高等数学（下）

季红蕾　主编
黄素珍　卞小霞　副主编

清华大学出版社

高等数学（下）

季红蕾　主编
黄素珍　卞小霞　副主编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书分上、下两册，共12章. 上册6章，主要内容有：函数、极限、导数与微分、微分中值定理及其导数的应用、不定积分、定积分及其应用；下册6章，主要内容有：常微分方程、无穷级数、空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分. 本书依据教育部新制定的非数学专业本科数学课程教学的基本要求，结合普通本科院校学生的数学基础和学习能力编写而成. 在编写中重视数学基础，突出思想方法，强化实际应用. 本书的特点是内容丰富，结构清晰，叙述明了，利于自学.

本书可作为应用型本科院校非数学专业本科生教材，特别适用于高等院校管理、金融、环境、纺织等相关专业以及同等学历、专升本的学生，也可作为相关专业的工程技术人员和经济管理人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下/季红蕾主编. --北京：清华大学出版社，2015
ISBN 978-7-302-42292-1

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①季…　Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第286967号

责任编辑：冯　昕　赵从棉
封面设计：张京京
责任校对：赵丽敏
责任印制：何　芊

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：三河市君旺印务有限公司
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　印　张：15.75　　字　　数：381千字
版　　次：2015年12月第1版　　印　　次：2015年12月第1次印刷
印　　数：1～2500
定　　价：32.00元

产品编号：066084-01

前言

PREFACE

面对高等教育大众化的现实，本科应用型人才的培养已成为高等教育关注的热点. 教材是人才培养的重要载体，需服务于人才培养目标. 本教材立足于普通高等院校应用型人才培养目标，以数学教育理论为指导，按照教育部有关数学内容和课程体系方面的要求，博采众家之长，在多年努力探索和实践的基础上，由从事高等数学教学与研究的一线教师精心编写而成.

微积分是高等数学的主要内容，它的诞生堪称人类智慧最伟大的成就之一. 它处理连续量的基本理论以及所拥有的科学思维方法，在自然科学和社会科学中都呈现出巨大的应用威力. 因此，本教材在保持微积分理论体系完整性和科学性的基础上，极力发挥微积分培养理性思维的作用，展示微积分在解决实际问题中的魅力，满足人的成长与发展的需要. 为此，本教材力求：

(1) 追求直观自然. 教材中，在阐述概念、性质、定理的过程中，追本溯源，从具体问题、引例或故事出发，自然地引入数学基本概念. 在解决问题的过程中，结合图形或数据，逐步演示寻找答案路径，并对全过程进行分析或严格证明，从而让抽象变得直观，推理变得自然.

(2) 融入数学思想. 微积分蕴涵丰富的数学思想，如果抛弃其思想精髓，而将其作为概念、定理、公式、习题等内容的堆砌，这样的教材将成为一堆僵死的教条，难以激发学生的学习热情. 因此，本教材着力于揭示基本概念的本质和渗透在知识体系中的数学思想. 例如，无论是在一元函数还是多元函数微积分中，教材始终贯穿微积分的基本思想，即利用"局部线性化"和极限思想处理非均匀变化问题；在积分学中，突出利用微元法解决问题的辩证思维过程：化整为微——局部以直代曲（以均匀代不均匀）——积微为整；在无穷级数中，强调函数展开成级数中"简单表示复杂"、"有限认识无限"的数学思想等. 运用这些数学思想分析问题、解决问题，有利于良好认知结构的形成，有利于思维品质的提升.

(3) 渗透数学文化. 结合教材内容，适当穿插介绍相关知识背景和数学史实，让学生从微积分创立、发展到完善的艰难曲折过程中，从数学家努力探索到获得成就的过程中接受数学文化的感染，这不仅体现了数学的人文精神，更多的是在潜移默化中培养学生的综合素质. 另外，每章附设的"扩展阅读"以及相关知识点中的"想一想"，延伸和拓展学生的视野，引导学生主动思考与积极探索.

(4) 展示应用价值. 数学来源于生活，数学的应用理应回归生活. 本教材中几乎每章都列举了一些具有应用背景的实例，这些例子除了涉及经典的几何、物理方面的应用外，还涉及现代经济和生活方面的应用，让学生在广泛运用数学思想方法解决实际问题的过程中，体

会数学的实用价值，增强数学的应用意识.

