沈小丰
喻　兰　编著
沈　钰

逻辑代数

科学出版社
www.sciencep.com

逻辑代数

沈小丰　喻　兰　沈　钰　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书从二值逻辑的基本定义出发，推演出二值逻辑的定理和公式，提出进行逻辑运算，建立和求解逻辑函数与逻辑方程的演算法则．创立桥式、排列式、组合式等二值逻辑的特殊函数，然后创立了一套与二值逻辑代数相对应的镜像坐标系统，并规定在镜像坐标系统中绘制逻辑代数式图像的方法和利用图像来进行各种演算的图解法．

在推演二值逻辑代数理论的基础上，本书给出逻辑代数在电路和逻辑学中的典型应用：举例说明逻辑代数的理论及镜像坐标在分析电路功能，进行电路设计，分析各种概念、判断及其相互关系，证明和扩充三段论的格式等方面的用途．同时，本书提出的镜像坐标系统等逻辑演算方法也为逻辑代数增添了一种新的有用工具．

本书可供从事数理逻辑、逻辑学、概率计算以及数字电路等方面的研究人员和工程师参考．

图书在版编目（CIP）数据

逻辑代数/沈小丰，喻兰，沈钰编著．—北京：科学出版社，2008
ISBN 978-7-03-020788-3

Ⅰ．逻… Ⅱ．①沈…②喻…③沈… Ⅲ．布尔代数－高等学校－教材
Ⅳ．O153.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 204797 号

责任编辑：王雨舸／责任校对：董艳辉
责任印制：董　丽／封面设计：熊　芳

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉中科兴业印务有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2008 年 1 月第 一 版　开本：B5（720×1000）
2008 年 1 月第一次印刷　印张：16
印数：1—2 500　字数：306 000

定价：28.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

序

我曾是一名工程人员，后来从事教育工作. 在教科书里看到布尔代数，觉得它对解决电路设计问题很有用处；但书上给的只是一些转换公式，对布尔代数本身却没有系统论述；因此就找到几本“布尔代数”的书来看. 不料这些书谈的却是一些集合、公理等，非常抽象，是为数学奠基的“数学底逻辑”，不符合工程实用的要求. 而且观点繁复，难以掌握. 只看所用的符号系统，就会使人眼花缭乱，以致未能卒读. 后来知道，布尔代数是在 1850 年前后布尔发表的几篇有关用代数方法研究推理证明等逻辑问题的基础上发展起来的，它原是以代数方法对逻辑学中的归类、命题、关系进行演算，所以又称逻辑代数；到 20 世纪，发展成“数学底逻辑”，又进一步改称为数理逻辑，不过还保留着原先的一些内容，作为其中的一部分，称为经典谓词逻辑. 布尔代数是数理逻辑中的最基础部分，是由亚里士多德传统三段论式理论演变所产生的传统逻辑的严格化、精确化和完善化. 但它对于工程实用还是没有很大帮助，因此我对“数理逻辑”也很少涉猎. 这样，我一直渴望着“既能解决实际问题，又有充分理论根据”的通俗易懂的书籍出现.

这个愿望，恰好与沈小丰等人感到有必要对逻辑代数进行归纳和整理的认识相符合. 经过他们不懈地努力，终于完成了这本整理和扩充的“逻辑代数”. 我仔细地但不甚费力地读完了它，觉得它正是我所想要看到的书，它既有理论系统，又有实际功用，值得向大家推荐. 因此在这里，我先把本书内容和特点向大家作一番概括性介绍，再请大家在读完本书后自己去体会和评议.

这本书共分五篇. 前三篇是理论部分，后两篇是应用部分.

在理论方面，本书有四个特点. 第一个特点是接近大众. 所用的符号和术语都是大众所熟悉的，容易理解，且经过说明，并不至于同普通代数相混淆. 第二个特点是面向实用. 在三种基本逻辑运算之外，增加的多种逻辑运算，都是为了实际需要而作出的. 特别是第三篇的几种特殊函数，是专为电路布线和逻辑推理而规定的. 第三个特点是立论严谨. 虽然它注重通俗和实用，但在立论上并不含糊. 它对每个术语都有明确的定义，对每个公式都有严格的证明. 对每个操作都有明细的步骤. 第四个特点，就是创建镜象座标系统，也是全书最重要的成就. 利用镜象座标系统，能使逻辑代数中的各种运算简单明了，能使线路设计按图索骥很方便地求得结果，能使逻辑推理中求解联立方程组的问题简易得解. 这是当前我国科技界一个很有价值的创新.

