



飞行动力学

FEIXING DONGLI XUE

[俄]Г. С. 比施根斯 主编

安刚 金兴 唐瑞琳 张珊珊 刘丹 刘小敏 译

高亚奎 林皓 校



国防工业出版社
National Defense Industry Press

第一部分 飞机的航迹

第 1 章 飞机运动方程

1.1 基本假设

飞机运动分析可分为飞行轨迹分析和飞行姿态分析(包括操稳特性)。分析飞行轨迹运动特性时,可以将飞机视为质点(即所有质量都集中在质心上),假设所有外力都作用于该质点上,这些力的合力矩为零。分析飞行姿态运动特性(包括操纵性和稳定性)时,假设飞机为具有确定尺寸和惯性力矩的刚体,包括产生力和力矩的主要系统和部件(如自动控制系统、液压助力器、操纵传动机构等)。

为了分析飞机的轨迹运动和姿态运动,可以将飞机的运动方程分解为两个相对独立的运动方程。

分析轨迹运动特性的假设条件如下:

- (1) 不考虑地球转动和曲率;
- (2) 飞机为变质量的质点(考虑燃料消耗或部件分离);
- (3) 大气环境为已知平稳大气。

分析姿态运动特性(包括操纵性和稳定性)的假设条件如下:

- (1) 飞机为刚体,质量不变;
- (2) 不考虑飞机气动弹性变形和内部质量变化;
- (3) 气动力和力矩由飞机状态确定,包括飞机运动参数、角速度和操纵面位置等;
- (4) 不考虑地球转动和曲率;
- (5) 大气环境为已知平稳大气。

1.2 飞机变质量轨迹运动的矢量方程

根据牛顿定律,飞机线运动动力学方程矢量形式为

$$m \frac{dV}{dt} = P + R_A + G \quad (1.1)$$

式中: P 为推力矢量; R_A 为气动力矢量; G 为重力矢量。对于安装涡轮喷气发动机的飞机, P 为涡轮喷气发动机的推力,而对于安装涡轮螺旋桨发动机或活塞发动机的飞机,则 P 为螺旋桨拉力。

式(1.1)描述了质量为 m 的质点运动。质点的轨迹运动状态可用运动学微分方程表示为

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V} \quad (1.2)$$

式中: \mathbf{r} 为质点相对于某空间固定点的矢量距离。

如果建立一个坐标系,就可以将该矢量向坐标轴系投影用以建立代数方程,代替矢量微分方程(1.1)和(1.2)。

通常假设飞机为质量可变的刚体,研究飞机的轨迹运动:涡轮喷气发动机的转子是大质量对称物体,具有很大的转动角速率,当飞机绕质心旋转时会产生陀螺力矩。

为了完善将飞机视为刚体得出的运动方程,需要考虑由涡轮喷气发动机转子转动引起的绕质心的角运动方程^[2]。

由理论力学公式可得

$$\begin{cases} m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{P} + \mathbf{R}_A + \mathbf{G} \\ \frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}_R \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V} \end{cases} \quad (1.3)$$

式中: \mathbf{K} 为动量矩矢量,由飞机和涡轮喷气发动机两部分组成, $\mathbf{K} = \boldsymbol{\omega}(J) + \mathbf{K}_p$; $\boldsymbol{\omega}$ 为飞机绕质心的转动角速度矢量; (J) 为刚体飞机的惯性矩矩阵; \mathbf{K}_p 为涡轮喷气发动机转子的动量矩矢量; \mathbf{M}_R 为外力矩矢量, $\mathbf{M}_R = \mathbf{M} + \mathbf{M}_p$; \mathbf{M} 为气动力矩矢量; \mathbf{M}_p 为动力矩矢量,主要是推力的偏心力矩(推力矢量不经过质心)。

分析飞机角运动时,为了降低难度,通常假设惯性矩矩阵 (J) 为常量。

选择一个坐标系后,可以用九个标量公式代替式(1.3)描述速度矢量 \mathbf{V} 、动量矩矢量 \mathbf{K} 和矢量距离 \mathbf{r} ,这样用常用计算方法就能求解这个运动方程组。

1.3 用于飞行动力学研究的坐标系

飞机运动一般是复杂的空间运动,为了便于描述其运动特性,需要定义相应的坐标轴系。

根据坐标与惯性系的相对关系,可以将坐标系分为:

与惯性系固连的空间坐标系,称为惯性坐标系;

与运动系固连的空间坐标系,称为运动坐标系。

所有坐标系都可以根据坐标原点是否与飞机固连,分为两种类型。研究飞行动力学的所有坐标系(无论原点是否与飞机固连)均遵循右手定则。建立统一的坐标系,对解决实际飞行动力学问题非常有利。在符合右手定则的坐标系中,沿

OY 轴正方向看去, X 轴可逆时针以最小转角转到 Z 轴, 如图 1.1 所示, 其他与此相似。

1. 经常使用的坐标系

飞行器飞行动力学研究中, 采用的坐标系均来自于“苏联国家标准局的 Гост 20058 - 80”, 经常使用的坐标系定义如下:

(1) 固连于地球的坐标系 $O_0X_gY_gZ_g$ (地面系)。其坐标原点固连于地球表面, O_0Y_g 轴平行于当地重力方向, 指向上, O_0X_g 指向正北, O_0Z_g 指向正东。地面系 $O_0X_gY_gZ_g$ 用于计算飞机飞行轨迹的相对北向距离、相对东向距离和相对高度。

