高等学校试用教材

高等数学

上　册

（第一分册）

西安交通大学高等数学教研室编

人民教育出版社

高等数学

高等学校试用教材

高等数学

上册

（第一分册）

西安交通大学高等数学教研室编

人民教育出版社

内 容 提 要

本书是西安交通大学数学教研室在1964年和1975年该室所编《高等数学》的基础上改编而成. 共分上、下两册. 上册内容包括函数、极限、一元函数微积分. 本书为上册的第一分册, 所讲内容到导数为止.

本书可供工科院校各专业使用.

高等学校试用教材

高 等 数 学

上 册

(第一分册)

西安交通大学高等数学教研室编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北 京 印 刷 三 厂 印 刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 10.375 字数 250,000

1979年3月第1版 1982年2月第3次印刷

印数 65,501—69,500

书号 13012·0320 定价 0.76 元

前　言

本书是在我室1964年和1975年编写出版的两本《高等数学》的基础上，总结了我室广大教师的教学经验改编而成的．共分上、下两册．上册包括一元函数微积分和无穷级数；下册包括向量代数与空间解析几何，多元函数微积分，场论，常微分方程，傅氏级数与傅氏积分．

考虑到科学技术对数学的要求日益广泛和深入，本着加强基础的精神，本书在内容的深广度方面较前两书有所增加．除将场论，含参变量积分，傅氏积分编入了本书之外，主要增加的内容有：柯西收敛原理，一致收敛，隐函数组的微分法，重积分的一般变换公式，一致连续，广义二重积分，线性微分方程组等．与此同时，对原有的某些内容作了适当精简．例如：在极限定义中削减了给出ε求δ的要求，微分学的几个中值定理的分析证明改排小字，罗彼塔法则只就$\frac{0}{0}$型给出证明，积分法仅着重于换元法、分部积分法以及积分表的使用，有理函数的积分法等环绕查积分表讲解．

本书在给出基本概念的定义和重要定理证明的同时，注意了运用唯物辩证法思想阐明微分、积分等基本概念的本质及其内在联系．在第二章中，通过“微积分基本分析方法”一节，概括地介绍了微积分学所研究的导数与积分两类问题以及解决问题的基本思想方法，使读者对微积分思想有一概括的了解，也为引入极限概念提供了实际背景．在第五章定积分与不定积分以及第十二章重积分及其应用中，通过“积分与微分的关系及其应用”一节，阐明“积

分是微分的无限积累",并运用这一思想讲解各类积分的应用.

为了加强内容之间的有机联系，本书把有些关系紧密的内容相对地加以集中，例如：第一型线、面积分概念与重积分概念同时提出；方向导数安排在偏导数之后；部分一阶微分方程与可降阶方程作为不定积分的应用，安排在积分应用一章中；各类广义积分与含参变量积分一起另列一章(除第五章中简单介绍两种以外).

为了便于领会重要定理的实质和证明方法，有利于由直观到抽象能力的培养. 在一些重要定理(如微分学的几个中值定理、微积分学基本定理等)的分析证明之前，先通过几何直观或物理模拟对定理加以说明.

鉴于计算技术在工程中的广泛应用，本书环绕主要内容添加了一些简单的计算方法，所附的一些简明框图是为了清晰地表达逻辑思维，同时也有助于读者进一步学习编制程序. 为了加强联系实际，本书注意了向量的运用，并在空间解析几何中引入了向量的导数；加强了导数作为变化率的论述和建立积分式的训练；增添了包络等内容和一些简单的机、电方面的例题. 此外，删去了1975年我室所编《高等数学》一书中某些涉及较多专业知识的实例.

本书编入了较多的小字部分，以便不同类型和要求的读者选用，某些小字内容也可作为课外自学参考. 为便于自学，本书叙述比较详细，配有较多习题，书后附有答案. 有关各章和全书之后尚有附录以备读者查阅.

本书承华中工学院数学教研室审查，参加审稿的有：陆传务(主审)，高克强，罗汝梅，林化夷. 审稿同志对本书提出了许多宝贵的修改意见. 在此，我们衷心地表示感谢.