在应用方面，本书主要涉及两个领域.

第四篇介绍逻辑代数在电路中的应用. 先说明数学中各要素与电路中各要素

的相互关系，再说明各种线路与表达式间的互相转换，以后分组合电路和时序电路，各举数例，详细说明了它们的设计方法. 从这些例题中可以看到各特殊函数的妙用以及利用镜象座标系统进行电路设计的优越性.

第五篇介绍逻辑代数在逻辑学中的应用. 这也是本书在学术上值得称道的.具有的重大革新. 逻辑学是一门古老的学科，它起始于古希腊的亚里士多德(公元前 384～前 322)，是研究人类思维的规律. 亚里士多德的逻辑原只盛行演绎法，自弗兰西斯·培根(1561～1626)提倡实验科学以后，又通行了归纳法，于是有实验逻辑与形式逻辑之分；稍后，莱布尼茨(1646～1716)发明了二进制数，可用于逻辑推理之中；到 1847 年，经布尔(1815～1864)和德摩根(1806～1876)把它应用到形式逻辑里，使这种逻辑更加抽象化，以至到了近代，更发展为数学底逻辑，形成四大分支，使逻辑学离开思想的内容，但求合于公式推理. 传统逻辑学虽能自成一个完整的体系，但由于它对究于实际的思想帮助不大，所以这门学科一直没有受到普遍的关注；只是在 20 世纪 30 年代，布尔代数中的一些转换公式在电话线路上得到了应用，才使数理逻辑为大众所知，知道它还有一点实用价值，但也仅限于此. 因为"经典谓词逻辑"是继承亚里士多德的传统三段论式理论而作的数学处理，没有动摇传统逻辑的基础，所以虽经数学处理而效用不大.

本书也把逻辑代数引进到传统逻辑学里，但却是以批判改造的方式引入的. 本书以数学变量表示一个概念的内涵，以相应的镜像图表示它的外延，使各种概念都能完整地表达，从而得出严谨的推导结果. 由此，它发现了传统逻辑学的许多不完善的地方：如两事物之间具有六种关系，传统逻辑学只举了五种(附录 C)；传统逻辑学中的 A,E,I,O 四种关系判断，前两种却又各包含两种关系，所以推理很难准确，而后两种又没有肯定的对象，不能解决实际问题；至于三段论的四格 19 式，经过分析，也只有 3 式具有肯定的意义. 因此，本书主张抛弃三段论式，而用求解联立方程组的办法来进行论证和推理. 本书还举了很多实例，详细说明了建立正确判断式的思考方法，列出了求解方程组的步骤. 从实例中可以看到，改造后的逻辑学，可用来解决人事问题、军事问题、法治问题、静态问题、动态问题等，并且都非常好用. 因此本书作者把这一篇命名为解析逻辑，以区别于以前的其他逻辑，这种命名是恰当的. 当然，这里所用的数学并不深奥，因此解析逻辑比起数理逻辑来，好像一个村姑面对一个雍容华丽的贵妇人，虽然显得寒伧，但她却能够以从事多种劳作而傲然挺立.

最后还要引起注意的，就是本书在最后一章里，谈到了用计算机辅助推理. 也说了方法，举了例题，编了程序. 在这方面，由于计算技术发展很快，所以本书如在将来再版，应该根据计算技术的发展重新修改程序.

沈清濂

2007 年 9 月于武汉

目　录

第1篇　符号解析

第 2 篇 二值逻辑代数的图像

第 3 篇　特殊函数

第 4 篇 逻辑代数在电路中的应用

第 1 篇
符号解析

本篇包含 1 ～ 7 章的内容. 第 1 章提出了二值逻辑的基本定义和基本恒等式；2 ～ 4 章通过逻辑表达式的运算，求公因式和公共项，推演出了二值逻辑代数的一系列定理和公式，并与一般代数学相对应，提出了分解因式，计算数列等方法；5 ～ 7 章则分别阐述了求解和构建条件等式，求解和构建方程式以及求解和构建方程组的方法.

本篇阐述的基本理论体系是全书的基础.