(2) 固连于飞机的地理坐标系 $OX_gY_gZ_g$ 。其坐标原点固连于飞机质心, 在空间上随飞机运动, OY_g 垂直于当地水平面, 指向上, 通常定义 OX_g 指向正北, OZ_g 指向正东。在该坐标系 $OX_gY_gZ_g$ 内, 计算重力 G 十分方便。

(3) 固连于飞机的机体坐标系 $OXYZ$ (体轴系)。原点位于飞机质心, OX 轴位于飞机对称面内或平行于对称面的平面内 (如果质心不在对称平面内), 指向机头, OY 轴位于对称平面内垂直于 OX 轴, 指向机背, OZ 轴符合右手定则。通常情况下, OXY 平面为飞机对称面, 在机体坐标系中, 描述发动机推力最方便。

(4) 速度坐标系 $OX_aY_aZ_a$ (速度轴系)。原点位于飞机质心, OX_a 轴沿速度矢量 V 方向, OY_a 轴位于对称平面内或平行于对称面的平面内 (如果质心不在对称平面内), 垂直于 OX_a 轴, 向上为正, OZ_a 轴符合右手定则。在速度轴系内, 描述气动力十分方便 (沿 OX_a 轴可确定气动阻力 X_a , 方向与速度 V 方向相反; 沿 OY_a 轴可确定升力 Y_a ; 沿 OZ_a 轴可确定气动侧力 Z_a)。

(5) 航迹坐标系 $OX_kY_kZ_k$ 。原点位于飞机质心, OX_k 轴指向飞机地速矢量 V_k 方向, OY_k 轴位于包含 OX_k 轴的垂直平面内, 垂直于 OX_k 轴, 背向重力方向, OZ_k 轴符合右手定则。无风时, 航迹坐标系 OX_k 轴与速度坐标系 OX_a 轴重合, 风速 W 、地速 V_k 和速度 V 满足关系 $V_k = V + W$ 。在航迹坐标系中, 建立飞机质心的运动方程相对简单, 因此, 分析飞机轨迹运动通常采用航迹坐标系。

(6) 半机体坐标系 $OX_eY_eZ_e$ 。原点位于飞机质心, OX_e 轴与速度 V 在体轴系 OXY 平面上的投影重合, OY_e 轴与 OY_a 轴重合, OZ_e 轴与 OZ 轴重合。半机体坐标系广泛应用于风洞试验。无侧滑时, 半机体坐标系转化为速度坐标系。

除了以上坐标系外, 飞行动力学计算中还可能采用其他坐标系。

2. 坐标系之间的关系

地面系与体轴系之间的相互关系用欧拉角表示: 偏航角、俯仰角和滚转角, 如图 1.2 所示。

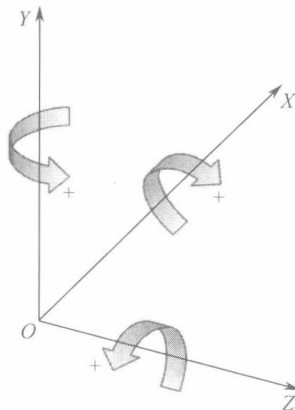


图 1.1 右手坐标系

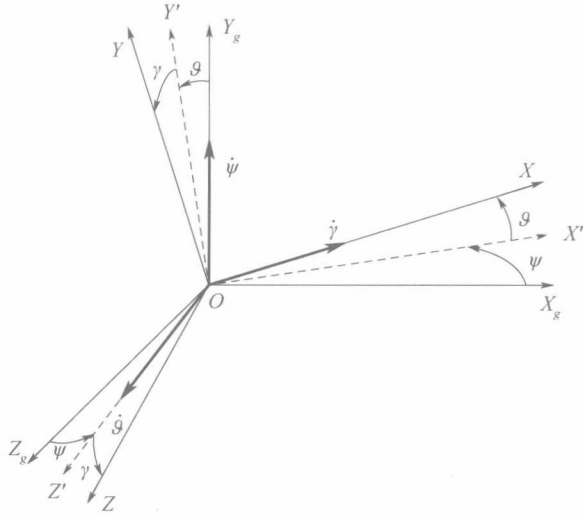


图 1.2 地理系与体轴系之间的关系

偏航角 ψ ——体轴系 OX 轴在地理系 OX_gZ_g 中的投影与 OX_g 轴的夹角。在 OX_gZ_g 平面上,沿 OY_g 正方向看去, OX 轴逆时针旋转时,偏航角增加。

