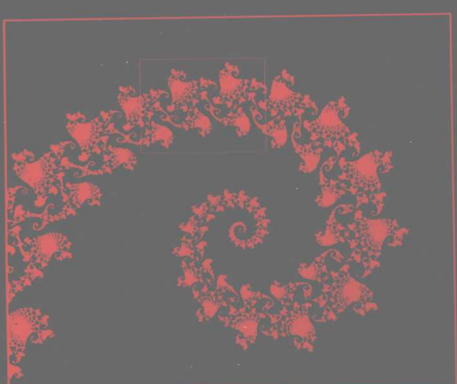
Chaos and Fractals
New Frontiers of Science
(Second Edition)

混沌与分形
——科学的新疆界
（第2版）

海因茨·奥托·佩特根
[德] 哈特穆特·于尔根斯 著
迪特马尔·绍柏

田逢春 主译



国防工业出版社
National Defense Industry Press

本书获 国防工业出版社装备科技翻译图书基金
教育部高等学校博士学科点专项科研基金 资助

混沌与分形

——科学的新疆界(第2版)

Chaos and Fractals

New Frontiers of Science

(Second Edition)

海因茨·奥托·佩特根
[德] 哈特穆特·于尔根斯 著
迪特马尔·绍柏

田逢春 主译

国防工业出版社
·北京·

著作权合同登记　图字：军—2007—067号

图书在版编目(CIP)数据

混沌与分形：科学的新疆界：第2版/[德]佩特根，[德]于尔根斯，[德]绍柏著；田逢春主译. —北京：国防工业出版社，2008.8

ISBN 978-7-118-05797-3

Ⅰ.混... Ⅱ.①佩...②于...③绍...④田... Ⅲ.①混沌学②分形学 Ⅳ.0415.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第087668号

※

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路23号　邮政编码100044)
北京奥鑫印刷厂印刷
新华书店经售

*

开本787×1092　1/16　印张37¾　字数871千字
2008年8月第1版第1次印刷　印数1—2500册　定价78.00元

国防书店：(010)68428422　　发行邮购：(010)68414474
发行传真：(010)68411535　　发行业务：(010)68472764

译者的话

混沌是研究自然界非线性系统内部随机性所具有规律的科学，而分形理论是与混沌紧密联系的一门新兴学科，它研究非线性系统内部的确定性与随机性之间的关系，它们是自然界中普遍存在的现象。对它们的研究和应用已经涉及到几乎自然科学和社会科学的所有领域，成为现代学科研究的前沿领域。分形与混沌在图像数据压缩编码、国防保密通信、生物信息学、自动控制等方面具有重要的应用前景，属于世界上领先的高新技术基础理论。

研究分形与混沌无论是其本身的基础理论或是其应用，都令许多科技工作者望而生畏，其主要原因目前国内外出版的这方面的论著除了专业背景外，还需要较深的数学功底，特别是数学专业方面的理论基础如实变函数论、泛函分析等。本书重在从物理意义上或用图示的方法通过形象的、简单易懂的描述方式，丰富的范例，帮助读者去理解数学上深奥的东西，不需要太多的数学及专业知识背景，而又不失其理论的严谨，即使非数学专业的读者，也能较好地阅读理解该书的内容。

本书的特点是由浅入深，概念清晰，是一本关于分形和混沌方面的可以从入门到精通的好书。本书大多数章节相对独立，读者可以选择需要或感兴趣的章节阅读，而一般不会影响内容的理解。本书内容丰富，有大量的细节，但又容易理解。书中复杂的证明也是用小字印刷的，如果读者不想了解复杂的论证，可以跳过。

作者是德国不来梅大学数学与计算机科学系的 CeVis(复杂系统及可视化中心)成员，是目前活跃在非线性数学、分形与混沌、复杂动力系统及其应用等方面的国际著名专家，书中的内容结合了该领域的最新研究成果，具有较高的学术价值和水平。