第1章　基本定义和基本恒等式

1.1　逻辑代数中数的取值及其涵义

在二值逻辑代数中，所考虑的数只取两种数值，我们将它表示为“1”或者“0”．如果我们把“0”的意义当作“无”，那么“1”的意义就是“有”．在普通代数中，这个“有”可以有无穷的数值，但在这里，代表“有”的只能是“1”．因为除“0”和“1”外，再没有其他数值．事实上，“0”和“1”可用来代表一切相反的概念，如：变量的正和反，数量的大和小，电路的通和断，电平的高和低，脉冲的升和降，命题的对和错，定理的真和伪，问题的肯定和否定，以及在某一特定范围的内和外等，我们可以按照所考虑的逻辑问题而确定“0”和“1”的意义．

除二值逻辑外，还有三值逻辑、四值逻辑等．本书仅研究二值逻辑，在未加声明的情况下，本书中所述的逻辑均指二值逻辑，所述的逻辑代数均指二值逻辑代数．

1.2　逻辑代数的基本运算

逻辑代数中的“与”具有“缺一不可，全有才有”的性质，它的定义是：若所给各量中有任一个是0，结果就是0，只在各量都是1时，其结果才是1．逻辑“与”运算用乘号“×”表示，也可称为逻辑乘，其结果可称为积．具体地说，即

$$0\times1=0 \tag{1-1}$$

$$1\times0=0 \tag{1-2}$$

$$0\times0=0 \tag{1-3}$$

$$1\times1=1 \tag{1-4}$$

逻辑代数中的“或”具有单容性，即“有一即可，全无才无”，它的定义是：若所给各量中有任一个是1，其结果就是1，只在各量都是0时，其结果才是0．逻辑“或”运算用加号“+”表示，也可称为逻辑加，其结果可称为和．具体地说，即

$$1+0=1 \tag{1-5}$$

$$0+1=1 \tag{1-6}$$

$$1+1=1 \tag{1-7}$$

$$0+0=0 \tag{1-8}$$

注意公式(1-7)，由于逻辑值只能取“0”或“1”，因此 $1+1=1$．

逻辑代数中的另一个基本运算是“非”，也称为反演，它的定义是：若一个量的数值经过运算后变为另一个数值，这一运算便称为反演．用算式表示如下：

$$\overline{1} = 0 \tag{1-9}$$

$$\overline{0} = 1 \tag{1-10}$$

数值 1 和 0 上面的一小横就是反演的记号，可读为反 1(或“非 1”) 等于 0，反 0(或“非 0”) 等于 1.

1.3 变量——自变量和因变量、正量和反量

由于逻辑代数中的两个数值可以代表各特定事物在各种不同情况下的性质，因此需要用不同的符号来表示各特定事物的各种不同情况.

例如，命题的真伪可以用逻辑值来表示，我们用逻辑值“1”表示命题真，用逻辑值“0”表示命题伪. 则当用 a 表示“今天是晴天”这一命题的真伪，用 b 表示“明天是晴天”这一命题的真伪时，命题“今天与明天是晴天”的真伪就是 $X = a \times b$，而“今天或明天是晴天”这一命题的真伪是 $Y = a + b$.

我们用不同的符号来表示逻辑变量，如 a,b,c,X,Y,Z 等，这些变量都只能取 0 和 1 两种数值.

当许多变量以各种运算符号连接到一起时，便构成了逻辑代数的表达式. 在逻辑代数表达式中，取值不受其他变量影响的称为自变量，常以小写英文字母 a，b，c 等来表示；而另一些需要由其他变量来决定取值的变量称为因变量，常以大写英文字母 X,Y,Z 等表示.

一个变量经过反演便变成它的反量，相对于反量而言，原来的变量称为正量. 正反两量是相对的，任一个可以看作正量或反量. 综合地说，两者互为反量.

1.4 同一变量的基本恒等式

从式(1-5)、式(1-6) 和式(1-7)，并考虑到逻辑变量 a 只能取 0 或 1 两种情况，可以归纳出

$$a + 1 = 1 \quad 及 \quad 1 + a = 1 \tag{1-11}$$

从式(1-5)、式(1-6) 和式(1-8)，并考虑到逻辑变量 a 只能取 0 或 1 两种情况，可以归纳出

$$a + 0 = a \quad 及 \quad 0 + a = a \tag{1-12}$$

式中 a 可以任意为 1 或 0.