俯仰角 ϑ ——体轴系 OX 轴与地轴系 OX_gZ_g 平面的夹角。当 OX 轴正方向位于 OX_gZ_g 平面之上时,俯仰角为正。

滚转角 γ ——当滚转角为零时,滚转角是 OZ 轴与 OX_gZ_g 之间的夹角。沿 OX 轴正方向看去,顺时针旋转为正。

地理系与速度轴系之间的相互关系为速度偏航角、速度俯仰角和速度滚转角,如图 1.3 所示。

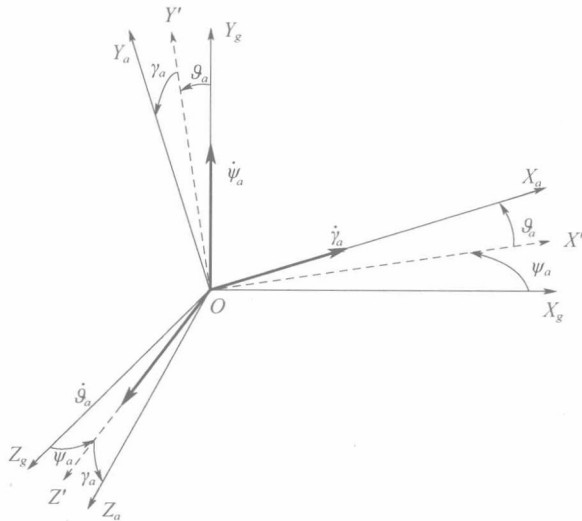


图 1.3 地理系与速度轴系之间的关系

速度偏航角 ψ_a ——速度轴系 OX_a 轴在地理系 OX_gZ_g 平面中的投影与 OX_g 轴之间的夹角。在 OX_gZ_g 平面上,沿 OY_g 正方向看去, OX_a 轴逆时针旋转时,偏航角增加。

速度俯仰角 ϑ_a ——速度轴系 OX_a 轴与 OX_gZ_g 平面的夹角。当 OX_a 轴正方向位于 OX_gZ_g 平面之上时,俯仰角为正。

速度滚转角 γ_a ——当速度滚转角为零时,速度滚转角是 OZ_a 轴与 OX_gZ_g 平面之间的夹角。

地理系与航迹坐标系之间的关系可用两个欧拉角表示:航迹偏角和航迹倾角,如图 1.4 所示。

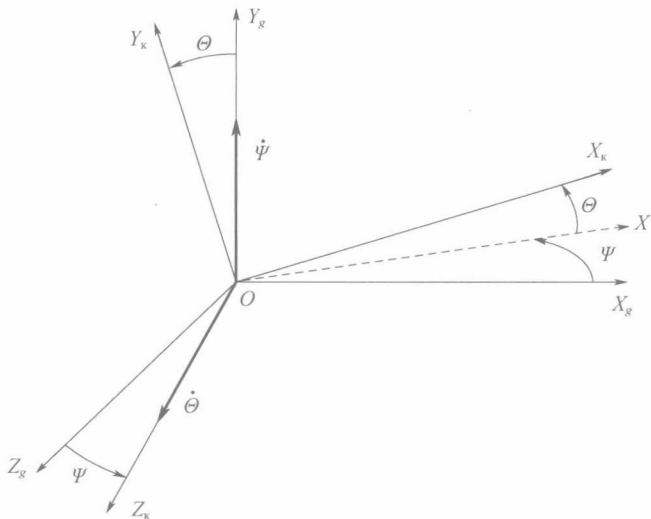


图 1.4 地理系与航迹坐标系之间的关系

航迹偏角 Ψ ——航迹速度矢量 V_n 与地理系 OX_g 轴之间的夹角。地速 V_k 在 OX_gZ_g 平面上的投影为航迹速度矢量 V_n 。从 OY_g 轴底部看去, OX_g 轴沿逆时针方向转到航迹速度 V_n 上时,航迹偏角为正。

航迹倾角 Θ ——地速 V_k 与 OX_gZ_g 平面之间的夹角。当地速 V_k 的投影在 OY_g 轴正方向时,航迹倾角为正。飞机在无风的平静大气中飞行时,速度轴系 OX_a 轴与航迹坐标系 OX_k 轴重合。因此,速度俯仰角和速度偏航角与航迹滚转角和航迹偏角重合,即 $\vartheta_a = \Theta, \psi_a = \Psi$ 。

体轴系与速度轴系之间可用两个欧拉角表示:侧滑角和攻角,如图 1.5 所示。

侧滑角 β ——速度矢量 V 与飞机对称面 OXY 之间的夹角。如果速度矢量 V 的投影在 OZ 轴正方向,则侧滑角为正。

攻角 α ——速度矢量 V 在 OXY 平面上的投影与 OX 轴之间的夹角。速度矢量的投影在 OY 轴负方向,则攻角为正。

无风时,航迹坐标系和速度轴系之间的关系只有一个速度滚转角 γ_a ,如图 1.6 所示。

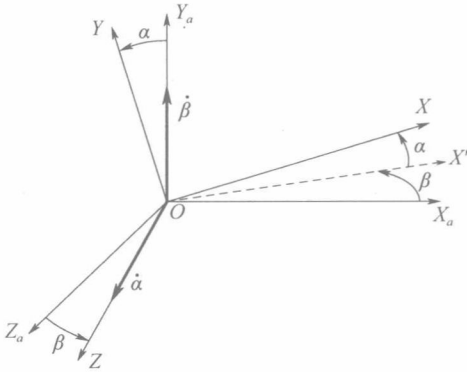


图 1.5 体轴系与速度轴系之间的关系

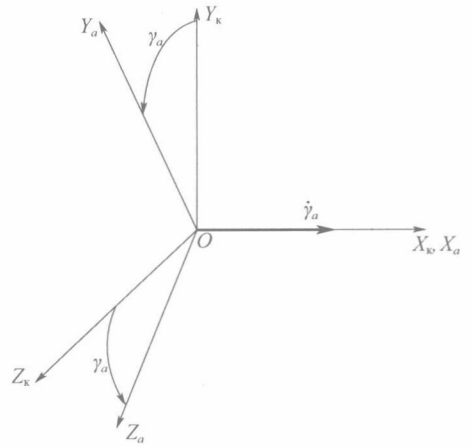


图 1.6 航迹坐标系与速度轴系之间的关系

半机体坐标系 $OX_eY_eZ_e$ 和体轴系 $OXYZ$ 旋转攻角 α 如图 1.7 所示;半机体坐标系和速度坐标系 $OX_aY_aZ_a$ 旋转侧滑角 β 如图 1.8 所示。