在内容的编排上，本书基本保持了经典教材的框架结构，并根据相关专业的需要对有关章节进行了调整.将定积分与定积分的应用合并在一章中讲述；根据管理类专业的要求，在第7章中增加了差分方程；为了与电子信息类各专业的专业课程教学相衔接，将常微分方程与无穷级数分别调至第7章与第8章；为了适用现代信息技术的要求，在附录中增设数学软件在高等数学中的应用.

本书由季红蕾编写第1章至第4章、第6章和第11章，刘桂兰编写第5章，黄素珍编写第7章、第8章和附录(MATLAB在高等数学中的应用)，卞小霞编写第9章和第10章，王振编写第12章.全书由季红蕾负责统稿.

本书从酝酿编写到正式出版得到了许多帮助和支持.盐城工学院数理学院陈万勇院长、薛长峰教授为本书编写提供了宝贵的建议，王振博士对本书图文校对付出了辛勤的劳动，盐城工学院数理学院各位同事为本书面世给予了大力的支持，清华大学出版社冯昕老师和赵从棉老师为本书出版给予了有力的帮助，盐城工学院教材出版基金提供了资助.在此一并表示由衷的感谢.此外，本书参考了许多同类教材和相关文献，恕不一一标明出处，在此谨向所有相关作者表示深深的谢意！

由于编者水平有限，书中缺点和错误在所难免，恳请广大同仁、读者批评指正.

编者

2015年7月

目录 CONTENTS

第 7 章

常微分方程——含变化率的方程

微分方程是数学中密切联系实际的活跃分支，是微积分应用的典型范例，它伴随着微积分的发展而一起成长. 在 18 世纪微积分蓬勃发展时期，数学家们在努力探索使得微积分严格化的征途中，大胆地扩展了微积分的应用范围. 那时，一个鲜明的特征是许多的数学家也是力学家，他们把数学应用到力学中，在研究力学问题的过程中又产生了新的数学问题，从而推动着数学的发展，这种数学与力学结合的紧密程度在数学史上是最显著的. 大数学家欧拉的名字与刚体运动及流体力学的几个著名方程联系在一起；法国数学家拉格朗日在《分析力学》论著中，用分析方法创建了一套完整的经典力学体系，在数学的广泛应用中产生了一系列以著名数学家命名的微分方程，他们中的许多人也因其微分方程而流芳百世. 现实世界中，有许多实际问题也可以抽象为微分方程问题. 例如，人口的增长、经济的增长、电磁波的传播等问题都可归结为微分方程问题，这时的微分方程习惯上称为所研究问题的数学模型，如人口模型、经济增长模型、电磁波的传播模型等. 因此，微分方程是数学联系实际的重要途径，是解决实际问题和科学问题必须掌握的一种工具.

在这一章里，我们将主要介绍微分方程的一些基本概念，几种常见的一阶、二阶微分方程的求解方法，线性微分方程解的有关理论及求解方法，差分方程的一些基本概念以及一阶、二阶线性差分方程的求解.

7.1 微分方程

含有未知数的等式称为方程. 初等数学中有各种各样的方程：线性方程、二次方程、高次方程、指数方程、对数方程、三角方程和方程组等. 这些方程都是要把研究的问题中的已知数和未知数之间的关系找出来，列出包含一个未知数或几个未知数的一个或者多个方程式，然后求出方程的解. 我们把含有未知函数、未知函数的导数与自变量的方程，称为**微分方程**①.

① 如果未知函数是一元函数，则称该微分方程为**常微分方程**. 例如，$\frac{dy}{dx}=x+y$，$\frac{d^2y}{dx^2}=x$ 和 $(y')^2+xy=\cos x$ 等都是常微分方程. 如果未知函数是多元函数，且该微分方程中出现未知函数的偏导数，则称该方程为**偏微分方程**. 例如方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a\frac{\partial z}{\partial y}+y$ 是偏微分方程. 这里仅讨论常微分方程，并简称常微分方程为微分方程.

