# 微积分学习指导

WEIJIFEN
XUEXI ZHIDAO

彭勤文 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

# 微积分学习指导

彭勤文 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

## 内容提要

本书用读者乐于阅读的、非全部数学化的语言，提供了微积分里面各种关键论题的阐释与目的说明，尽可能地跳过了一些令人感到枯燥的技术性细节，列举了非常多的经验、技巧。

本书适合作为大学高等数学、微积分等课程的学习辅导书，亦是年轻教师提升教学能力不可多得的备课资料；对于复习考研的学生，具有化繁为简、提纲挈领的作用，也是非常适合的参考资料。

**图书在版编目(CIP)数据**

微积分学习指导/彭勤文编著. —北京：北京大学出版社，2015.1
ISBN 978-7-301-23820-2

Ⅰ.①微… Ⅱ.①彭… Ⅲ.①微积分—高等学校—教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 018930 号

**书　　名：微积分学习指导**
著作责任者：彭勤文　编著
策 划 编 辑：胡伟晔
责 任 编 辑：陈斌惠
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-23820-2/O·0965
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62756923　出版部 62754962
网　　址：http://www.pup.cn
电 子 信 箱：zyjy@pup.cn
印　刷　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787 毫米×1092 毫米　16 开本　12.5 印张　307 千字
2015 年 1 月第 1 版　2015 年 1 月第 1 次印刷
定　　价：32.00 元

# 致　　谢

感谢北京大学出版社胡伟晔同志为本书的编辑出版所做的持续细致的工作，感谢马祖强博士帮助绘制了部分图表。

# 前　　言

作为一名大一新生，随着对大学的新鲜感的渐渐消退，你面对的是一天到晚排得满满当当的各类课程以及在课堂上绵绵不断的、似乎没什么新意的“教授”攻势。最不幸的是，两个星期之后，你对那个被称作“高等数学”或“微积分”的家伙，连跑去听课的勇气都没有了。

曾几何时，你坐在教室里很认真地听讲却完全听不懂，可能是因为你的注意力在一个节骨眼上被脑海中突然闪过的其他念头支开或被其他同学的干扰打断，使你的思维出现了空白；也可能是因为老师提到的一些概念在你听来像是天外来客，好像自己什么也不知道了。上课时听得一头雾水，下课后拿起教材、找来各种参考书，想要补上这些空缺，读了很多遍的书却仍然感觉不明白、练习不会做，考试将如何应对呢？难道要被它挟持了吗？

你只好求助于才思敏捷的同窗好友，请他（她）使用你喜欢的语言向你解释课堂上的知识，结果只用了短短几分钟时间，居然让你恍然大悟。你多么希望能够有这样的同窗好友经常陪伴在自己身边，可以随时随地把课堂上的内容都向你解说一番，免去你学习微积分的烦恼呀。

如果想使你的大一微积分的学习轻松愉快，让这本书成为你的同窗好友吧。只要你的学习态度积极，肯跟着这位同窗好友前进，那么，学习微积分将不再是困难的事，那个由太多的学哥学姐们真切体会出来的、一直广为流传的**“微积分让人迷惑、补考、重修”**的魔咒将再也不会笼罩在你的头上了。

这本书将告诉你：微积分这门课究竟在讲些什么？为什么要学习它？微积分该怎么学？哪些东西必须要学会？如此，你就能够知道考试要考什么。

本书中几乎所有的例题都从读者的直观感受开始，引导解题思路，然后提供给你做习题的模板。只要模仿例题，你就会发现绝大多数的习题都可以自己完成，那么考试就是没有教材在手边的习题任务而已了。

本书尽可能地跳过了一些让人感到枯燥的技术性细节，尽可能地使用非数学化的语言，使得你乐于阅读，帮助你理解那些曾经令许多人困惑的命题，从而掌握微积分的内容和意义。

# 目　　录

# 第一部分　一元函数的微分学

## ——近似与最优化问题的基础

因为生活阅历浅或者运用高精密数学的机会少，所以我们中的大部分人并不了解什么才是数学的真谛.就拿最基本的数值计算来说，用 3.14 代替 $\pi$ 或是用 1.414 代替$\sqrt{2}$，每个人都觉得差不多了.换了其他的，如 $\sin 31.5°$，$\ln 3$ 等，还真没有几个人能够立刻说出它们的数值，更不要说其他更复杂的函数的数值了.

