高等学校教学参考书

高　等　数　学

（基础部分）

上　册

清华大学数学教研组编

人民教育出版社

出 版 前 言

本书是按 1964 年 8 月第一版重印的，重印前由清华大学数学教研组作了一次勘误。

本书分上下两册出版，上册内容是平面解析几何与一元函数的微积分学。

本书可作为高等工业院校的数学参考书，也可供有关的工程技术人员参考。

高 等 数 学

（基础部分）

上　册

清华大学数学教研组编

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

北京新华印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13012·0181　开本 850×1168　1/32　印张 15

字数 333,000　印数 49,001—199,000　定价(5)￥1.40

1964 年 8 月第 1 版　　1978 年 9 月第[illegible]次印刷

上册目录

下册目录

预备知识

§1. 实数与数轴

数,最初产生于点算物件的个数,最基本的数是自然数: 1, 2, 3, ⋯.

数的运算中,最简单的是加法运算. 事实上,点算物件的个数也体现着一个一个地累加.

由于生产的逐渐发展,人們对客观事物的认識逐渐深入,数的运算扩充为四則运算,数的范圍亦由自然数扩充到整数: 0, ±1, ±2, ⋯, 再扩充到有理数. 所謂有理数,是指$\frac{q}{p}$这种形式的数, 其中 p, q 都是整数,且 $p\neq 0$. 有理数当然包括了所有整数. 这是因为,当 $p=1$ 时,有理数就简化为整数.

有理数可以用十进位小数来表示,这些小数或者是有尽的,或者是循环的. 例如:

$$\frac{1}{4}=0.25,\quad \frac{5}{6}=0.8\dot{3},\quad \frac{22}{7}=3.\dot{1}4285\dot{7}.$$

反过来,任何一个有尽小数或循环小数也都可以化为有理数.

在实际生活中,常要測量一些物理量,如长度、面积、时間、温度、重量等,取了一定的单位以后,这些量都可以被測量. 測量的結果用数来表示. 但有些量不能用有理数来表示,例如,对于两直角边皆为单位长度的直角三角形,其斜边的长度为$\sqrt{2}$个单位长度,$\sqrt{2}$不是一个有理数,又如半徑为单位长度的圓,它的面积是 π 个单位面积(单位长度的平方),π 也不是一个有理数. 像$\sqrt{2}$, π 这样的数,如果用十进位小数来表示,都是不循环的无尽小数:

$$\sqrt{2}=1.4142135\cdots,\quad \pi=3.1415926\cdots,$$

这种不循环的无尽小数叫做无理数.

有理数与无理数統称为实数. 在实数范圍内, 可以进行更多种的运算,如对于正的实数可以进行开方, 取对数, 对于任何实数可以取三角函数等. 在高等数学这一門課程中,除了个别情况外,所遇到的都是实数.

大家都知道,在数学中經常采取数与形相結合的方法来研究問題,例如,三角函数这种数量关系与直角三角形緊密联系着, 又如, 数量間的比例关系与相似形有直接的联系. 通过图形我們不仅能直观地认識数量的抽象性质,并且还可以利用图形解决一些数量的問題(如第六章中将要讲到的方程的图解法);通过数量关系的研究也能解决一些重要的几何問題(如第五章中将要讲到如何利用数量关系来精密地作出曲綫的切綫). 現在我們研究实数,也要設法将数与形結合起来.

設有一条无穷长的直綫,习慣上都把它放在水平的位置,在这直綫上任取一点 O,称为原点,在这直綫上規定好一个正方向(习慣上規定向右的方向为正方向),在这直綫上再規定好一个长度的单位. 这种具有原点、正方向与长度单位的直綫叫做数軸.

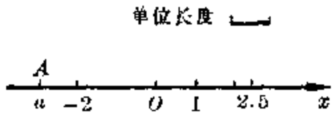


图 0.1

对于每一个实数 a,我們可以在数軸上規定一个点 A 与它对应. 規定的方法是: 若 $a=0$, 則点 A 就是原点; 若 $a>0$, 則点 A 在原点之右, 且点 A 与原点間的距离等于 a 个单位长度; 若 $a<0$, 則点 A 在原点之左, 且点 A 与原点間的距离等于 $-a(-a>0)$ 个单位长度.