顾名思义,微分方程就是联系着自变量、未知函数以及某些微商的函数方程.微分方程中所出现的未知函数的导数的最高阶数,称为此**微分方程的阶**.例如:微分方程$(y')^2+x^3y^5-x^4=0$,$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x+y$,$x\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x=0$都是一阶的;微分方程$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\sin x=0$,$(y'')^2=k^2(2+y'^2)^3$都是二阶的.

一般地,n阶微分方程可写成

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0. \tag{7-1-1}$$

如,一阶微分方程的一般形式可写成$F(x,y,y')=0$;二阶微分方程的一般形式可写成$F(x,y,y',y'')=0$.这里必须指出,在n阶微分方程$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$中,$y^{(n)}$必须出现,而$x,y,y',y'',\cdots,y^{(n-1)}$等变量可以不出现.例如,$y^{(n)}=f(x)$就是$n$阶微分方程.

例1 指出下列方程中哪些是微分方程,并说明它们的阶数.

(1) $x\mathrm{d}y+y\sin\sqrt{x}\mathrm{d}x=0$; (2) $y^2+2\sqrt{x}=0$;

(3) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=\mathrm{e}^{3t}$; (4) $y''+2\sqrt{x}y'=x$.

解 除(2)外,其余方程中都含有未知函数的微分或导数($\mathrm{d}y,y''$),所以方程(1),(3),(4)是微分方程.其中(1)为一阶微分方程,(3)和(4)为二阶微分方程.

满足微分方程的函数称为**微分方程的解**.换句话说,若将函数$y=f(x)$及其导数代入微分方程(7-1-1)中,能使该方程变成恒等式,那么函数$y=f(x)$就是该方程的解.容易验证:函数$y=\frac{1}{6}x^3$,$y=\frac{1}{6}x^3+5x+C$都是微分方程$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=x$的解.求微分方程的解的过程,称为**解微分方程**.

如果微分方程的解中含有相互独立的任意常数,且任意常数的个数与微分方程的阶数相同,这样的解称为微分方程的**通解**.例如,可验证$y=\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2$是微分方程$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=x$的解,且此解中含有两个独立的任意常数$C_1$、$C_2$,常数的个数与该微分方程的阶数相同,所以$y=\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2$是微分方程$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=x$的通解.

注 通解定义中所说的相互独立的任意常数,其含义是指当通解中所含任意常数的个数不止一个时,不能通过代数运算合并使得任意常数的个数减少.例如,可验证$y=\frac{1}{6}x^3+C_1x+2C_2x$也是微分方程$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=x$的解,但这个解不是方程$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=x$的通解.因为其中的两个任意常数$C_1$,$C_2$不是独立的,它们可以合并为一个任意常数$C=C_1+2C_2$.

在通解中,可利用在某一点处的附加条件确定任意常数的取值,这时所得的解中不再含有任意常数,我们把这样的解称为**微分方程的特解**,这时的附加条件称为**初始条件**.例如,微分方程$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=x$,初始条件$y(0)=1$,$y'(0)=2$,则满足初始条件的特解为$y=\frac{1}{6}x^3+2x+1$.

带有初始条件的微分方程称为微分方程的**初值问题**.例如,一阶微分方程的初值问题即为$\begin{cases}y'=f(x,y),\\ y|_{x=x_0}=y_0.\end{cases}$

例 2 设曲线过点(1,2)，且在该曲线上任意点 $M(x,y)$ 处的切线斜率为 $2x$，求此曲线方程.

解 设所求曲线为 $y=f(x)$，由导数的几何意义，$y=f(x)$ 满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x \quad 或 \quad \mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x,$$

又因曲线经过点(1,2)，即所求曲线还应满足 $y|_{x=1}=2$，因此，所求问题实质上就是求一阶微分方程的初值问题 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x,\\ y|_{x=1}=2.\end{cases}$

在方程 $\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x$ 的两边同时积分，得该方程的通解：$y=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C$（其中 C 是任意常数），再根据初始条件 $y|_{x=1}=2$，得 $2=1^2+C$，即 $C=1$，所以所求的曲线方程为 $y=x^2+1$.

由于微分方程的解是通过积分而得到的，且微分方程的特解图像是一条特定的曲线，所以我们也把微分方程的解称为微分方程的**积分曲线**. 初值问题的几何意义就是求过点(x_0,y_0)的那条积分曲线. 通解中的任意常数取不同的值可以得到不同的特解，所以，微分方程的通解图像是一族曲线，称为微分方程的**积分曲线族**.