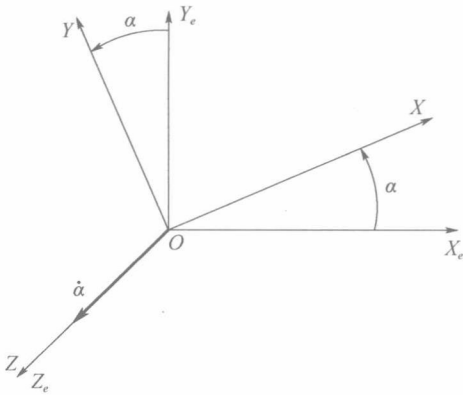


图 1.7 体轴系相对于半机体坐标系旋转攻角 α

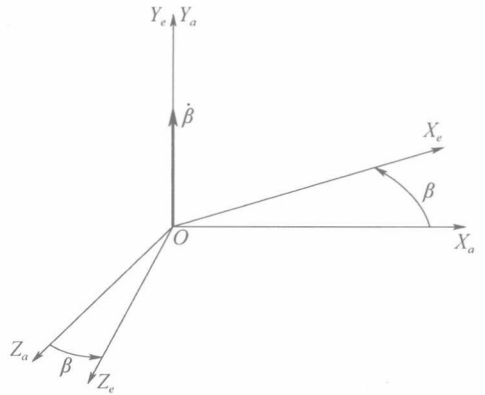


图 1.8 半机体坐标系相对于速度坐标系旋转侧滑角 β

3. 矢量投影在各坐标系中的转换形式

飞机运动方程的建立同各矢量(力、线速度、角速度等)在指定坐标系中的投影相关。但力与速度矢量都可在多个坐标系中确定自己的投影。因此,矢量在预先选定坐标系中的投影同样也可通过坐标转换而转化成在其他坐标系中的投影。

为了方便解决问题,建立单位矢量坐标系 i, j, k , 方向同各坐标轴系。 r 为坐标系 $OXYZ$ 中质点 M 的位置矢量。矢量 r 可根据 i, j, k 分解为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1.4)$$

式中： x, y, z 为实数，是点 M 的坐标，如图 1.9 所示。

考虑到矢量的表达形式，也可用如下方式表示，即

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

OX, OY, OZ 为矢量 \mathbf{r} 在坐标系 $OXYZ$ 中各轴的投影。

单位矢量有如下关系^[3]：

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= 1; \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0; \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0; \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} &= 1; \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0; \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \end{aligned}$$

其中： $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 为矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的数积。

可由单位矢量得到： $x = \mathbf{i} \cdot \mathbf{r}, y = \mathbf{j} \cdot \mathbf{r}, z = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ 。

考虑两个普通坐标系： $OX_1Y_1Z_1$ 和 $OX_2Y_2Z_2$ 。坐标点 M 的位置矢量 \mathbf{r} 可以在两个坐标系中分别表示为

$$\begin{cases} \mathbf{r} = x_1\mathbf{i}_1 + y_1\mathbf{j}_1 + z_1\mathbf{k}_1 \\ \mathbf{r} = x_2\mathbf{i}_2 + y_2\mathbf{j}_2 + z_2\mathbf{k}_2 \end{cases} \quad (1.5)$$

下角标代表相应的坐标系。

式(1.5)乘以单位坐标 $\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2$ ，得到

$$\begin{cases} x_2 = x_1(\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1) + y_1(\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{j}_1) + z_1(\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \\ y_2 = x_1(\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{i}_1) + y_1(\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{j}_1) + z_1(\mathbf{j}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \\ z_2 = x_1(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{i}_1) + y_1(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{j}_1) + z_1(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1) \end{cases} \quad (1.6)$$

采用另一种形式表示式(1.6)，可得

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \cos\varphi_{11} + y_1 \cos\varphi_{12} + z_1 \cos\varphi_{13} \\ y_2 = x_1 \cos\varphi_{21} + y_1 \cos\varphi_{22} + z_1 \cos\varphi_{23} \\ z_2 = x_1 \cos\varphi_{31} + y_1 \cos\varphi_{32} + z_1 \cos\varphi_{33} \end{cases} \quad (1.7)$$

式中： φ_{mn} ($m, n = 1, 2, 3$) 表示 $m - M$ 和 $n - M$ 单位矢量数量积的夹角。下标 1 为 $\mathbf{i}; 2$ 为 $\mathbf{j}; 3$ 为 \mathbf{k} 。

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{11} & \cos\varphi_{12} & \cos\varphi_{13} \\ \cos\varphi_{21} & \cos\varphi_{22} & \cos\varphi_{23} \\ \cos\varphi_{31} & \cos\varphi_{32} & \cos\varphi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