本书由田逢春负责翻译和定稿，电子科技大学的李建平教授、重庆大学数理学院李建国、苗婷和加拿大 GUELPH 大学的杨先一教授负责审校。在翻译过程中得到了解放军重庆通信学院基础部教师、重庆大学研究生薛峰，重庆大学研究生刘晓、张鑫、欧静兰和龙红梅的帮助。其中欧静兰协助完成了本书第 1、3 章初稿；张鑫完成了第 2、5 章和第 7.1～7.3 节初稿；刘晓完成了第 4、6 章初稿；薛峰完成了第 10、11 章和第 7.4～7.6 节初稿；龙红梅完成了本书的参考文献(未收入)和大量繁琐的排版工作，此外，博士生王世元、谭洪涛以及硕士生王嘉也为本书的出版作出了一定的贡献。为了节省篇幅，书后省去了参考文献，好在正文相关注释大都提到了这些文献。另外，也省去了索引，感兴趣的读者可以与译者联系索取。

借此机会首先要感谢原书作者 Heinz－Otto Peitgen 教授对译者的鼓励和支持，他对该书的出版倾注了极大的热情并在百忙中专门抽出时间为本书的中文版作序。

感谢原书作者 Hartmut Jürgens 博士，他多次与我进行了有益探讨，使我加深了对原书的理解，在他的帮助下纠正了原书中的部分印刷错误。

感谢国防工业出版社的杨星豪编辑和有关工作人员，在他们的帮助下，才使本书得以顺利出版。

感谢德国 Springer - Verlag GmbH 的大力支持并为我们提供了本书原著的电子版。

最后要感谢国家留学基金委，没有国家资助我出国学习，就没有机会接触这样一部优秀的著作。

由于本人能力有限，本书可能还存在一些错误，恳请读者批评指正，电话：023 - 65111745；E - mail：FengchunTian@cqu. edu. cn。

田逢春
重庆大学
中国 重庆 400044
2008 年 2 月

中文版前言

作为《混沌与分形》一书的作者，我们对该书的中文版充满着极大的热情和感激。自从1992年该书第一次面世以来，它取得了巨大而持久的成功。

在写作该书时，我们强烈地期望以一种简便的方式与广大读者分享我们在分形几何与混沌理论中的热情。我们想写一本通俗的科技著作，同时又期望能在没有冲淡主题和作出实质性的改变下提供该领域的一幅真实画面。这可不是一件易事，有时要花数周的时间才能找到一种我们认为满意的解释方法。我们是否成功最终要由读者来评判。目前的成功以及中译本的出版使我们非常高兴，这令我们感到非常荣幸，因为我们的思想和工作能够以这种方式在具有卓越科学传统的这样一个伟大国家受到欢迎。

在分形几何与混沌理论领域的探索和研究充实了我们的科学生活。在该书1992年完成后不久对医学中血管或更一般的管状结构的研究就是一例，在此基础上，不来梅大学诞生了一个新的研究中心：MeVis研究所——医学图像计算中心(www. mevis. de)。基于对血管系统分形特性的理解，我们开发了一个软件系统，它帮助外科医生处理复杂的肝肿瘤手术。例如，我们可以鉴别和定量分析某个特定外科手术过程对病人器官造成损伤或导致失败的风险，从而给出使风险最小的措施。我们可以自豪地说，就在本书的中文版即将付印的同时，我们也将与中国一流的外科研究所建立新的、非常有前途的合作伙伴关系。

要翻译这样一本著作是一个巨大的挑战，我们并不会阅读和讲中文，但仍深信田逢春教授在翻译本书中所完成的卓越工作，对此我们非常感谢。我们迫切期待着该书的出版，并希望中国读者能发现它是一本有益的、内容丰富和值得欣赏的书。

Heinz - Otto Peitgen
2008年3月于(德)不来梅

原著前言

从我们编写《混沌与分形》一书至今，已有12个年头了。编写这本书的思想是希望不需要太多的数学基础就能读懂它，并且能够真正描述这一激动人心的新领域，当时我们希望能够有读者对其感兴趣，现在我们知道这一愿望已经实现了。从众多的评论和来信中我们知道本书在很多方面得到应用：研究人员利用它来训练自己，教师们在高校的课程中采用它，学生们通过它掌握相关背景，还有那些非专业人士，通过本书了解了什么是分形与混沌。