微分学主要论述了关于函数的极限、连续性、导数等概念，它的目的就是教我们了解一些并不很复杂的方法，解决诸如怎样获得近似值并且近似效果很好、怎样才是最优等一系列的问题，从而提升处理关于函数的图形、极值等各种问题的技能.而且，微分学讲述的是对于任何样式的函数都通用的规则，知道这些之后，就能够在具体的问题中大显身手了.

# 第1章 预备材料

## ——你应该知道的基本知识

作为学习微积分的准备材料，这里要花上几分钟时间复习一下你在中学数学中学过的东西，包括简单的代数、几何、三角学以及简单函数的内容，它们可都是出现在微积分“聚会”里的常客，而且经常是乔装打扮以后来的. 如果你自信对这些内容烂熟于心，大可快速浏览一下. 不过，对于大多数的同学来说，作为手边的参考资料，时常翻看翻看，相信每一次你都会有异乎寻常的感受的.

### 一、常用的一些代数运算公式

(1) 立方和(差)的公式：

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

(2) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})$

特别地：

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

牛顿二项式展开式：

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1!}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k$$
$$+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1}{(n-1)!}ab^{n-1}+b^n$$

(3) 求和公式：

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

等比数列$\{aq^{n-1}\}$的前 $n$ 项和：

$$S_n=a+aq+aq^2+aq^3+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a-aq^n}{1-q}\quad(q\neq1)$$

(4) 对数公式：

$$\ln(ab)=\ln a+\ln b,\quad \ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$$

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a},\quad a^b=e^{b\ln a}$$

最后一个公式是对付看上去异常难缠的函数时最为神奇的利刃. 现在就把它铭记于心，当面对函数“搭楼梯”的杂技时，可保你稳坐钓鱼台.

(5) 指数运算：

$$(a^x)^y=a^{xy},\quad (a^x)\cdot(a^y)=a^{x+y},\quad \frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\quad \sqrt[y]{a^x}=a^{x/y}$$

(6) 面积或体积公式：

长轴为 $a$，短轴为 $b$ 的椭圆的面积是 $\pi ab$；当 $a=b=r$ 时就是半径为 $r$ 的圆，圆面积为 $\pi r^2$，圆的周长为 $2\pi r$.

高为 $h$，底圆半径为 $R$ 的圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi R^2 h$. 它是同底等高的圆柱体体积的 $\frac{1}{3}$. 半径为 $R$ 的球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3$，表面积为 $4\pi R^2$.

(7) 不等式：

$$|a\pm b|\leqslant |a|+|b| \quad (\text{三角不等式})$$

$$\sqrt{ab}\leqslant \frac{a+b}{2}(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0) \quad (\text{几何均值不大于算术均值})$$

## 二、平面坐标系与曲线的方程

(1) 一支从极点 $O$ 开始的箭，绕着极点转圈，组成了**极坐标系**，如图 1-1(a)所示. 箭长 $r$ 和转角 $\theta$ 的变化，使得箭头指到了平面直角坐标为 $(x,y)$ 的点 $A$. 从简单的直角三角形 $\triangle AOB$，即图 1-1(b)可以发现，平面直角坐标 $(x,y)$ 与极坐标 $(r,\theta)$ 的变换关系式为：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases} \quad (0\leqslant r<+\infty,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