若已知矢量 \mathbf{r} 在坐标系 $OX_2Y_2Z_2$ 中的投影，便可根据如下矩阵得到坐标系

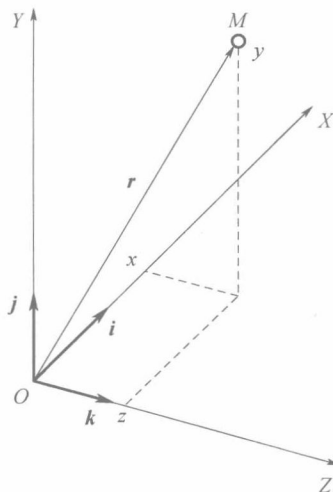


图 1.9 点 M 的位置和坐标系中的单位矢量

$OX_1Y_1Z_1$ 中的投影。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{11} & \cos\varphi_{12} & \cos\varphi_{13} \\ \cos\varphi_{21} & \cos\varphi_{22} & \cos\varphi_{23} \\ \cos\varphi_{31} & \cos\varphi_{32} & \cos\varphi_{33} \end{bmatrix}$$

矩阵 \mathbf{A} 被称作方向余弦矩阵。要计算矩阵中的元素,必须首先计算两个坐标系单位矢量之间的夹角,然后计算这些角度的余弦值。任何方向余弦矩阵都具有如下特性:

(1) $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ ——正交化;

(2) $\det(\mathbf{A}) = 1$ 。

说明: \mathbf{A}^{-1} 为 \mathbf{A} 的逆矩阵; $\det(\mathbf{A})$ 为矩阵 \mathbf{A} 的行列式。

第一个特性是方向余弦矩阵的主要特性,第二个特性是第一个特性的补充。

考虑三个坐标系 $OX_1Y_1Z_1$ 、 $OX_2Y_2Z_2$ 和 $OX_3Y_3Z_3$ 之间的转换。可先将坐标系 $OX_1Y_1Z_1$ 转换到 $OX_2Y_2Z_2$,然后再转换到 $OX_3Y_3Z_3$ 。具体通过点 M 的矢量位置 \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 、 \mathbf{r}_3 在各坐标系间的表达式来给出。根据式(1.8)可得各矢量转换关系:

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{A}_1^2 \mathbf{r}_1; \mathbf{r}_3 = \mathbf{A}_2^3 \mathbf{r}_2$$

式中: \mathbf{A}_1^2 、 \mathbf{A}_2^3 为相应坐标系间的方向余弦矩阵。

由上式可得

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{A}_1^3 \mathbf{r}_1$$

式中: $\mathbf{A}_1^3 = \mathbf{A}_2^3 \mathbf{A}_1^2$ 。

将坐标系从角标 1 转换到角标 3,便得到了矢量 \mathbf{r}_1 的方向余弦矩阵 \mathbf{A}_1^3 ,而 \mathbf{A}_1^3 是通过两个方向余弦矩阵 \mathbf{A}_1^2 和 \mathbf{A}_2^3 计算得到的。从一个坐标系变换到另一个坐标系要乘以方向余弦矩阵,如 \mathbf{A}_1^3 要经过两次转换,因此先乘的放在右侧,后乘的放在左侧。

考虑到两个坐标系 $OX_1Y_1Z_1$ 和 $OX_2Y_2Z_2$,其中 $OX_1Y_1Z_1$ 是不动坐标系,而 $OX_2Y_2Z_2$ 是运动坐标系。那么从不动坐标系 $OX_1Y_1Z_1$ 转换到运动坐标系 $OX_2Y_2Z_2$ 的方向余弦矩阵要有三次转换。

下面计算从地理系 $OX_gY_gZ_g$ 到体轴系 $OXYZ$ 之间的转换关系。这里体轴系相对于地理系来说是运动坐标系。计算体轴系 $OXYZ$ 相对于地理系 $OX_gY_gZ_g$ 的旋转角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在体轴系 $OXYZ$ 中的投影。

地理系与体轴系之间的相对位置由不相关的三个欧拉角确定:偏航角、俯仰角和滚转角。通常这些角度的范围分别是 $0 \leq \psi \leq 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, $-\pi \leq \gamma \leq \pi$ 。体轴系 $OXYZ$ 分别绕三个坐标轴旋转,从初始位置旋转欧拉角 ψ 、 ϑ 、 γ ,可获得角速度的表达式为 $\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} + \dot{\vartheta} + \dot{\gamma}$ 。