反过来說,对于数軸上每一个点 A,我們可以規定一个实数 a 与它对应. 規定的方法是: 若点 A 是原点, 則 $a=0$; 若点 A 在原点 O 之右, 則 $a=|OA|$ ($|OA|$ 表示点 A 与原点 O 之間的距离); 若点 A 在原点 O 之左, 則 $a=-|OA|$.

这样一来，所有实数与数軸上所有的点形成了一种一一对应的关系，从而实数的性质与数軸上的点的性质就发生了紧密的联系。

总起来說：有理数与无理数統称为实数．每一个实数可用十进位小数来表示，有理数可用有尽小数或循环小数来表示，无理数可用不循环的无尽小数来表示．在所有实数与数軸上所有点之間存在着一一对应的关系，也就是說，对于每一个实数 a，在数軸上有一个点 A 与它对应，对于数軸上每一个点 A，有一个实数 a 与它对应．这种对应关系可以用下面的数学式子来表示：

$$a=\begin{cases}|OA|, & \text{当点 } A \text{ 在原点 } O \text{ 之右,}\\ 0, & \text{当点 } A \text{ 与原点 } O \text{ 重合,}\\ -|OA|, & \text{当点 } A \text{ 在原点 } O \text{ 之左,}\end{cases}$$

其中 $|OA|$ 表示点 A 与原点 O 之間的距离，也就是綫段 $\overline{OA}$ 的长度．

数軸也称为实数軸，也簡称为軸．与点 A 相对应的实数 a 称为点 A 在数軸上的坐标．

为了簡单計，我們时常不去区分一实数和它的对应点，而用同一符号来表示它們，我們有时說实数 a，也有时說点 a.

数軸上与有理数相对应的点叫做有理点，与无理数相对应的点叫做无理点．

显然，如实数 a 小于实数 b，則点 a 在点 b 的左方，且 $b-a$ 就是点 a 与点 b 間的距离．

现在我們进而提出实数的两个重要性质：

第一，有理数的稠密性．任給两个有理数 $a, b(a<b)$，則在 a, b 之間至少可以找到一个有理数．例如，a, b 的算术平均数 $c=\dfrac{a+b}{2}$ 就是 a, b 之間的一个有理数．同样，在 a, c 之間也至少可找到一个有理数，依次类推，可知 a, b 之間可以找到无穷多个有理数．所謂有理数的稠密性就是指：不論有理数 a, b 相差多么小，在 a, b 之間总可以找到无穷多

个有理数，也就是說，有理点在数軸上是到处稠密的.

用同样的方法可以論证，实数也具有稠密性.

第二，实数的連續性. 既然实数与数軸上的点一一对应，可見实数充滿数軸而沒有"空隙"，这就叫做实数的連續性. 有理数虽然稠密，但并不連續，例如$\sqrt{2}$、π 这些无理数就是有理数中的"空隙". 有理点之間有无穷多这种"空隙".

实数的連續性是实数的一个最根本的性质. 在以后的学习中常要用到这个性质.

§2. 絕对值

当我們对一个物理量进行直接測量时，常常是測不准的，有时偏大，有时偏小. 評定測量的准确度时，經常注意到的是偏离的大小，而不計較偏大了还是偏小了，处理这类問題时，常要用到实数的絕对值. 現在我們来介紹一下絕对值的定义及关于絕对值的一些性质.

定义. 对于实数 a，定义 a 的絕对值 $|a|$ 为

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{若 } a>0, \\ 0, & \text{若 } a=0, \\ -a, & \text{若 } a<0. \end{cases}$$

例. $|2|=2$. $|-3.1|=3.1$. $|0|=0$.

容易看出，不論点 a 在原点的右方或左方，实数 a 的絕对值 $|a|$ 表示点 a 与原点間的距离.

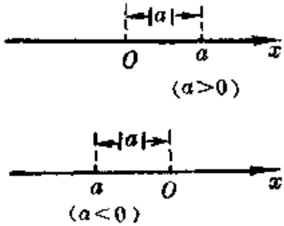


圖 0 2

I. 关于絕对值的性质

以下关于絕对值的一些性质都是明显的.

(i) $|a|\geqslant 0$.

这个不等式表示 $|a|>0$ 或者 $|a|=0$.

(ii) $|-a|=|a|$.

这个等式表示 $-a$ 和 a 的絕对值相同.

(iii) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$.

