4\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{\alpha}_3 \end{vmatrix} = -12.$

例 1.12 计算n阶行列式$D=\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}$.

解 将行列式第一行乘以-1分别加至其余各行，得箭形行列式