再由式(1-7) 和式(1-8) 考虑逻辑变量 a 的取值情况，可得

$$a + a = a \tag{1-13}$$

仿此，由式(1-1) ~ (1-4) 考虑逻辑变量 a 的取值情况，得

$$a \times 0 = 0 \quad 或 \quad 0 \times a = 0 \tag{1-14}$$

$$a \times 1 = a \quad 或 \quad 1 \times a = a \tag{1-15}$$

以及

$$a \times a = a \tag{1-16}$$

又由式(1-9)和式(1-10)考虑逻辑变量 a 的取值情况，可得

$$a + \overline{a} = 1 \tag{1-17}$$

$$a \times \overline{a} = 0 \tag{1-18}$$

并且

$$a = \overline{\overline{a}} \tag{1-19}$$ *

由此可以得到**推论**：在一个等式两边各取反量，两反量亦相等。简单地说就是：等量的反量相等。

1.5 交换律

归纳式(1-11)和式(1-12)可得

$$a + b = b + a \tag{1-20}$$

归纳式(1-14)和式(1-15)可得

$$a \times b = b \times a \tag{1-21}$$

这说明，在逻辑代数中，加、乘两种运算是适合交换律的。

1.6 结合律

逻辑代数中加乘两种运算也适合于结合律。即

$$a + (b + c) = (a + b) + c \tag{1-22}$$

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c \tag{1-23}$$

这可令 $b = 1$ 及 $b = 0$ 来直接代入以证明。

例如，对式(1-22)，令 $b = 1$，则

$$\text{左边} = a + (1 + c) = a + 1 = 1, \quad \text{右边} = (a + 1) + c = 1 + c = 1$$

故两边相等；如令 $b = 0$，则

$$\text{左边} = a + (0 + c) = a + c, \quad \text{右边} = (a + 0) + c = a + c$$

故两边相等。b 的取值只可能有这两种情况，所以式(1-22)正确。

同样可证式(1-23)正确。

1.7 分配律

和在普通代数中一样，逻辑代数中的加、乘也适合如下的分配律：

$$a(b + c) = ab + ac \tag{1-24}$$

这里，像在普通代数中一样略去了乘号(×)，ab 就是 $a \times b$，也可写为 $a \cdot b$。

除此以外，还有一个为逻辑代数所特有的分配律：

$$a + bc = (a + b)(a + c) \tag{1-25}$$

* 在某些场合里，取 a 和 $\overline{a}$ 作为两个基本变量。这时 a 上的“—”将不代表反演运算符号，而采用 $\neg a$ 来代表对 a 进行反演运算，则式(1-19)将写成 $a = \neg\, \overline{a}$。

以上两式都可令 $a=1$ 及 $a=0$ 直接代入证明之.

将式(1-24) 和式(1-25) 推广,可得

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd \tag{1-24'}$$

$$ab+cd=(a+c)(a+d)(b+c)(b+d) \tag{1-25'}$$

1.8 吸收律

吸收律在逻辑代数中具有与普通代数不同的特殊形式,它们都可由以上列举的公式推导出来:

$$a+ab=a \tag{1-26}$$

$$a(a+b)=a \tag{1-27}$$

分别令 $b=0$ 和 $b=1$,这两个公式可以很方便地证明.

$$ab+a\bar{b}=a \tag{1-28}$$

证 $$ab+a\bar{b}=a(b+\bar{b})=a\times 1=a$$

如把式(1-28) 中的加号变乘号,乘号变加号,即得相应的式子:$(a+b)(a+\bar{b})$,可以证明它也等于 a,即

$$(a+b)(a+\bar{b})=a \tag{1-29}$$

证 $$(a+b)(a+\bar{b})=a+b\bar{b}=a+0=a$$

此外,有

$$a+\bar{a}b=a+b \tag{1-30}$$

证 $$a+\bar{a}b=(a+\bar{a})(a+b)=1\times(a+b)=a+b$$

相应地,有

$$a(\bar{a}+b)=ab \tag{1-31}$$

这很容易用直接展开法来证明,注意 $a\bar{a}=0$.

在式(1-30) 和式(1-31) 里,$\bar{a}$ 显得不起作用(注意,这并不等于说令它等于0),所以被称为多余的. 式(1-30) 中的 $\bar{a}$ 称为多余因子,在式(1-31) 中的 $\bar{a}$ 称为多余项.