大凡技术方面的书籍在其第1版时多半存在一些印刷错误或其它错误，读者们已经发现并告诉了我们一些。这其中特别要感谢 Hermann Flaschka 的建议和改进。

本书第2版做了以下几个改动：我们取消了第1版中的两个附录。Yuval Fishers 的贡献在第1版中作为附录出现，这也许是第一个对分形图像压缩的完整描述。同时，Yuval 的专著《分形图像压缩：理论和应用》也问世并成为参考书。我们还删去了每章中的最后一节，那是用计算机 BASIC 语言对该章中的基本部分的编程实现。取而代之的是，建议读者访问我们的网站：http://www.cevis.uni-bremen.de/fractals/，上面提供了10个交互式的 JAVA 程序。

我们还要将我们诚挚的感谢献给纽约 Springer-Verlag 的工作人员，他们使本书的出版成为我们快乐的经历。

Heinz-Otto Peitgen，Hartmut Jürgens，Dietmar Saupe

2003年8月于(德)不来梅和康斯坦茨

原著第1版前言

在过去的10年中，物理学家、生物学家、天文学家和经济学家们发明了一种理解自然界复杂性的方法。这门新学科，也称作混沌，提供了一种观察那些以前被认为是随机的、无规则的、不可预见的（简言之，就是混沌的）而实际是有序的模式。

——James Gleick[①]

本书是为所有希望详细了解混沌理论和分形几何而不具备太多的专业数学知识的读者编写的。本书不是通常意义的教材，也不是科普读物，我们期望它开拓读者在分形、混沌和动力学方面的广阔视野。此外，我们也希望展示出分形与混沌的关系、与数学的其它方面以及自然现象的联系。本书的第三个目的是展示出分形与混沌在视觉、图像方面的美丽结构和形状。

差不多在近十年，数学和自然科学一直处于创新和膨胀的风口浪尖上，成为一个头号交叉学科。有相当一段时间，这一风浪也在冲刷着远远超出科学本身的海岸。数学通常被认为枯燥无味，从来都没有像现在这样迅速被大众接受并如此激动人心。分形和混沌的确已吸引了全世界人们的注意力、热情和兴趣，对一个普通的观察者来说，分形和混沌构成的颜色、美丽和几何形状征服了他们的视觉，这是他们在数学中从未经历过的。对学生来说，分形和混沌将数学从古代历史的王国引入到21世纪。而对于科学家来说，则提供了对自然界复杂性的探索和建模的很好平台。

不过，产生这一魔力的原因何在呢？首先，这一新兴的研究创造了如此有影响而奇特的图形，以至于用这些图形集合举办的展览成了哥特研究所举办的系列展览中在世界上最成功的展览之一[②]。更重要的是，混沌理论和分形几何修正了已过时的关于世界的概念。

自然科学和技术的辉煌成就助长了许多人的一个幻想，即：整个世界像一个钟表机构那样运行着，其规则正等着被逐步破译。人们认为，一旦这些规则被破译，则事物的进展至少能从原理上被更精确地预测。计算机技术的惊人进展及其强大的信令功能令人信服，许多人对它的期望与日俱增。

然而今天，正是那些活跃在现代科学核心领域的人们声称这一期望是不一定正确的，对将来的发展更精确地预见的能力是达不到的。从这一公认的新兴理论中可以得出的一个结论是：较严格的确定性与看似偶然性之间并不是互斥的，而更多的是在自然界中共存。混沌理论和分形几何就是解决这一问题的。当我们观察某个时间段的过程生长时，采用混沌理论中的术语；当关注的是分形过程之后得到的结构时，则采用分形几何的术语。分形几何中的结构给

① J. Gleick，《混沌——产生一门新的科学》Viking，New York，1987。

② 在庄严的伦敦科学博物馆单独展出，由 H. Jürgens，H. O-. Peitgen，P. H. Richter 和 D. Saupe 举办的“混沌的王国：复杂动力系统的图像”吸引的参观者超过140000人。自1985年以来，该展览遍及5大洲30个国家的100多个城市。

出了混沌中的有序性。

在某种意义上，分形几何首先是一种用于描述、分析和为自然界中发现的复杂形式建模的新“语言”。“传统语言”——著名的欧几里德几何的元素是看得见的基本的线、圆和球，而“新语言”的基本元素则难于直接观察，它们是一些只有在计算机帮助下才可以转化为形状和结构的算法。此外，这些算法元素的数量是无穷尽的，它们为我们提供了强有力的描述工具。一旦这一“新语言”被掌握，我们就可以像建筑师利用传统几何描述房屋一样很容易地精确描述云朵的形式。