$a>0$ 时，右边是等号，左边是不等号；$a<0$ 时，右边是不等号，左边是等号；$a=0$ 时，左边右边都是等号。

(iv) 对于实数 a，如有一正数 ε，使

(1) $$|a|<\varepsilon,$$

则必然有

(2) $$-\varepsilon<a<\varepsilon.$$

其逆亦真.

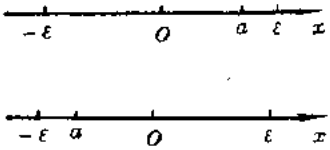


图 0.3

从几何上来看，(1) 表示点 a 与原点間的距离小于 ε，(2) 表示点 a 在点 $-\varepsilon$ 与点 ε 之間，所以，它們表示相同的意义。

(v) 对于实数 a，如有一正数 N，使

(3) $$|a|>N,$$

则必然有

(4) $$a>N \text{ 或 } a<-N.$$

其逆亦真.

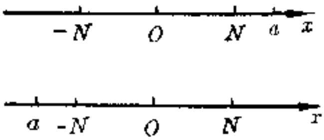


图 0.4

从几何上来看，(3) 表示点 a 与原点間的距离大于 N，(4) 表示点 a 在点 N 之右或在点 $-N$ 之左，它們也表示相同的意义。

II. 有关絕对值的四則运算

(i) 对于任意两个实数 a, b，恒有

(5) $$|a+b|\leqslant |a|+|b|.$$

证明：根据性质(iii)，有

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|,$$

$$-|b|\leqslant b\leqslant |b|.$$

二式相加，得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|.$$

根据性质(iv)，即知

$$|a+b|\leqslant |a|+|b|.$$ 证毕.

例. 当 a,b 同号时,(5) 式中等号成立,如:

$$|3+5|=|3|+|5|,$$

$$|(-3)+(-5)|=|-3|+|-5|.$$

当 a,b 异号时,(5) 式中不等号成立,如:

$$|3+(-5)|<|3|+|-5|,$$

$$|(-3)+5|<|-3|+|5|.$$

(ii) **对于任意两个实数 a,b,恒有**

(6) $$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$

证明: 因为

$$|a|=|a-b+b|\leqslant|a-b|+|b|,$$

故得

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|.$$

证毕.

(iii) **对于任意两个实数 a,b,恒有**

(7) $$|ab|=|a|\cdot|b|,\quad \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|},\quad (b\neq 0).$$

根据絕对值的定义,这两个公式显然是正确的.

§3. 变量及变量的变化范圍

我們考察各种自然現象与技术过程时,常会遇到各种各样的量,如水庫中水的深度、丰产田的面积、汽車行駛时汽油的消耗量、机床安全运轉的时間、高炉的溫度、工厂內工人的名額等等. 这些量都有共同的特征,即采取了一定的单位以后,这些量都可以通过度量用数来表示.这些数就叫做这些量所取的值.

在一定的运动过程中,有的量变化,即取不同的值,有的量则保持一个固定的值而不变,前者叫做变量,后者叫做常量. 例如人造卫星与地球間的距离是一个变量;在一定时期內,車間里的車床台数是一个常量. 若一个量在所討論的过程中变化很小,以至对某个实用目的来讲可以忽略不計时,我們也把它算作是常量. 例如,在不同的地点,落体

的重力加速度是不同的,因而它是个变量,但在較小地区中研究落体运动时,通常将重力加速度看成常量. 因此,一个量是常量还是变量,要根据具体情况来决定.

为了控制技术过程,使它满足生产实踐中所提出的种种要求,就必須把問題中所涉及的各个变量的变化情况弄清楚. 例如,为了把电压控制在 220 伏左右,或把設备利用率提高到接近 100%,就必須弄清楚电压或設备利用率的变化情况,只有这样,才能拟定出适当的措施以达到上述目的. 所以研究变量是数学中重要的課題.