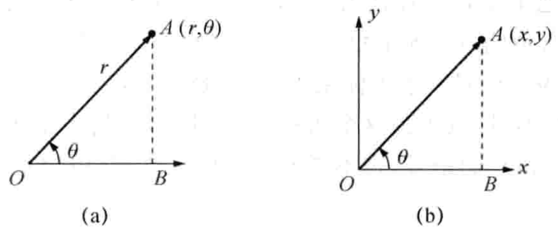


图 1-1

(2) 平面上经过点 $(x_0,y_0)$、斜率为 $k$ 的直线的点斜式方程为：

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

当 $k\neq 0$ 时，经过点 $(x_0,y_0)$ 且与该直线垂直的直线(称为**法线**)方程为：

$$y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0).$$

(3) 曲线的方程与函数表达式经常被混用，其实它们说的就是同一回事，倒是有几种样式值得区分清楚.

**直角坐标方程**：$y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$. 它的另一个名称是：定义在区间 $[a,b]$ 上的函数. 也有人讲得更抽象，说它是从 $x$ 的取值范围到 $y$ 的取值范围的一个“单值映射”. 我们采用函数的说法. 表示函数的记号可以任意选取，但是在同一个问题中，不同的函数要使用不一样的记号以示区别.

**极坐标方程**：$r=r(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$. 这是用极坐标系看函数曲线时发现的函数的另一张面孔. 每当看到这个样式的函数时，就应当知道这隐含着极坐标系与平面直角坐标系之间的关联，需要仔细应对.

函数在平面直角坐标 $(x,y)$ 与极坐标 $(r,\theta)$ 下的不同样式，可以利用平面直角坐标 $(x,y)$

与极坐标$(r,\theta)$的变换，即$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$的相互转换来认识它.

例如，直角坐标系中的圆$x^2+y^2=2y$，在极坐标中的方程为$r=2\sin\theta$，它是由$(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=2r\sin\theta$化简而来的.

**参数方程：**$\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t).\end{cases}\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$

圆的参数方程$\begin{cases}x=R\cos t,\\y=R\sin t.\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi, R$ 为半径)与椭圆的参数方程$\begin{cases}x=a\cos t,\\y=b\sin t.\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi, a,b$ 为椭圆的两个半轴长). 聪明的你可以不费吹灰之力消去其中的参数$t$，而将$x$和$y$的关系写成是圆与椭圆的标准方程. 若有人问变量$x$和$y$之间是否有函数关系，这可能要费点周折. 不过，也不必忧虑，微积分将会告诉你结果.

由参数方程表述的变量$x$和$y$之间的函数关系，要靠一个中间变量$t$作为过渡. 当中间变量不愿隐身时(有太多的情形，想要消去参数那是不可能的)，$x$和$y$的函数关系会变得不明显，以后会叫做隐函数.

(4) 一个函数不一定要有反函数. 相对于反函数$y=f^{-1}(x)$来说，函数$y=f(x)$称为直接函数. 函数$y=f(x)$的真正的反函数是$x=f^{-1}(y)$. 求反函数表达式的做法，即从方程$y=f(x)$中解出$x$，表示成$x=f^{-1}(y)$. 习惯地用$x$表示自变量，用$y$表示因变量，也就是交换了$x$和$y$，那不就是把坐标系沿着直线$y=x$旋转一周吗，图形当然是关于直线$y=x$对称的了. 如果不交换$x$和$y$的记号，则函数$y=f(x)$和它的反函数$x=f^{-1}(y)$的图形是同一条曲线！因此，人们经常说：在同一个坐标系中，反函数$y=f^{-1}(x)$和直接函数$y=f(x)$的图形关于直线$y=x$对称. 不过，也因为这个害死人的习惯，有的人把求反函数的事情，理解成了在$y=f(x)$中交换$x$和$y$的记号，也不考察函数的定义域，以致最后将反函数问题搞得一团糟.