本书由叶维平、马知恩主编，陆庆乐定稿，参加编写工作的有邵济煦、葛仁杰、向隆万. 参加本书编写部分工作的有周德晖、杨泽高、周长新. 此外，唐象礼、寿纪麟曾参加1975年一书的编写工

现在上海机械学院的赵孟养同志曾对1964年一书的编写做了量工作. 限于编者的水平，书中缺点、错误在所难免，恳切地希广大读者批评指正。

编　　者

1979年1月

目 录

第一章　变量与函数

数学的对象是现实世界的空间形式与数量关系．而现实世界是处于永恒的变化之中的．当我们从量的侧面来描述事物的变化以及它们之间的内在联系时，就形成了变量与函数的概念．这是微积分的主要研究对象．高等数学与初等数学最大的区别，就在于它是变量的数学．明确这一点对今后的学习十分重要．

§1　函数概念

1-1　变量与常量

当我们在观察、研究某些物质运动或生产技术过程时，常会遇到两种不同的量．一种量在过程的进行中不断变化，可取不同的数值，这种量叫做变量；另一种量在过程的进行中相对保持不变，只取一个固定的数值，这种量叫做常量．例如，在用锅炉烧水的过程中，燃料不断消耗，水也不断变为蒸汽，如不添水，水位将越来越低，而锅炉的容积却相对保持不变．所以，在这一过程中，燃料重量和水位高度都是变量，锅炉容积是常量．又如，重物自由下落，在达到地面前，它的速度越落越快，随着下落时间的逐渐增长，下落距离也越来越大．所以，在重物下落的过程中，速度、时间、距离都是变量，而加速度和重物本身受到的力(重力)却可以看作不变，即为常量．我们还注意到，在这些物质运动或生产技术过程中，往往是那些变动着的量有着更重要的意义．因为正是通过它们，人们才能掌握事物变化的规律．

在一个具体的变化过程中，变量的变化总是有一定范围的，换

句话说，它只能在一个确定的范围内取值. 例如，锅炉中的水位在最低高度 h 与最大高度 H 之间取值; 3 米高处的重物下落过程中，每个时刻下落距离在 0 与 3 之间取值. 我们把变量取值的范围叫做该变量的**变域**. 最常见的变域就是介于两个已知实数之间的一切实数. 若记这两个实数为 a 与 b，在数轴上它就表示由 a 至 b 的线段. 如果以 x 记变量，我们把这个线段，或对应于这线段上所有点的一切实数叫做变量 x 的**区间**. a 与 b 称为区间的端点. 在 $a<b$ 时，称 a 为左端点，b 为右端点.

区间是否包括端点要看所研究的问题而定. 根据包括或不包括端点在内的区别，区间可以分为:

(1) 满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的一切实数 x，包括两个端点在内，称为**闭区间**，记作 $[a, b]$;

(2) 满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x，不包括两个端点，称为**开区间**，记作 (a, b);

(3) 满足 $a \leqslant x<b$ 或 $a<x \leqslant b$ 的一切实数 x，称为**半开区间**，记作 $[a, b)$ 或 $(a, b]$ (图 1.1).

除了这些有限区间外，还可以有各种无限区间:

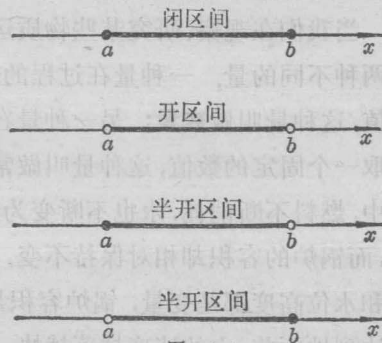

图 1.1

(4) 满足 $-\infty<x<c$ 的一切实数 x，记作 $(-\infty, c)$; 满足 $-\infty<x \leqslant c$ 的一切实数 x，记作 $(-\infty, c]$;

(5) 满足 $c<x<+\infty$ 或 $c \leqslant x<+\infty$ 的一切实数 x，记作 $(c, +\infty)$ 或 $[c, +\infty)$;

(6) 满足 $-\infty<x<+\infty$ 的一切实数 x，记作 $(-\infty, +\infty)$.

这样，对于每一个变量说来，总有它一定的变域，这是与该变

量不可分割的．为简便起见，今后在不需要区别以上所说的各种情况时，我们就把某一区间简记作 I．

最后，我们还须指出，一个量是变量还是常量不是绝对的，应根据问题的不同要求，具体地进行分析．例如，在前面讲的锅炉烧水过程中，由于受热膨胀，锅炉的容积实际上也在变化，但变化很小，就把它看成常量．又如，气温变化会引起机器的轴热胀冷缩，可是，当气温变化引起的轴长变化较微小时，通常把轴长看作常量；而在较精密的机器上，即使轴的长度变化较微小，也会影响机器的精度，这时就应将轴长看成变量．一般说来，如果一个变量在所讨论的过程中变化很小，而且对于实际需要来说可以看作不变，就把这个变量看作常量．