变量的性质与类型是多种多样的,可以从各个不同的角度来加以考察.钟摆与鉛垂綫間的夹角是个連續变化着的变量,它的值是有界限的,譬如說总是介于$-\frac{\pi}{6}$与$\frac{\pi}{6}$之間. 但多边形的边数这个变量则只能取 3, 4, 5…这些正整数值,它不是連續变化的,它的值可以无限增大,它不是有界的. 由此可見,仅就变量的变化状态和变量所能取得的值的范圍来說,就有連續、不連續与有界、无界之分. 若就变量的变化趋势来說,也有种种不同,例如,火車从出发站开出后与出发站的距离,一般是个不断增大的变量,某个工厂产品中的次品率也許是个不断減小的变量,而地球与太阳間的距离則是时而变大、时而变小的变量. 再如就变量变化的速度来讲,也有快慢之别. 系統地研究变量的这些特点,找出它們相互联系的規律,以便利用这些規律去解决生产中的問題,这就是我們学习这門課程的目的.

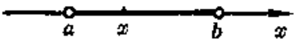
在今后的討論中,为了叙述的簡便起見,經常采用 x, y, z, θ, t 等字母来代表变量,a, b, c 等字母来代表常量. 当然,这也不是一成不变的.

变量所能取得的值的范圍常可用不等式来表示. 例如,若以 θ 代表钟摆与鉛垂綫間的夹角,則按上面一段所述的情况,θ 的变化范圍可以用不等式

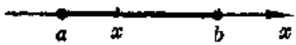
$$-\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}$$

来表示.

为了看起来更加清楚，我們还常采用下述的几何表示法. 把变量 x 所能取的每一个値都用数軸上的一个点来表示. 于是变量就可用变点即通常所說的动点来表示，而常量就相当于数軸上的一个定点了. 这时，变量的变化范圍也可在数軸上以图形表示出来. 例如，若变量 x 的变化范圍在 a, b 二数之間，即 $a<x<b$，那么，相应的动点就在数軸上的点 a 与点 b 之間变化，这些点构成一个不包括端点在内的綫段，我們称之为开区間，并以記号 (a, b) 来記它. 正像我們常把数 a 叫做点 a 一样，我們也常把不等式



开区間 (a,b)



閉区間 $[a,b]$

图 0.5

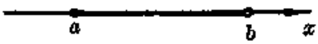
$$a<x<b$$

叫做开区間. 若变量 x 的变化范圍在 a, b 二数之間，且能取 a 与 b 二値，即 $a\leqslant x\leqslant b$，相应的动点就在数軸上构成一个包括端点在内的綫段，我們称之为閉区間 $[a, b]$. 我們也常把不等式

$$a\leqslant x\leqslant b$$

叫做閉区間.

$(a,b]$



$[a,b)$

图 0.6

变量 x 的变化范圍也可以是半开区間

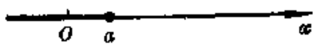
$$a<x\leqslant b,$$

記作 $(a, b]$（見图 0.6 上图），或半开区間

$$a\leqslant x<b,$$

記作 $[a, b)$（見图 0.6 下图）.

$(a,+\infty)$



$(-\infty,a]$

图 0.7

变量 x 的变化范圍也可以是无穷区間

$$x>a,\quad x\geqslant a,\quad x<a \text{ 或 } x\leqslant a,$$

分别記作 $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a)$ 或

$(-\infty, a]$.

变量 x 也可能取得任何实数值，在这种情况下，我們将变量 x 的变化范圍記作

$$-\infty < x < +\infty,$$

亦可記作无穷区間 $(-\infty, +\infty)$.

以点 a 为中点且长度为 $2l$ 的开区間叫做点 a 的 l 邻域．这是以后經常要討論到的一种区間．这种区間的端点是 $a-l$ 与 $a+l$，因此，这种区間可用不等式

图 0.8

(1) $$a-l < x < a+l$$

来表示．这种区間还有一种常見的表示法：将(1) 式改写为

(2) $$-l < x-a < l,$$

根据絕对值的性质(iv)，(2)式相当于

(3) $$|x-a| < l.$$

所以，点 a 的 l 邻域也可用不等式(3)来表示．

不等式(3)本身也有明显的几何意义．容易看出，不論 x 和 a 取什么值，$|x-a|$ 总是表示点 a 与点 x 間的距离．由此可知，不等式(3)表示动点 x 与定点 a 之間的距离小于 l(参看图 0.8)．

例一． 点 2 的 l 邻域$\left(l=\frac{5}{2}\right)$，可表示为

$$2-\frac{5}{2} < x < 2+\frac{5}{2} \text{ 即 } -\frac{1}{2} < x < \frac{9}{2},$$

这个区間也可表示为

$$|x-2| < \frac{5}{2}.$$

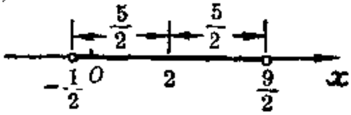


图 0.9

在图 0.9 中画出了这个区間，动点 x 位于这区間内时，动点 x 与定点 2 的距离小于$\frac{5}{2}$，也就是 $|x-2| < \frac{5}{2}$.