## 三、简单函数的表示式

(1) 幂函数：

$$y=x^{\alpha}\qquad(\alpha\text{ 为实数}).$$

(2) 指数函数：

$$y=a^{x}\qquad(a>0,a\neq 1).$$

(3) 对数函数：

$$y=\log_a x\qquad(a>0,a\neq 1).$$

(4) 三角函数：

$$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\tan x,\ y=\cot x,\ y=\sec x=\frac{1}{\cos x},\ y=\csc x=\frac{1}{\sin x}.$$

(5) 反三角函数：

① 反正弦函数：$y=\arcsin x$，定义域为$x\in[-1,1]$，值域为$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$；

② 反余弦函数：$y=\arccos x$，定义域为$x\in[-1,1]$，值域为$y\in[0,\pi]$；

③ 反正切函数：$y=\arctan x$，定义域为$x\in(-\infty,+\infty)$，值域为$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$；

④ 反余切函数：$y=\operatorname{arccot} x$，定义域为$x\in(-\infty,+\infty)$，值域为$y\in(0,\pi)$.

读到这里，也许有人要说：这些函数的性质我都忘了，记不清了，我该怎么办呢？别担心，记住它们的样子就好，剩下的事让微积分来教你解决.

人们习惯于用各种不同的字母来表示变量，诸如 $x,y,z,u,v,w,s,t$ 等，而字母 $a,b,c,d$ 等一般用来表示常数，字母 $m,n,k,i,j$ 等则一般用来表示自然数，以后都按这样约定哦.

微积分正是专门对付各种函数的. 由上面的五种简单函数的表示式，经过加、减、乘、除四则运算以及“函数套函数”即复合运算的结果，被称为**初等函数**. 你会看到，只要遵守一些规则，几乎所有的运算都把五种简单函数作为它们的“垫脚石”，当你学好微积分以后，你就不会再为这样的事发愁了.

哎呀，差点忘了告诉你，反三角函数 $y=\arcsin x$ 指的是函数 $y=\sin x$ 的反函数，其中的 arcsin 是反函数的整体记号，其他的几个反三角函数记号类似哦. 想要知道给出的 $\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}$ 值是多少，就是在问哪个角（弧度）的正切值是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$.

## 四、三角学公式

（1）特殊角的三角函数值：

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弧度},\quad 30^\circ=\frac{\pi}{6},\quad 45^\circ=\frac{\pi}{4},\quad 60^\circ=\frac{\pi}{3},\quad 90^\circ=\frac{\pi}{2},$$

$$\sin\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\quad \cos\frac{\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\cot\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cot\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3},\quad \cot\frac{\pi}{4}=\tan\frac{\pi}{4}=1.$$

（2）基本恒等式：

$$\sin(\pi-x)=\sin x,\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)=\cos x,\quad \cos(\pi-x)=-\cos x,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x,\quad \sin(\pi+x)=-\sin x,\quad \cos(\pi+x)=-\cos x,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x,\qquad \sin^2x+\cos^2x=1,$$

$$1+\tan^2x=\sec^2x,\quad 1+\cot^2x=\csc^2x,\quad \sin2x=2\sin x\cos x,$$

$$\cos2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x=\cos^2x-\sin^2x.$$

（3）和差化积公式（倒过来叫积化和差公式）：

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\quad \sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\quad \cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

## 五、计算机对学习微积分的帮助

在这年头，要是没有计算机在手边，有的人可能没办法打发无聊的时间. 可当你玩得开心的时候，想一下这样的问题：屏幕上花花绿绿的图片、动画是怎么做出来的？你肯定说“写程序”呗. 但要“写程序”你总得知道计算步骤吧，计算步骤又会是什么呢？难道它们和微积分有什么关系吗？如果你想到了这个问题，又要恭喜你了. 现在已经有很多套计算机软

件，诸如 Mathematica、Maple、MATLAB 等，它们能够迅速而正确地帮你做各种数值计算，而且能够做微积分的各种符号运算，画出你要求的函数的图像，使得你看一眼就能够发现曲线上的“峰”或“谷”，哪里比较陡峭、平缓，有些地方曲线是断开的，有些地方曲线似乎要“顶破天”或要“钻透地”. 如果你手边有计算机，那么花上几个小时，掌握至少一种软件的使用，你就可以自己验证你的微积分作业是不是都做对了. 最后，假如你需要的话，附加地学一点数学公式编辑器(Mathtype)的使用，将你的结果用最方便的 Word 打印出来，你就一定会觉得微积分的学习很有趣了.