微分方程的解根据函数的形式可分为显式解和隐式解. 微分方程的通解不一定包含所有的解，不在通解中的解称为**奇解**.

例 3 求曲线族 $x^2+Cy^2=1$ 所满足的微分方程，其中 C 为任意常数.

解 求曲线族所满足的方程，就是求一个微分方程，使得所给曲线族就是该微分方程的积分曲线，因此，该微分方程的通解就是 $x^2+Cy^2=1$. 由于其通解中只含有一个任意常数，所以所求的微分方程是一阶微分方程.

在等式 $x^2+Cy^2=1$ 的两端对 x 求导，得 $2x+2Cyy'=0$.

由 $x^2+Cy^2=1$ 解得 $C=\dfrac{1-x^2}{y^2}$，代入上式得 $2x+2\cdot\dfrac{1-x^2}{y^2}y\cdot y'=0$，整理得所求的微分方程为

$$xy+(1-x^2)y'=0.$$

习题 7.1

1. 填空题

(1) $xy'''+2y''+x^2=2$ 是________阶微分方程；

(2) $x(y')^2-2yy'+\sin(xy)=0$ 是________阶微分方程；

(3) $L\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\dfrac{Q}{C}=0$ 是________阶微分方程；

(4) 若 $y=a\mathrm{e}^x-b\mathrm{e}^{-x}+x-1$，其中 a,b 为任意常数，则函数所满足的微分方程是________；

(5) 已知 $y=C_1\sin(x-C_2)$，且 $y|_{x=\pi}=1, y'|_{x=\pi}=0$，则 $C_1=$________，$C_2=$________.

2. 指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解.

(1) $xy'=2y, y=5x^2+x$；　(2) $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0, y=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}$.

3. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程：

(1) 曲线在点(x,y)处的切线的斜率等于该点横坐标的平方；

(2) 曲线上点$P(x,y)$处的法线与x轴的交点为Q,且线段PQ被y轴平分.

4. 当轮船的前进速度为v_0时，推进器停止工作. 已知船受水的阻力与船速的平方成正比(比例系数为mk,其中$k>0$为常数，而m为船的质量)，试写出船的速度和时间的微分方程及满足的初始条件.

7.2 可分离变量的微分方程与齐次方程

微分方程的求解是一个十分复杂的问题，事实上，没有一个一般的方法可以求解任意微分方程，只能根据方程类型，确定方程解法. 本节主要讨论可分离变量的微分方程以及齐次方程的求解.

7.2.1 可分离变量的微分方程

设有一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=F(x,y),$$

如果其右端函数能分解成$F(x,y)=f(x)g(y)$,即有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y), \tag{7-2-1}$$

则称方程(7-2-1)为**可分离变量的微分方程**. 此类方程的特点是：右端是只含有x的函数和只含有y的函数的乘积，如$y'=2xy$, $3x^2+5x-y'=0$(即$y'=3x^2+5x$), $y'=10^{x+y}$(即$y'=10^x\cdot 10^y$)等都是可分离变量的微分方程，而$(x^2+y^2)\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y=0$与$y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$都不是可分离变量的微分方程.

从17世纪末牛顿和莱布尼茨发明微积分直至18世纪末，微分方程的研究主题是设法把当时遇到的微分方程的求解问题转化为求原函数的积分问题. 1691年莱布尼茨首先提出所谓的分离变量法，成功地解决了形如式(7-2-1)的微分方程的求解问题.

如果方程(7-2-1)中的函数$f(x)$, $g(y)$都是连续的，且$g(y)\neq 0$,则可用积分的方法求解，其具体求解过程如下.

第一步　将方程写成$\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$的形式，此过程叫做**分离变量**；

第二步　在上述方程的两端同时积分，得到y所满足的隐函数方程$\int\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x$,或记为$G(y)=F(x)+C$,其中$G(y)=\int\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y$, $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$, C为任意常数；

第三步　求出由$G(y)=F(x)+C$所确定的函数$y=\varphi(x)$或$x=\psi(y)$,这里$G(y)=F(x)+C$, $y=\varphi(x)$或$x=\psi(y)$都是微分方程的(通)解，其中$G(y)=F(x)+C$称为微分方程的**隐式通解**.