练　习　1-1

1．在把圆钢锻打成圆盘的过程中，圆钢的体积 V、直径 D、长度 l 这三个量，哪是常量？哪是变量？

2．什么叫做变量的变域？什么样的变域叫做区间？变域是否一定是区间？举例说明．

3．已知重物自由下落时所经路程 s 与时间 t 的关系为：$s=\frac{1}{2}gt^2$．(1)如果重物从开始到地面需要 2 秒，那末 t 与 s 的取值范围应如何表示？(2)如果重物是在距地面 4.9 米高处下落的，那末 t 与 s 的变域又是什么？（g 为重力加速度，其值取为 9.8 米/秒^2．）

4．将下列各个变量的变域用括号表示，并在数轴上分别画出这些变域：

(1) $-3\leqslant x\leqslant 1$　　　(2) $-3<x\leqslant 1$

(3) $|x|\leqslant 2$　　　(4) $|x|>2$

5．用绝对值不等式表示下列区间：

(1) $[1, 3]$　　　(2) $(-2, 4)$

(3) $(-1, 1)$　　　(4) $(-\delta, \delta)$，但不包括 0．

1-2　函数概念

在一个变化过程中，所涉及的各个量总是互相依赖、互相联系

的. 数学中的函数关系，就是变量之间的一种最基本、最重要的依赖关系. 例如，在真空中自由下落的重物，下落的距离 s 随时间 t 不断发生变化，并且与时间 t 有着如下的关系：

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

其中 g 是重力加速度. 在这个式子中，s 与 t 是变量，t 的变域是从开始时刻 $t=0$ 到运动结束时刻 $t=t_1$ 的一个区间$[0, t_1]$. 对应于 t 的变域中的任一个值 t_0，就可以通过上述关系式计算出相应的重物下落距离 s_0：

$$s_0=\frac{1}{2}gt_0^2$$

又如，气象站用自动记录仪记下一昼夜气温的变化，如图 1.2 所示. 它清楚地表明气温 T 对时间 t 的依赖关系. 这里 t 的变域是区间$[0, 24]$，在这个区间内，当 t 取某值 t_0时，过此点作平行于纵轴的直线交曲线于P点，量出 P 点的纵坐标 T_0，就得到对应于时刻 t_0 的气温 T_0.

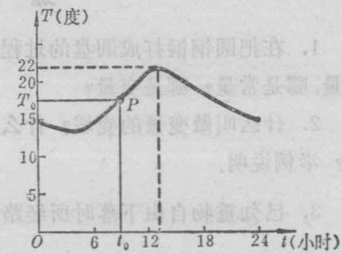

图 1.2

再如，随着科学技术的发展，用数字显示的仪表越来越多. 这些仪表往往是每隔一定时间，将要测量的物理量用数据显示出来，并自动记录成表格. 下面是某发电机启动后 1 小时内的转速记录：

t (分)	1	2	3	4	…	60
n (转/分)	2011	2891	2998	3001	…	3002

这张表格反映着转速 n 对时间 t 的依赖关系，当 t 在其变域($t=1, 2, \cdots, 60$)内取一确定值时，转速 n 可唯一确定，从 n 的数值可以

判断运行是否稳定.

类似的例子在自然现象中举不胜举. 可见我们不仅要研究事物的数量变化,更重要的是要研究各个变量之间的相互依赖关系,这样才能反映事物的内部规律. 而函数概念, 正是这种变量间依赖关系的高度概括.

函数定义 在某一变化过程中,设有两个变量 x 和 y. 如果对于 x 在其变域内取得的每一个值, y 按照确定的法则有一个确定的值和它对应,则称 y 是 x 的函数,记作

$$y=f(x)$$

其中 x 叫做**自变量**, y 叫做**因变量**;自变量 x 的这个变域叫做函数的**定义域**,当变域是一个区间时叫做**定义区间**;因变量 y 所对应的数值范围叫做函数的**值域**. y 与 x 之间的这种依赖关系就叫做函**数关系**.

函数的这个定义包含着三个内容:一是函数的定义域;二是因变量依赖于自变量的变化规律(确定的对应法则);三是对应于自变量在定义域内所取的每一数值, 因变量所对应的值, 叫做**函数值**. 下面分别加以说明.