既然计算机有这么大的本事，那还要读微积分课本干什么？其实，计算机压根儿不知道它自己在干什么，想要计算机帮你干活，你必须要知道如何命令计算机，告诉它认识什么、做什么、怎么做，而且最重要的是**解释得到的结果**，计算机可没有这个功能. 做好这一点也不是容易的事，那么开始认真读微积分课本吧.

预先声明一下后文中出现的几个词的意思.

**定义**　(描述一些概念的特征)——在说明某个对象是什么的时候，需要列举出它的特征，这个过程叫做用定义证明.

**定理、命题、推论、性质**　(关于某些对象的正确结论)——为了得到一些结论或解决一些问题，需要推理、推导步骤，某些环节要引用它们，表述成“根据……得……”，为的是方便读者了解你的工作.

**证**　(说明结论正确性的陈述内容)——书中给出的**证**大部分是做习题时模仿用的.

所以，**定义**、**定理**、**命题**、**推论**、**性质**可以在条件(或特征)完全具备时直接引用到具体的对象，当然要由你来作验证或说明. 因此，背诵记忆是需要的. 再加上其他公认的算式等，这些最后的、陈述性的内容就是题解过程和步骤了.

**横看成岭侧成峰，远近高低各不同**

先不用管这个标题要说什么. 随手画几个函数的图形，甚至你可以把它们都画在同一个图中，就像下面的图 1-2 和图 1-3 一样. 盯着它看几眼，总能够发现点什么吧.

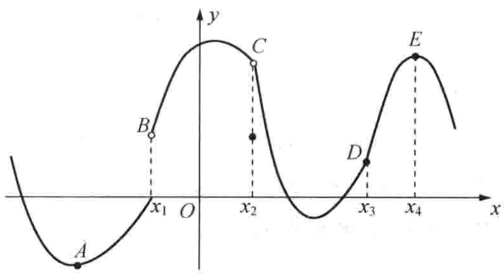


**图 1-2**

在图 1-2 中，曲线在点 $B$、$C$ 处断开，点 $C$ 掉在了下方某处，在点 $C$，$D$ 处发生了转折，尽管不很明显，在该点处是“尖”的. 而整体曲线分成了四个部分，形状上有“凹”“凸”，走势上有“增加”“减少”等.

在图 1-3 中，曲线在 $A$ 点处是平缓的，位置最低；在 $B$ 点处是“尖”的，位置最高；在 $C$ 点处也是“尖”的，位置次低；在 $D$ 点处是平缓的转折，位置次高. 而整体曲线是连接在一起的，同样在形状上有“凹”“凸”，走势上有“增加”“减少”等.

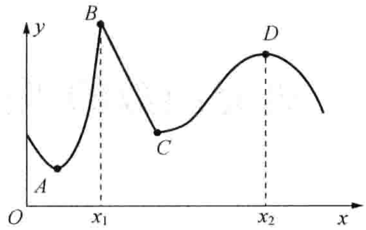


图 1-3

问一下，你有没有自己画几个图，除了上面说的东西以外还发现其他的什么了吗？如果你认为这没什么而不屑动手，那可不好.设想你沿着图 1-2 中的道路行走或开车，不看路有多么危险.

对于随手画出的函数图形，也许根本就不知道该图形所对应的函数表达式.我们不能仅仅从画出的图形来认识世界，况且有些函数根本就画不出它的图形来.因此，我们的工作要从认识一些函数开始.那么，对于预先给出的函数表达式 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$，有什么方法可以知道该函数有哪些性质？怎么知道它的图形有哪些特点？对这些特点又该作什么样的解释呢？

是时候开始我们的工作了.