上述求解可分离变量的微分方程的方法称为**分离变量法**.

例 1 求微分方程 $\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y=y^2\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$ 的通解.

解 应用分离变量法,先合并 $\mathrm{d}x$ 及 $\mathrm{d}y$ 的各项,得 $y(x-1)\mathrm{d}y=(y^2-1)\mathrm{d}x$.

设 $y^2-1\neq0$,$x-1\neq0$,分离变量得

$$\frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y=\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x,$$

两端积分

$$\int\frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y=\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x,$$

得

$$\frac{1}{2}\ln|y^2-1|=\ln|x-1|+\ln|C_1|,$$

于是 $y^2-1=\pm C_1^2(x-1)^2$. 注意到其中 $\pm C_1^2$ 是不为 0 的任意常数,我们记 $C=\pm C_1^2\neq0$,得方程的解 $y^2-1=C(x-1)^2$.

容易验证,$y^2-1=0$ 即 $y=\pm1$ 也是原方程的解,而 $y=\pm1$ 可通过上式中的 $C=0$ 得到,所以原方程的通解为

$$y^2-1=C(x-1)^2 \quad (C\text{ 为任意常数}).$$

由上述解题过程可以看到,在用分离变量法解可分离变量的微分方程的过程中,我们是在假定 $g(y)\neq0$ 的前提下,用它除方程两边而得到的通解,因此,此通解不包含 $g(y)=0$ 这一特解. 但是,有时只要扩大任意常数 C 的取值范围,可使失去的解仍包含在通解中. 如在例 1中,首先得到的解中应该 $C\neq0$,但这样方程就失去特解 $y=\pm1$,而如果允许 $C=0$,则 $y=\pm1$ 就包含在通解 $y^2-1=C(x-1)^2$ 中.

例 2 一杯热茶放在桌子上,温度会慢慢降低,这是大家熟悉的生活常识. 牛顿冷却定律指出:物体温度的变化率与物体和当时空气温度之差成正比. 若一物体的温度为 100℃,将其放置在空气温度为 20℃的环境中冷却. 设物体的温度 T 与时间 t 的函数关系为 $T=T(t)$,则可建立起函数 $T(t)$满足的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-20),$$

其中 $k(k>0)$为比例常数,"—"号表示物体的温度随着时间的延续而递减,这就是**物体冷却的数学模型**. 求该物体的温度 T 随时间 t 的变化规律 $T=T(t)$.

解 根据题意知,$T=T(t)$满足条件 $T|_{t=0}=100$,且有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-20),\\ T|_{t=0}=100.\end{cases}$$

下面求上述初值问题的解.

当 $T-20\neq0$ 时,分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}T}{T-20}=-k\mathrm{d}t,$$

两端积分

$$\int \frac{1}{T-20}\mathrm{d}T = \int -k\mathrm{d}t,$$

得

$$\ln|T-20| = -kt + C_1 \quad (\text{其中 } C_1 \text{ 为任意常数}),$$

于是 $T-20=\pm e^{-kt+C_1}=\pm e^{C_1}e^{-kt}=Ce^{-kt}$ （其中 $C=\pm e^{C_1}\neq 0$）.

容易验证，当 $C=0$ 时，$T=20$ 也是原方程的解，所以原方程的通解为

$$T=20+Ce^{-kt} \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

再将条件 $T|_{t=0}=100$ 代入上式，得 $C=100-20=80$，所以所求规律为

$$T=20+80e^{-kt}.$$

物体冷却的数学模型在多个领域有着广泛的应用. 例如，警方破案时，法医要根据尸体当时的温度推断这个人的死亡时间，就可以利用这个模型来计算解决.

7.2.2 齐次方程

变量代换是处理数学问题的一个基本手段，在求解微分方程的过程中使用变量代换，往往使得求解问题得到简化，而齐次方程的求解就是这一方法应用的一个实例.