函数的定义域 定义域就是允许自变量取值的范围. 在实际问题中,函数的定义域是根据函数的实际意义来确定的. 例如,从自由落体运动的规律 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 来看, 并不是对任意的 t, 都可以确定 s 的值,只有在重物开始下落到运动结束这段时间里,上述式子才有意义,也就是说 s 作为 t 的函数,只有当 t 在区间 $[0, t_1]$上取值时才有意义. 可见,定义域是函数定义中的一个重要因素. 当我们提出一个函数时, 一般应该指明它的定义域. 但若函数本身已能清楚表明它的定义域时,也往往省略不写. 例如,我们讨论的函数仅仅写出它的数学式子,而不考虑它的实际意义,那末这个函

数的定义域就是指使数学式子有意义的自变量的取值范围.

例1 求函数 $y=\dfrac{2}{\sqrt{x^2-3x-10}}$ 的定义域.

解 要使函数有意义, x 应满足

$$x^2-3x-10=(x-5)(x+2)>0$$

解此不等式,得 $x>5$ 和 $x<-2$, 这就是函数的定义域, 也就是开区间 $(-\infty,-2)$ 和 $(5,+\infty)$.

例2 求函数 $y=\sqrt{x}+\lg(1-x^2)$ 的定义区间.

解 要使 $\sqrt{x}$ 有意义,必须 $x\geqslant0$,要使 $\lg(1-x^2)$ 有意义,必须 $|x|<1$. 所以,使函数有意义的公共区间为 $0\leqslant x<1$, 即函数的定义区间是 $[0,1)$.

对应法则 对应法则是因变量 y 与自变量 x 依赖关系(函数关系)的具体表现. 它的表达方式可以是各种各样的,常见的有三种: 一种是用数学式子来表示的,叫做**公式表示法**,如 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$, $y=\sqrt{x}$ 等,这种数学式子一般称为解析表达式;一种是用图形来表示的,叫做**图象表示法**,如自动记录的气温曲线; 再一种是用表格来表示的,叫做**列表表示法**,如三角函数表、对数表,以及上面列举的电机转速表格等.无论它们表示方法如何不同,其共同本质都是刻划因变量与自变量的依赖关系, 所以对应法则是函数概念中最本质的因素.变量 y 与变量 x 能构成函数关系,必须而且只须有某一确定法则,当 x 每取一值时, y 总有一个确定的值与之对应. 至于这个对应法则具体的表达方式是怎样的, 函数定义中对此并无要求.在定义中,我们是用记号 $f(\ )$ 来一般地表示这种对应法则的. 这样就便于把自然现象中量与量之间错综复杂的函数关系概括成为 $y=f(x)$,从而进行一般地研究. 当然, $y=f(x)$ 这个记号也可以用来表示 x 的具体函数. 例如用它表示函数 $y=\dfrac{1}{2}gx^2$, 则

$f(x)=\frac{1}{2}gx^2$; 用它表示函数 $y=\sin x$, 则 $f(x)=\sin x$. 但是如果我们要同时讨论几个不同的函数，就得用不同的字母，如$g(\ )$，$\varphi(\ )$，$F(\ )$等等来分别表示它们不同的对应法则. 举例来说，圆的面积A及圆周长c都是半径r的函数，这里$r\geqslant 0$，但它们是不同的函数，即有着不同的对应法则，因此可以分别记作:

$$A=f(r)=\pi r^2,\quad c=g(r)=2\pi r$$

例 3 在电子技术中常遇到的三角波函数，其表达式为

$$u=u(t)=\begin{cases}t, & 0\leqslant t\leqslant 1\\ 2-t, & 1<t\leqslant 2\end{cases}$$

图形如图 1.3 所示.

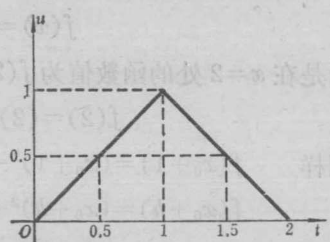

图 1.3

这个函数的对应法则在两个不同的区间内，是由两个不同的式子分段表示出来的，这样的函数叫做**分段函数**. 要注意，这是一个函数，切不可误认为是两个函数. 其定义区间是$[0,2]$，当t取0.5与1.5时，按各自所在区间的对应法则的具体表达式，u取得的对应值分别是$u(0.5)=0.5$与$u(1.5)=2-1.5=0.5$.

有的函数还可以用一句话来表示. 例如，在计算技术中经常使用的“取整函数”就是这样一种重要函数.

例 4 “取整函数”规定为：y是不超过x的最大整数. 显然，对于x的任意一个值，都唯一地确定了y的一个对应值. 所以y是x的函数. 记作

$$y=[x]$$

例如，$[8.23]=8$，$[-1.5]=-2$，$[5]=5$，$[\pi]=3$等等. 取整函数