混沌与几何的相关性决不是偶然巧合，而恰恰是它们之间密切关系的一个见证，这在 Mandelbrot 集中得到了最好的体现。Mandelbrot 集是 Benoit Mandelbrot 在 1980 年的一个数学发现，某些科学家甚至将它描绘成数学中能看到的最复杂、也许是最美丽的东西，然而，它最迷人的地方才刚刚被发现，即：它可以被解释成无穷多种算法的图解百科全书，它是一个组织得非常高效的图像库。同时，它也是混沌中关于有序的一个极好例子。

联系分形和混沌的另一个事实是许多当代领先的发现只在使用计算机时才成为可能。从对数学传统的理解来看，这是一个挑战，一些人认为这是一种强有力的革新或解放，而另一些人则认为是一种退步。不管这一关于“正宗”数学的争论结果如何，有一点是很清楚的，即科学史上又增添了一个不可或缺的篇章。仅仅是对其美丽图片或确定性定律的挑战是肤浅的，本质上，混沌理论和分形几何对我们在自然界等方面有关平衡以及和谐与有序的理解提出了质疑，它们首次提供了一种全新和综合的模型，可以处理自然界真正复杂的问题。这种新的方法和术语极有可能使我们更充分地理解诸如生态和气候方面的情况，更加有效地处理棘手的全球性问题。

我们致力于采用不那么令人望而生畏的方式来揭示分形、混沌与动力系统的基本元素。书中的每一章都相对独立，可以单独阅读。每一章都围绕一个进行着的“故事”，用 Times 字体向页边排版并印刷。书中不时穿插一些技术细节并用 Helvetica 字体向页内排版印刷（译注：中文版用小五号字体排版印刷），为那些希望进一步深入的人和准备用数学符号研究的人们提供了更深入的分析和讨论内容。在每章末尾附有一个题目是“本章程序”的 BASIC 小程序，用于强调本章中主要的实验（译注：新版本已经取消了）。

1991 和 1992 年，Springer - Verlag 和全国数学教师协会出版了两卷本的《课堂教学分形》，它们的对象是涉及数学专业的教或学的读者，本书是它们的一个近亲，但读者面更广，它结合了前面提及的那些书中的大部分内容并对其有所扩展，还增加了两个重要的附录。

附录一①是由 Yuval Fisher 写的关于利用分形几何的基本思想实现图像数据压缩。这一应用已经讨论了 5 年，通过 Michael F. Barnsley 所带领的小组的努力和公布的结果，可望在技术上有新的突破。由于 Barnsley 对他的工作绝对保密，我们仍然无法知道究竟能得到什么结果。不过，Fisher 的贡献使我们可以作出相当程度的猜测。任何对利用分形实现图像压缩感兴趣的人将会非常重视这一附录。

附录二②是由 Carl J. G. Evertsz 和 Benoit B. Mandelbrot 写的关于多分形测度的内容，这是目前分形几何中最热门的话题之一。通常我们将分形想成具有某种自相似性的东西，多分形测度将这一概念扩展到量的分布上（例如，地表下某处发现的地下水量），并且当它被应用

①、②第 2 版已去掉了这两个附录。

于科学测量时克服了分形维数的不足。

即使有这两个附录，本书仍然不够全面，好在还有一些已付印的书填补了这些空白。这里列举出一些书的清单：关于在野外的人像及主观内容的产生、科学背景及其相互关系，有 James Gleick 的《混沌——产生一门新的科学》①和 Ian Stewart 的《上帝玩骰子吗？》②。那些对数学上系统的解释感兴趣或希望更深入研究的人，可以考虑下列书目：由 Robert L. Devaney 编写的《混沌动力系统导论》③及《混沌、分形与动力学》④；Michael F. Barnsley 的《分形无处不在》⑤。关于分形维数的详述可以在两本优秀教材，即 Gerald A. Edgar 的《测度、拓扑与分形几何》⑥和 Kenneth Falconer 的《分形几何》⑦中找到。对分形在物理方面的应用感兴趣的读者会发现 Jens Feder 的《分形》⑧很重要，而对分形在化学中的应用感兴趣的读者切不可错过 David Avnir 的《多相化学中的分形方法》⑨。最后，比较重要的还有 Benoit B. Mandelbrot 的经典著作《自然界中的分形几何》⑩。