对于任何开区間(a,b)，它的長度为$b-a$，它的半長为$\frac{1}{2}(b-a)$，它的中点的坐标是

$$a+\frac{1}{2}(b-a)=\frac{1}{2}(a+b),$$

故开区間(a,b)是点$\frac{1}{2}(a+b)$的 l 邻域$\left(l=\frac{b-a}{2}\right)$. 由此可知，开区間$(a,b)$即不等式

(4) $$a<x<b$$

可以表示为

(5) $$\left|x-\frac{a+b}{2}\right|<\frac{b-a}{2}.$$

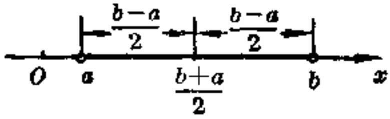


图 0.10

例二. 对于区間$(-4,2)$，它的長度为6. 它的半長为3，它的中点的坐标为$-4+3=-1$，故这区間是点-1的 l 邻域$(l=3)$. 这个区間可以表示为不等式

$$-4<x<2,$$

也可以表示为不等式

$$|x-(-1)|<3 \text{ 即 } |x+1|<3.$$

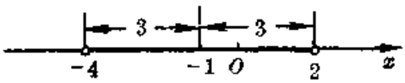


图 0.11

在图 0.11 中画出了这个区間，动点x位于这区間內时，动点x与定点-1的距离小于3，也就是$|x+1|<3$.

§4. 充分条件与必要条件

在初等数学与高等数学中，經常要討論两个数学判断之間的相互联系（所謂数学判断就是具有某种数学內容的一句話，这句話可能成立也可能不成立）. 例如，"某两角是对頂角"是一个数学判断，"某两角相等"也是一个数学判断，平面几何中有一条定理說："如果某两角是对頂角，則此两角相等". 这条定理闡明了这两个数学判断之間的联系，即由前一判断的成立能推断出后一判断的成立. 所謂充分条件与必要

条件无非是一种数学上的术語，用来簡单而明确地描述两个数学判断之間的邏輯关系。

我們来分析一下上面所举的平面几何定理："如果某两角是对頂角，則此两角相等"。

这一定理表明：从"某两角是对頂角"的成立，能够推断"某两角相等"的成立．这就是說，"某两角是对頂角"构成了"某两角相等"的充分理由，有了"某两角是对頂角"这个充分理由，就足以說明"某两角相等"．因此，我們称"某两角是对頂角"成立是"某两角相等"成立的充分条件．

这一定理也表明：在"某两角是对頂角"成立的前提下，必然会产生"某两角相等"也成立的結論．这就是說，"某两角相等"是"某两角是对頂角"所必須具备的条件，缺少了"某两角相等"这个必須具备的条件，某两角就不可能是对頂角了．因此，我們称"某两角相等"成立是"某两角是对頂角"成立的必要条件．

定义．如果从判断 A 成立能够推断判断 B 成立，我們称判断 A 成立是判断 B 成立的充分条件，判断 B 成立是判断 A 成立的必要条件。

若用字母 A 表示"判断 A 成立"这件事，用字母 B 表示"判断 B 成立"这件事，用"$A\Rightarrow B$"表示"从判断 A 成立能够推断判断 B 成立"，則上述定义就可簡述为：

定义．如果 $A\Rightarrow B$，則称 A 是 B 的充分条件，B 是 A 的必要条件．

例一．如果一个四边形为矩形，則此四边形的对角綫等长．由此可見，"四边形为矩形"是"四边形的对角綫等长"的充分条件，"四边形的对角綫等长"是"四边形为矩形"的必要条件．

例二．如果一自然数的末位数字为 0，則此自然数能被 5 整除．由此可見，"自然数的末位数字为 0"是"自然数能被 5 整除"的充分条件，"自然数能被 5 整除"是"自然数的末位数为 0"的必要条件．

例三．如果一个圓的两弦等长，則此两弦与圓心等远．由此可見，