如果一阶微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g(x,y)$ 中的 $g(x,y)$ 能够写成关于 $\frac{y}{x}$ 的函数，即有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right),$$

则称该微分方程为**齐次方程**. 例如 $(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=0$ 是齐次方程，因为它可写成 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{x-y}=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$；$\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+x\cos\frac{y}{x}\mathrm{d}y=0$ 是齐次方程，因为它可写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\left(\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}-1\right)}{\cos\frac{y}{x}}.$$

对于齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$，作变量代换，令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=xu$，于是有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，将此式代入原方程，得一阶微分方程

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u) \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{f(u)-u}{x} \tag{7-2-2}$$

这是一个以 $u(x)$ 为未知函数的可分离变量的微分方程. 若 $f(u)-u\neq 0$，对方程(7-2-2)分离变量并积分，得

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u} = \ln|x| + \ln C,$$

求出积分后，再以 $\frac{y}{x}$ 代替 u，就可求得所给齐次方程的通解.

例 3 求解微分方程 $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+x\cos\frac{y}{x}\mathrm{d}y=0$.

解 变量代换：令 $u=\frac{y}{x}$，即 $y=xu$，则 $\mathrm{d}y=x\mathrm{d}u+u\mathrm{d}x$，由此原方程变形为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u\cos u-1}{\cos u},$$

整理得

$$\cos u\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边同时积分，得

$$\sin u=-\ln|x|+C,$$

再将 $u=\frac{y}{x}$ 代回，得所求微分方程的通解为 $\sin\frac{y}{x}=-\ln|x|+C$.

习题 7.2

1. 求下列微分方程的通解.

(1) $xy'-y\ln y=0$； (2) $\sqrt{1-x^2}y'=\sqrt{1-y^2}$；

(3) $\sec^2 x\tan y\mathrm{d}x+\sec^2 y\tan x\mathrm{d}y=0$； (4) $(\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=0$；

(5) $\cos x\sin y\mathrm{d}x+\sin x\cos y\mathrm{d}y=0$； (6) $y\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y=0$.

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解.

(1) $y'=\mathrm{e}^{2x-y}, y|_{x=0}=0$； (2) $y'\sin x=y\ln y, y\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}$；

(3) $\cos y\mathrm{d}x+(1+\mathrm{e}^{-x})\sin y\mathrm{d}y=0, y|_{x=0}=\frac{\pi}{4}$； (4) $x\mathrm{d}y+2y\mathrm{d}x=0, y|_{x=2}=1$.

3. 试说明方程 $\int_0^x\left[2y(t)+\sqrt{t^2+y^2(t)}\right]\mathrm{d}t=xy(x)(x>0)$ 为齐次方程.

4. 求下列齐次方程的通解.

(1) $(x^2+y^2)\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y=0$； (2) $(1+2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}})\mathrm{d}x+2\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}y=0$.

5. 一曲线通过点(2,3)，它在两坐标轴间的任一切线线段均被切点所平分，求这曲线方程.

6. 小船从河边点 O 处出发驶向对岸(两岸为平行直线). 设船速为 a，船行方向始终与河岸垂直，又设河宽为 h，河中任一点处的水流速度与该点到两岸距离的乘积成正比(比例系数为 k). 求小船的航行路线.

7. 在一次谋杀发生后，尸体的温度按照牛顿冷却定律从原来的 37℃ 开始下降，假设两个小时后尸体温度变为 35℃，并且假定周围空气的温度保持 20℃ 不变，试求出尸体温度 T 随时间 t 的变化规律. 又如果尸体被发现时的温度是 30℃，时间是下午 4 点整，那么谋杀是何时发生的？

8. 求方程 $f(xy)y\mathrm{d}x+g(xy)x\mathrm{d}y=0$ 的通解.

9. 设 $y=f(x)(x\geqslant 0)$ 连续可微且 $f(0)=1$，已知曲线 $y=f(x)$、x 轴、y 轴和过点 x 的垂线所围成的平面图形的面积值与曲线 $y=f(x)$ 上相应的一段弧长相等，求 $y=f(x)$.

7.3 一阶线性微分方程

在微分方程中，一阶线性微分方程是最基本也是最简单的微分方程，它有一套完美的解法，并有着广泛的应用. 本节主要讨论一阶线性微分方程的概念及其解法以及可化为一阶微分方程的伯努利方程.