我们要感谢那些在本书写作期间提供帮助的人们，我们的学生 Torsten Cordes 和 Lutz Voigt 不厌其烦地、高质量地画出了书中大部分插图，另外两个学生，Ehler Lange 和 Wayne Tvedt 也参加了他们的部分准备工作。Douglas Sperry 在本书的写作过程中仔细阅读了书稿，除了帮助我们去掉英语中的德语痕迹之外，还在复印编辑方面作了大量的工作。Ernst Gucker 负责德语版的工作，也提出了许多改进措施。Friedrich von haeseler，Guentcho Skordev，Heinrich Niederhausen 及 Ulrich Krause 审阅了部分章节并提出了非常有价值的建议。我们还要感谢 Eugen Allgower，Alexander N. Charkovsky，Mitchell J. Feigenbaum，Przemyslaw Prusinkiewicz 和 Richard Voss 为我们审阅了部分原始手稿并提出了宝贵的意见。Gisela Gründl 帮助我们选择和组织他人的原图，Claus Hösselbarth 非常出色地设计了本书的封面，Evan M. Maletsky，Terence H. Perciante 和 Lee E. Yunker 阅读了初期的部分书稿并在本书的设计上提出了关键的忠告。最后，我们万分感谢 Yuval Fischer，Carl J. G. Evertsz 和 Benoit B. Mandelbrot 为我们提供了本书的附录，还有 Mitchell Feigenbaum 出色的前言。

整本书采用 TEX 和 LATEX 排版系统，所有的插图（除了半色调和彩色图像外）都集成在计算机文件中，虽然花了无数个小时，有时甚至是通过痛苦的试验去建立必须的宏，应该说这种方法还是大大地有助于提高写作、编辑和印刷的效率。

最后要说的是，与纽约 Springer - Verlag 的合作令我们非常愉快。

Heinz - Otto Peitgen，Hartmut Jürgens，Dietmar Saupe

1992 年 5 月于（德）不来梅

---

① Viking，1987

② Penguin Books，1989

③ Addison Wesley，1989，第 2 版

④ Addison Wesley，1990

⑤ Academic Press，1989

⑥ Spinger - Verlag，1990

⑦ John Wiley and Sons，1990

⑧ Plenum，1988

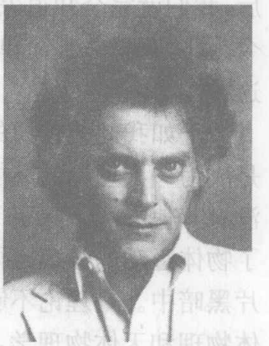
⑨ Wiley，1989

⑩ W. H. Freeman，1982

目录

序

Mitchell J. Feigenbaum①



对混沌的研究是对更大的一类所谓的“强”非线性系统的研究的一部分。在物理学领域,这种系统的一个典型例子是湍流运动中的流体。如果混沌不正好是对流体湍流的研究的话,则动荡、杂乱无章运动的现象仍然作为一个强有力的标志提醒物理学家最终去理解这类问题。对于所有好的标志来说,人们希望了解的模糊印象很清楚,但很多这种探索则不易精确描述。在无知的状态下,最深刻的问题还不成熟。当然,尽管在技术需求上,肯定有些问题人们拼命想知道答案,上面的说法仍然成立。

流体的湍流确实向我们展现了极其不规则且只能部分预测的现象。历史上,从拉普拉斯开始,当面对无数的、大量的部分之间的相互作用这类问题时,物理学家转而采用统计学的方法。如果没有其他原因,人们这样做是为了减少必须进行的测量、说明、计算之类的细节。因此,说人口的43%投票赞成某某某,比提供上百万选民中每个人的行为特征更容易。正因为如此,在一个很容易测出的体积中,指出有多少个气体分子要比列出每个分子在哪里、有多快容易得多。这一思想即使不是最希望的,也几乎是合理的。然而,如果想建立一套理论以便可以进行预测,那么就像所有其他统计学问题一样,必须确定一个所谓的分布函数。这意味着在无数多的选举中,从理论上预测有多频繁,等等。预计这一选民响应的平均值会发生。对于投票问题和气体密度问题,只有一个数需要确定,对于流体湍流问题,即使是从这种统计上考虑也必须问更多的问题:例如,我们看到每种大小的漩涡在如此这般的速度下有多频繁?