吸收律吸收了多余因子和多余项,可以在式(1-26) ~ 式(1-31) 的基础上将吸收律推广到更多的变量. 下面再举出几个公式:

$$ab+\bar{b}c+acd=ab+\bar{b}c \tag{1-32}$$

$$(a+b)(\bar{b}+c)(a+c+d)=(a+b)(\bar{b}+c) \tag{1-33}$$

在式(1-32) 中,acd 是多余项;在式(1-33) 中,$a+c+d$ 是多余因式.

证
$$\begin{aligned}&ab+\bar{b}c+acd\\&=ab+\bar{b}c+acd(b+\bar{b})\\&=ab+\bar{b}c+abcd+a\bar{b}cd=(ab+abcd)+(\bar{b}c+a\bar{b}cd)\\&=ab+\bar{b}c\end{aligned}$$

这里利用了式(1-26) 和式(1-28).

用相应方法可以证明式(1-33):

证 $$(a+b)(\bar{b}+c)(a+c+d)$$
$$=(a+b)(\bar{b}+c)(a+b\bar{b}+c+d)$$
$$=(a+b)(\bar{b}+c)\times[(a+b+c+d)(a+\bar{b}+c+d)]$$
$$=[(a+b)(a+b+c+d)][(\bar{b}+c)(a+\bar{b}+c+d)]$$
$$=(a+b)(\bar{b}+c)$$

这里利用了式(1-27)和式(1-29).

综合式(1-32)和式(1-33),可得

$$(a\bar{b}+bc)(a+c+d)=(a+b)(\bar{b}+c)(a+c+d)=(a+b)(\bar{b}+c)$$
$$=a\bar{b}+bc=a\bar{b}+bc+acd \tag{1-34}$$

注意,这里 d 可以是 1,也可以是更多变量的乘积.

还可举出两个含有四个变量的多余因子和多余项的公式:

$$\bar{a}c+\bar{b}d+ab+cd=\bar{a}c+\bar{b}d+ab \tag{1-35}$$
$$(\bar{a}+c)(\bar{b}+d)(a+b)(c+d)=(\bar{a}+c)(\bar{b}+d)(a+b) \tag{1-36}$$

在以上两式中,cd 和 $(c+d)$ 都是多余的.

先证明式(1-35):

证 $$\bar{a}c+\bar{b}d+ab+cd$$
$$=\bar{a}c+\bar{b}d+ab+cd[\bar{a}+a(b+\bar{b})]$$
$$=\bar{a}c+\bar{b}d+ab+\bar{a}cd+abcd+a\bar{b}cd$$
$$=(\bar{a}c+\bar{a}cd)+(\bar{b}d+a\bar{b}cd)+(ab+abcd)$$
$$=\bar{a}c+\bar{b}d+ab$$

这里利用了式(1-17)、式(1-15)和式(1-28).

相应地,可以证明式(1-36):

证 $$(\bar{a}+c)(\bar{b}+d)(a+b)(c+d)$$
$$=(\bar{a}+c)(\bar{b}+d)(a+b)[(c+d)+\bar{a}(a+b\bar{b})]$$
$$=(\bar{a}+c)(\bar{b}+d)(a+b)(c+d+\bar{a})(c+d+a+b\bar{b})$$
$$=(\bar{a}+c)(\bar{b}+d)(a+b)(c+d+\bar{a})[(c+d)+(a+b)(a+\bar{b})]$$
$$=(\bar{a}+c)(\bar{b}+d)(a+b)(\bar{a}+c+d)(c+d+a+b)(c+d+a+\bar{b})$$
$$=[(\bar{a}+c)(\bar{a}+c+d)]\times[(\bar{b}+d)(a+\bar{b}+c+d)]\times[(a+b)(a+b+c+d)]$$
$$=(\bar{a}+c)(\bar{b}+d)(a+b)$$

这里利用了式(1-18)、式(1-12)、式(1-25)和式(1-29).

1.9 反演律

比较式(1-1)～式(1-4)与式(1-5)～式(1-8)可见,在式(1-1)～式(1-4)中为 1 的,在式(1-5)与式(1-8)中就为 0;在前者为 0 的,在后者就为 1,并且前者的或运算加号相当于在后者的与运算乘号.归纳起来,即:在前者为 $a+b=c$ 时,在后者就是 $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{c}$.因此得 $\bar{a}\times\bar{b}=\overline{a+b}$,或