# 第 2 章　研究函数的极限方法

## 2.1　认识复杂的函数

函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 的定义域为$(-\infty,\infty)$，值域为$[0,\infty)$，它的图形如图 2-1 所示. 这个函数称为**绝对值函数**，它还有一个比较花哨的写法$|x|=\sqrt{x^2}$，可以用来说明分段函数不都是初等函数这样一类无聊的问题.

绝对值函数的真正意义，完全不是一般人所想象的那样，简单地把 $x$ 变成正值. 如果你还记得在中学时有多少包含绝对值的问题让你在考试中丢分的场景，那么，现在我们说它是复杂的函数，应该能够引起你足够的注意. 在微积分里，绝对值函数扮演着非常重要的角色，一旦它出场了，你可得打起十二分的精神哟！

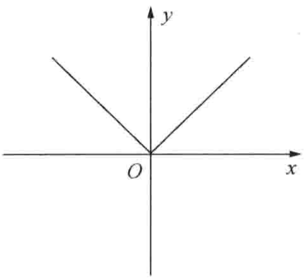


**图 2-1**

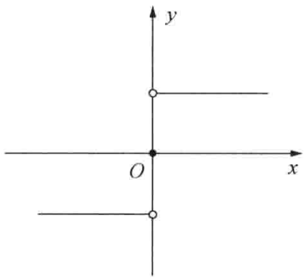


**图 2-2**

函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$，称为**符号(sign)函数**. 它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为仅有三个值的数集$\{-1,0,1\}$，图形如图 2-2 所示.

这个函数的确不怎么复杂. 若不是为了说明微积分里很重要的一些概念，确实也用不着把它归入复杂的函数类型.

嗨，你注意到这个函数图形中的一个关键点了吗？要是你对函数的复杂性还没有感觉，看看下面的这个：

函数 $y=D(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数}\\ 1, & x\text{ 为有理数}\end{cases}$ 的定义域为$(-\infty,\infty)$，值域为集合$\{0,1\}$，这个函数称为**狄利克雷(Dirichlet)函数**.

也许你会通过图形来认识函数. 在中学数学里，它可能还是一个解题方法吧. 但是，见到这里的“她”，你就会有种不知所措的感觉，因为它的图形是画不出来的. 所以，你由此对人类的创新努力产生了无比的敬意，也不再贸然轻视一切新生的事物，好奇心和求知欲将促使你

勤奋用功，对接下来的内容作一番深切的了解，以免自己变成井底之蛙.

函数都是用一个大括号把好几个式子并排写在一起的，在自变量的不同范围内有各自的表达式，函数的图形将被分成好几段，因此以上三个称之为**分段函数**.

相对于通常见到的函数，分段函数的外表是有些古怪. 在这个外表下有几个醒目的分段点(不一定属于定义域)，在它们的左边或右边，函数的表达式不一样. 所以，**凡是要处理在分段点处的问题都必须左看右看地小心应对(有专门的工具)**. 把这些“关节”点处理好了以后，分段函数与通常的函数就没有多少差别了.

分段函数出现在几乎任何实际的事件里. 只要稍微联系一下实际问题，你就可以见到各种各样的分段函数. 比如：到达不同地区的邮递费计算公式；促销货物的不同量价关系；不同时段的电话费计费公式；等等. 什么地方可能要小心应对呢？设想一下你遇到这类情形时，会有哪些可能的处理方法.

把两个以上的函数套在一起(这个过程叫做“复合”)构成了最常见到的复杂函数的表达式. 一般的数学表示采用这样的描述.

设函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 可以复合，即函数 $u=\varphi(x)$ 的值域属于函数 $y=f(u)$ 的定义域，则把 $y=f(\varphi(x))$ 称作**复合函数**. 只要满足复合的条件，可以有多重的复合嵌套.