流体定律

对于选民问题,我并没有去严肃地考虑怎样从理论上确定所需的分布,也不知道怎样才算一个好的频率去度量选票的成功。毕竟每天都变化很快、很大,这种情况存在的可能性很小。然而,由于物理学家很久以前就确切地知道流体定律……也就是这样一个规则,它使你在知道整个流体当前的状态后,能够推导出今后的每一部分流体会怎样。所以可能有办法来实现前面的想法。事实上,物理学的一个分支……统计力学的主要思想就是基于认为人们预先知道怎样来做。这一思想认为,每种可能的详细结构基本上都是等可能地出现的。实际上“混沌”这个术语首次进入物理学是在19世纪麦克斯韦说的“分子混沌的状态”,它稍稍有点这个意思。统计力学……特别是它的量子力学形式,发挥了非常出色的作用,为我们提供了一些最奇妙的知识。然而,非常遗憾的是,在流体湍流领域,它却在整个19世纪完全是失败的。问题出

① Mitchell J. Feigenbaum,丰田教授,纽约Rockefeller大学。

在从已知流体的微观运动定律推导出这种分布规则应该是怎样的，因为简单地猜测“每件事情都是尽可能随机的”并不正确。而这种猜测不正确时，就没像今天这样的办法去解决。而且，就我们今天的知识水平来说，如果我们被迫去评估这种情况的话，我们会猜测，需要一种极其复杂的分布去解释该现象：如果它实质上是分形，则是最反常的一种分形。最糟糕的是，我们真的不具备相应的数学能力在一般情况下说出它是哪一类对象。注意，我们并不是在寻求一个完美的、快速的匹配：如果我们在寻求理解大自然的分析描述上是严肃的，则我们还需要多得多的知识。当混沌这一主题以及所谓的强非线性物理学这一大类中的一部分被透切地理解后，我们就完全知道怎样回到这类问题，并且很容易直观地想像出答案看起来会是怎样的。迄今为止，对于非常简单的问题，我们可以令人信服地这样做，我们也只是在最近几十年才具有这种能力。

正如我此前曾说的，我不是一定要关心湍流，它只是代表一类问题的标志。我受到的训练是成为一个理论的高能物理学者，我深深地感到苦恼的是，除了连续增进，所谓的摄动法之外，没有其他方法。除了 Ken Wilson 在重正化组方面的辉煌成就之外，这一情况没有改变。知道了物体运动的微观定律……这被称为动力系统，但对于其较大的情况，我们仍然处于几乎是一片黑暗中。是理论不够好还是我们不能确定他们包含什么？现在还不能说。从高能物理到流体物理和天体物理学，我们所继承的仅从数学上思考的方式是失败的。在某种程度上，在理解目前所谓的混沌中所处理的问题或许正是针对这些方法问题。

非线性

我们现在回到非线性的讨论。首先考虑线性问题。线性意味着决定一个系统下一步动作的规则不受当前的行为影响。更准确地说，这是在微分或者增量的意义上说的：例如一个线性弹簧，其张力的增加正比于它的拉伸增量，这些增量的系数完全独立于它已经被拉伸了的量。这种弹簧可以被拉伸到任意长且不会突然折断，因而真实的弹簧都不是线性的。

线性对象的数学思想特别贴切。在线性情况下，线性对象具有相同的、简单的几何特点。这种几何上的简单使人们脑海中浮现的图像能够抓住事物的本质，（输出）随着其各部分数量的增加（基本上是细节部分）而增加，直到无穷（尽管常常是这样），可以很容易地得到精确的答案。