从相应坐标轴的负方向看去,所有的旋转均为逆时针(正向旋转),如图 1.10 ~ 图 1.12 所示,中间过渡坐标轴用虚线表示,而开始和结尾的坐标轴用实线表示。

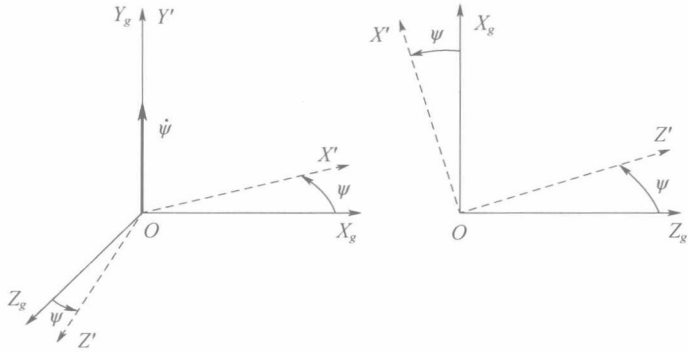


图 1.10 第一次绕 OY_g 轴转动偏航角 ψ

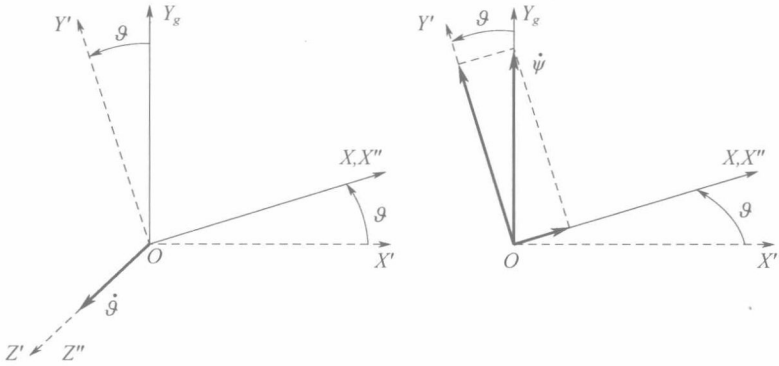


图 1.11 第二次绕 OZ_g 轴转动俯仰角 ϑ

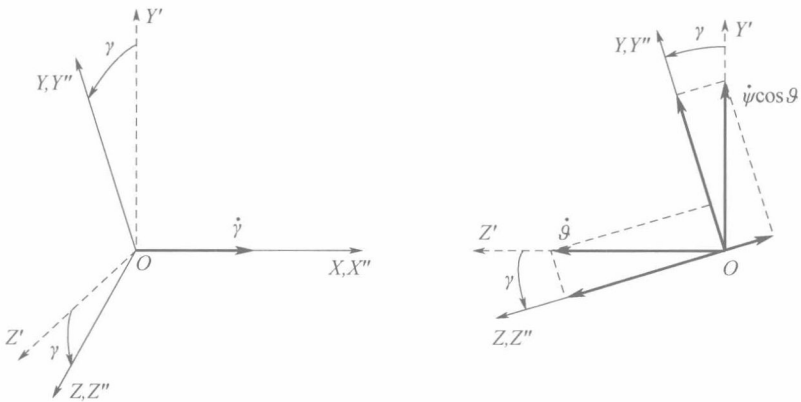


图 1.12 第三次绕 $OX = OX''$ 轴转动滚转角 γ

第一次旋转是绕 OY_g 轴转动偏航角 ψ , 如图 1.10 所示。可得到坐标系 $OX'Y'Z'$, 其中 $OY_g = OY'$ 。

坐标系 $OX_g Y_g Z_g$ 和 $OX'Y'Z'$ 之间的角度关系为

| 坐标轴 | OX_g | OY_g | OZ_g |
|-------|------------------------|-----------------|------------------------|
| OX' | ψ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2} + \psi$ |
| OY' | $\frac{\pi}{2}$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |
| OZ' | $\frac{\pi}{2} - \psi$ | $\frac{\pi}{2}$ | ψ |

计算欧拉角的方向余弦矩阵,第一次旋转的方向余弦矩阵为

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix}$$

第一次旋转角速度矢量 $\omega_1 = \dot{\psi}$,形式为

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

第二次旋转是绕 OZ_g 轴转动俯仰角 ϑ ,如图 1.11 所示。可得到坐标系 $OX''Y''Z''$,其中 $OX'' = OX, OZ'' = OZ'$ 。

坐标系 $OX''Y''Z''$ 和 $OX'Y'Z'$ 之间的角度关系为

| 坐标轴 | OX' | OY' | OZ' |
|--------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------|
| OX'' | ϑ | $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| OY'' | $\frac{\pi}{2} + \vartheta$ | ϑ | $\frac{\pi}{2}$ |
| OZ'' | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}$ | 0 |

计算欧拉角的方向余弦矩阵,第二次旋转的方向余弦矩阵为

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

经过第二次旋转后,角速度矢量形式累计为 $\omega_2 = \dot{\psi} + \dot{\vartheta}$,另一种表达为

$$\omega_2 = A_2 \omega_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix}$$

此式的第一项包含了方向余弦矩阵 A_2 ,并且是表示角速度矢量 ω_1 在坐标系 $OX''Y''Z''$ 中的标准形式,如图 1.11 所示。

第三次旋转是绕 $OX = OX''$ 轴转动滚转角 γ ,如图 1.12 所示。可得到坐标系 $OXYZ$,其相对于地理系 $OX_gY_gZ_g$ 的转换关系是三个欧拉角:偏航角、俯仰角和滚转角。

坐标系 $OXYZ$ 和 $OX''Y''Z''$ 之间的角度关系为

| 坐标轴 | OX'' | OY'' | OZ'' |
|------|-----------------|--------------------------|--------------------------|
| OX | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| OY | $\frac{\pi}{2}$ | γ | $\frac{\pi}{2} - \gamma$ |
| OZ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2} + \gamma$ | γ |

计算欧拉角的方向余弦矩阵,第三次旋转的方向余弦矩阵为

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

从地理系 $OX_g Y_g Z_g$ 到体轴系 $OXYZ$ 的方向余弦矩阵需要经过三次旋转,表达式为

$$A_H^{CB} = A_3 A_2 A_1$$

展开此式,可得方向余弦矩阵的具体形式为

$$A_H^{CB} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta \cos\psi & \sin\vartheta & -\cos\vartheta \sin\psi \\ \sin\gamma \sin\psi - \cos\gamma \sin\vartheta \cos\psi & \cos\gamma \cos\vartheta & \sin\gamma \cos\psi + \cos\gamma \sin\vartheta \sin\psi \\ \cos\gamma \sin\psi + \sin\gamma \sin\vartheta \cos\psi & -\sin\gamma \cos\vartheta & \cos\gamma \cos\psi - \sin\gamma \sin\vartheta \sin\psi \end{bmatrix}$$