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

**附言**

函数的复合过程给人的感觉似乎是把简单问题复杂化. 但千万别以为这是无事生非. 五彩斑斓的色彩世界，不就是由三原色变换出来的吗？世界本就很复杂，我们学习知识的目的就是要了解复杂的世界.

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

**非常重要**

把任何看起来更复杂的函数，分析成简单函数或它们的四则运算，这个过程其实就是化繁为简的方法，也正是我们处理复杂问题时的基本技术，当然也是考试的必考点哦.

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

**将复杂函数分拆成一些简单函数或它们的四则运算的复合关系的方法**是：按照简单函数的样子，把看上去复杂的部分用变量进行替换，然后再对替换以后的函数重复前面的步骤，最后完成复杂函数的分拆.

例如，函数 $y=\sqrt{\sin\frac{x}{2}}$ 是由函数 $y=\sqrt{u}$，$u=\sin v$，$v=\frac{x}{2}$ 复合得到的，而每一次用来复合的函数都是最简单函数的样子.

又如，将函数 $y=\arcsin\sqrt[3]{x^2-1}$ 分拆成一些简单函数的复合关系.

你可以用这样的方法：首先看到反三角函数的样子 $y=\arcsin\square$，于是，把函数 $y=\arcsin\sqrt[3]{x^2-1}$ 写成

$$y=\arcsin\square$$

再把其中的□写成

$$\square=(\heartsuit)^{1/3}$$

然后

$$\heartsuit=x^2-1$$

其中的□或♡可以是任何你喜欢的记号. 这样一来,函数 $y=\arcsin\sqrt[3]{x^2-1}$就分拆成了简单函数 $y=\arcsin u, u=(v)^{1/3}$ 以及 $v=x^2-1$ 的复合关系.

有的时候,函数的复合出现在四则运算的个别部分,从而使得函数看起来更复杂. 这个时候,需要分阶段来处理函数的复合关系.

例如,函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$先由

$$y=\ln u,\quad u=x+\sqrt{x^2+1}$$

复合而成,其中部分 $v=\sqrt{x^2+1}$又是一层复合关系

$$v=\sqrt{w},\quad w=x^2+1.$$

**警 告**

函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 由 $y=\ln u$, $u=x+\sqrt{v}$, $v=x^2+1$ 复合而成的分解是错误的, 因为 $u=x+\sqrt{v}$不是简单初等函数.

一个点及其附近点的集合,叫做该点的**邻域**. 在数轴上,它是强调中心但不分大小的一个区间,可以把它想象成你的交际圈.

设 $\delta>0$,则开区间$(a-\delta,a+\delta)$称为**点 $a$ 的 $\delta$ 邻域**,记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

点 $a$ 称为这个邻域的**中心**,数 $\delta$ 称为这个邻域的**半径**.

把邻域的中心去掉,称为点 $a$ 的**去心 $\delta$ 邻域**,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta,x\neq a\}=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

把开区间$(a-\delta,a)$称为**点 $a$ 的左 $\delta$ 邻域**,开区间$(a,a+\delta)$称为**点 $a$ 的右 $\delta$ 邻域**.

下面把表述函数曲线特征的几个性质罗列出来.

**(1) 函数的单调性**

设函数 $f(x)$的定义域为 $D$,区间 $I\subset D$. 如果对于区间 $I$ 上任意两点 $x_1$ 及 $x_2$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 $I$ 上是**单调增加**的;如果对于区间 $I$ 上任意两点 $x_1$ 及 $x_2$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 $I$ 上是**单调减少**的.

在某个区间上单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**,讨论单调性不能脱离所涉及的区间范围.

**提 醒**

可能你还记得,通过考察 $f(x_1)-f(x_2)$或$\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}$验证上面的不等式的技巧,也许曾为之自豪过. 不过,在将来有太多的情形会使你陷入束手无策的境地,好在有微积分可以助你一臂之力.