对非线性问题的历史偏见是认为通常不存在如此简单和通用的几何。直到最近，一般的科学理解是某个非线性方程表征的是某个特定的问题，如果特定的问题足够有趣或者需要解决，则也许可以为此创建一个特别的方法。但大家都明白，也许这种努力在其他场合是徒劳无益的。

摄动法

事实上有一种方法为人们所理解和广为人知，这就是摄动法。如果通过一些失真的透镜来观察一个线性问题，定性地说，会出现同样的结果：如果该问题每隔 5s 重复一次，则通过透镜看时，它仍然会这样。不过，现在对于等量的伸长，它不再表现出等量的张力增量。通过失真的透镜测量张力毕竟是不变的，而空间测量则要变。也就是说，失真透镜这种器件将线性问题转化成了非线性问题。摄动法基本上只对那些线性问题被失真后变成的非线性问题有效。因而这个唯一众所周知的方法对那些不仅仅是线性问题的失真是徒劳的。

混沌的几何

在失真的线性问题中不存在混沌。混沌和其他在线性问题中一般不出现的现象就是我们所说的强非线性问题。正是由于无法归类到任何简单的几何失真所允许的结构,使得这些问题极端困难和令人费解。究竟怎样恰当地描述一种棘手的新几何?这个问题有点像应该怎样描述地球表面的几何一样,不是通过我们抽象的感知能力来描绘它淹没在大量的三维背景中的图像,而是从本质上禁止利用这种想象。对这个问题的解决,正如许多人一定知道的那样,是以爱因斯坦的广义相对论、万有引力理论为中心,首先是由高斯然后由黎曼推广到任意维。描述湍流的分布函数的几何特征是什么?这些描述各种混沌运动、观察这些根本不同的非线性问题的统一方式的固有几何学是类似的吗?我问这个问题是因为我知道在某些宽松的环境中答案是肯定的。这个观点被接受时,强非线性问题就不再以独立的形式出现,而是相当协调且适于根据其各自的抽象实体进行理论化的了。这种从细节特征提升到非常普遍的一类问题是过去一二十年研究混沌的胜利之一。

比这种共有的、定性的几何特征一般性更强的一个概念是普适性,它意味着这种共有的几何特征不仅是定性的相似,也是一种真正定量的相等。总之,如果你愿意,具有惊人频率的强非线性问题能够有共同定量的、相同的几何特征将是我在余下部分要讨论的,它构成了转换到混沌时所谓的普适性。

普适性

从定性的角度来看,可以发现普适性并不是那么令人吃惊。有两个论据支持这个观点。第一个仅仅与非线性有关。正如线性对象(例如在其张力和伸展之间)有一个常系数的比例关系一样,类似地,在非线性情况下,有效的系数取决于其张力。因此,考虑两个完全不同的非线性系统,不难想象,通过适当的调节,这两个系统的每一部分的有效系数可以设置成相同的,使得它们的行为(至少在初期)能够相同。也就是说,通过设定某些数值常数(可以说是性质,它指定了环境,数学上称为"参数")和这两个系统的实际行为特征,有可能使它们作相同的事情。对一个线性问题,从表面上看这是正确的:对于具有相同数量的部件及相互连接的系统,若具有调节所有参数的自由度,则可以使一个系统调节成与另一个系统完全相同。只不过部件越多,所需的调节也越多。对于一个非线性系统,在寻求相同行为特性方面,对少数参数的调节可以被系统的各部分的瞬时位置所补偿。但在两个系统之间并非所有的运动都能被复制。

因此,第一个论点部分是非线性带来了某种程度的灵活性,使对象能够调节到期望的行为。不过,如果为了达到某种普遍的行为特征而需要太多的特殊和细微的调节,则这种思想至多只有学术价值。

莱布尼兹的单子论

然而,还有第二个更有力的论点,莱布尼兹在"单子论"中的解释,它可以使第一个论点更有说服力。让我们思考一下,我们打算确定的运动,由于连续施加越来越多的定性限制,普遍超过了已经出现的非线性系统。日益庞大的许多强加的这些运动应该可以被证明通常是服从此种系统(这部分的讨论很难推理,既不明显又不合理),然后我们最终将发现,如果你愿意,这些完全不同的系统都有相同的无限多定性的、前后一致的约束,现在,跟随莱布尼兹,我们会