经过第三次旋转后,角速度矢量为第三次旋转矢量与前两次旋转矢量的和,即

$$\boldsymbol{\omega} = A_3 \boldsymbol{\omega}_2 + \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

将矢量 $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2$ 代入,可得

$$\boldsymbol{\omega} = A_3 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} + A_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

角速率 $\boldsymbol{\omega}$ 由 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 组成,经过转换可得到式(1.9),角速率 $\boldsymbol{\omega}$ 在体轴坐标系中各轴的投影代数方程式为

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\gamma} + \dot{\psi} \sin\vartheta \\ \omega_y = \dot{\vartheta} \sin\gamma + \dot{\psi} \cos\vartheta \cos\gamma \\ \omega_z = \dot{\vartheta} \cos\gamma - \dot{\psi} \cos\vartheta \sin\gamma \end{cases} \quad (1.10)$$

式(1.10)为欧拉角的运动学方程,将其转化成欧拉角 ψ, ϑ, γ 的微分方程为

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = \omega_y \sin\gamma + \omega_z \cos\gamma \\ \dot{\gamma} = \omega_x - (\omega_y \cos\gamma - \omega_z \sin\gamma) \tan\vartheta \\ \dot{\psi} = \frac{1}{\cos\vartheta} (\omega_y \cos\gamma - \omega_z \sin\gamma) \end{cases} \quad (1.11)$$

若要解式(1.11),需知道欧拉角的初始条件 $\psi(0)$ 、 $\vartheta(0)$ 、 $\gamma(0)$ 和随时间变化的角速率 ω_x 、 ω_y 、 ω_z 。

注:从地理系 $OX_g Y_g Z_g$ 到体轴系 $OXYZ$ 的方向余弦矩阵为 A_H^{cb} ,它由三次连续旋转得到。

角速率在剩余坐标系中的方向余弦矩阵也可通过连续旋转得到。

4. 各角度之间的几何关系

不考虑风的存在,地理系和体轴系的 $(\psi, \vartheta, \gamma)$ 、地理系和航迹坐标系 (Ψ, Θ) 、速度轴系和体轴系的 $(\alpha, \beta, \gamma_a)$,各角度之间存在几何关系。为了建立它们之间的关系,必须比较方向余弦矩阵中的元素并选择其中最简单的。

方向余弦矩阵存在下列关系式:

$$A_{ck}^{cb} = A_H^{cb} A_{ck}^H; A_H^{ck} = A_{cb}^{ck} A_H^{cb}$$

式中: A_{ck}^{cb} 为速度轴系转换到体轴系的方向余弦矩阵; A_H^{cb} 为地理系到体轴系的方向余弦矩阵; A_{ck}^H 为速度轴系到地理系的方向余弦矩阵。

考虑到无风时, $\psi = \Psi, \Theta = \vartheta_a$,可得

$$\begin{cases} \sin\beta = [\sin\gamma\sin\vartheta\cos(\Psi - \psi) - \cos\gamma\sin(\Psi - \psi)]\cos\Theta - \sin\gamma\cos\vartheta\sin\Theta \\ \sin\alpha\cos\beta = [\sin\gamma\sin(\Psi - \psi) + \cos\gamma\sin\vartheta\cos(\Psi - \psi)]\cos\Theta - \cos\gamma\cos\vartheta\sin\Theta \\ \sin\gamma_a\cos\Theta = \cos\alpha\sin\beta\sin\vartheta + (\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma)\cos\vartheta \end{cases} \quad (1.12)$$

飞机在无风条件下飞行时,考虑式(1.12)的结果,可以得到:

(1) 无滚转和侧滑,在垂直平面上飞行,此时, $\psi = \Psi$,满足条件 $\beta = 0, \gamma = 0$,式(1.12)的第二、第三式可简化为 $\alpha = \vartheta - \Theta; \gamma_a = 0$ 。

(2) 考虑带滚转和侧滑的垂直平面飞行,此时, $\beta \neq 0, \gamma \neq 0$ 。考虑式(1.12)和 $\vartheta \neq 0$ 的条件可得, $\sin\alpha \frac{\tan\gamma}{\tan\beta} = 1$ 。因此,攻角为常值条件下飞行时,若增加滚转角 γ ,则必须增加侧滑角 β 。

(3) 水平面飞行无滚转,即 $\gamma = 0, \Theta = 0$ 。此时式(1.12)的第一式可简化为 $\beta = \psi - \Psi$,考虑到已得到的结果,第二式可转化为攻角等于俯仰角,即 $\alpha = \vartheta$ 。

1.4 飞机质心运动方程在体轴系及航迹坐标系上的投影

飞机质心运动方程式(1.3)的解与选择投影到何种坐标系上息息相关。通常选择体轴系、航迹坐标系和速度轴系。为了简化运动方程形式,可以考虑其在无风的大气中飞行。

对于式(1.3)的第一式,运动质点相对于惯性系的微分方程可写成

$$m\left(\frac{\delta V}{\delta t} + \omega \times V\right) = P + R_A + G \quad (1.13)$$

式中： $\frac{\delta \mathbf{V}}{\delta t} = \mathbf{i} \frac{dV_x}{dt} + \mathbf{j} \frac{dV_y}{dt} + \mathbf{k} \frac{dV_z}{dt}$ 为速度矢量的相对导数， $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 为所选坐标系的单位矢量， V_x, V_y, V_z 为飞机质心速度矢量在所选坐标系中的投影； $\boldsymbol{\omega}$ 为与飞机固连的动坐标系相对于惯性坐标系的旋转角速度矢量； $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$ 为 $\boldsymbol{\omega}$ 和 \mathbf{V} 的矢量积。

考虑飞机质心运动方程在体轴系和航迹坐标系中的投影^[3,5,6]。

1. 飞机质心运动方程在体轴系 OXYZ 中的投影

体轴系相对于地理系转动的角速度为 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ 。质心速度矢量微分方程为

$$m \left(\frac{dV_x}{dt} + \omega_y V_z - \omega_z V_y \right) = P_x + X + G_x$$

$$m \left(\frac{dV_y}{dt} + \omega_z V_x - \omega_x V_z \right) = P_y + Y + G_y$$

$$m \left(\frac{dV_z}{dt} + \omega_x V_y - \omega_y V_x \right) = P_z + Z + G_z$$

式中： P_x, P_y, P_z 为推力在体轴系中的投影； X, Y, Z 为气动力在体轴系中的投影。

推力的投影 P_x, P_y, P_z 计算方法如下：

通常所有发动机关于机体对称，并且相对于体轴系有一个推力偏角 φ_p ，如图 1.13 所示。因此，可以计算推力 \mathbf{P} 在体轴系 OXYZ 上的投影为

$$P_x = P \cos \varphi_p; P_y = P \sin \varphi_p; P_z = 0$$

式中： P 为发动机推力和。

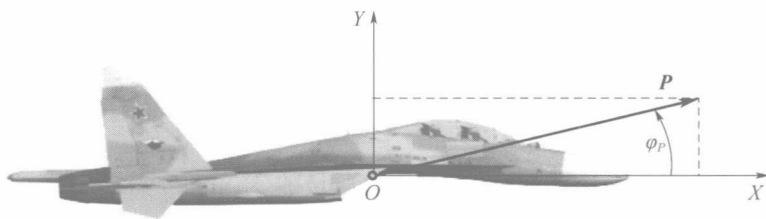


图 1.13 体轴坐标系中的发动机推力矢量

体轴系中气动力的投影 X, Y, Z 转换到速度轴系，表达形式为

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{\text{CK}}^{\text{CB}} \begin{bmatrix} -X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix}$$

质量在体轴系中的投影形式为

$$\begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{\text{H}}^{\text{CB}} \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix}$$

完成上述相应转换后,可得速度矢量投影在体轴系中的微分方程为

$$\begin{cases} m\left(\frac{dV_x}{dt} + \omega_y V_z - \omega_z V_y\right) = P \cos \varphi_p - X_a \cos \alpha \cos \beta + Y_a \sin \alpha - Z_a \cos \alpha \sin \beta - mg \sin \vartheta \\ m\left(\frac{dV_y}{dt} + \omega_z V_x - \omega_x V_z\right) = P \sin \varphi_p + X_a \sin \alpha \cos \beta + Y_a \cos \alpha + Z_a \sin \alpha \sin \beta - mg \cos \vartheta \cos \gamma \\ m\left(\frac{dV_z}{dt} + \omega_x V_y - \omega_y V_x\right) = -X_a \sin \beta + Z_a \cos \beta + mg \cos \vartheta \sin \gamma \end{cases} \quad (1.14)$$

根据速度在地面系中的投影,计算飞行距离 X_g 、高度 H 以及侧向距离 Z_g 的变化,即

$$\begin{bmatrix} \frac{dX_g}{dt} \\ \frac{dH}{dt} \\ \frac{dZ_g}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{cb}^H \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}$$

展开上式,对应项可写为

$$\begin{aligned} \frac{dX_g}{dt} &= V_x \cos \vartheta \cos \psi + V_y (\sin \gamma \sin \psi - \cos \gamma \sin \vartheta \cos \psi) + V_z (\cos \gamma \sin \psi + \sin \gamma \sin \vartheta \cos \psi) \\ \frac{dH}{dt} &= V_x \sin \vartheta + V_y \cos \vartheta \cos \gamma - V_z \cos \vartheta \sin \gamma \\ \frac{dZ_g}{dt} &= -V_x \cos \vartheta \sin \psi + V_y (\sin \gamma \cos \psi + \cos \gamma \sin \vartheta \sin \psi) + V_z (\cos \gamma \cos \psi - \sin \gamma \sin \vartheta \sin \psi) \end{aligned} \quad (1.15)$$

对于已得到的微分方程,必须考虑飞机质量的变化,即

$$\frac{dm}{dt} = -q_c \quad (1.16)$$

式中: q_c 为单位时间内的燃油消耗量。

角速度 ω_x 、 ω_y 、 ω_z 可根据式(1.10)进行计算。攻角 α 和侧滑角 β 由下式确定:

$$\begin{cases} \beta = \arcsin\left(\frac{V_z}{V}\right) \\ \alpha = \begin{cases} -\arcsin\left(\frac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}\right), V_x \geq 0 \\ \left[-\pi + \arcsin\left(\frac{|V_y|}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}\right)\right] \operatorname{sgn}(V_y), V_x < 0 \end{cases} \\ V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \end{cases} \quad (1.17)$$