高等学校教学参考书

高等数学习题集

习题选解

下　册

桂子鹏　骆承钦　邱伯驺　张依华 编

人民教育出版社

本书选择同济大学数学教研室编的《高等数学习题集》(1965年修订本)中一千三百多道题目来解答的，侧重于具有典型性的题和较难的题，还补充了近百道题目及其解答．对初学者来说，我们觉得首先应该自己独立思考，寻求合适的解题方法，得出答案；遇有困难时，再求助于题解．这样有助于独立思考能力的培养和解题技能技巧的掌握．

本书分上、下册出版，下册选解的内容包括定积分、定积分的应用、级数、傅立叶级数、多元函数的微分法及其应用、微分方程、重积分、曲线积分与曲面积分等．

本书系供电视、业余、函授等高等院校师生和自学者使用，也可供科技人员参考．

责任编辑　丁鹤龄

高等学校教学参考书

高等数学习题集

习 题 选 解

下　册

桂子鹏 骆承钦 邱伯驺 张依华　编

*

人民教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

江苏海门印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 11　字数 267,000

1980年11月第1版　1981年2月第1次印刷

印数 00,001—130,000

书号 13012·0483　定价 0.80元

目　　录

第十六章 定 积 分

定积分概念

16.1. 用积分和式表示抛物线 $y=\frac{x^2}{2}$，直线$x=3$，$x=6$ 和横轴所围成的曲边梯形的面积的近似值，并取和式的极限求其准确值.

解 在$[3,6]$中插入分点 $x_i=3+\frac{3}{n}i(i=0,1,\cdots,n)$，把$[3,6]$分成 n 个小区间$[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$，每个小区间的长度都为$\frac{3}{n}$，取 $\xi_i=x_{i-1}$，则有积分和式

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}\cdot\frac{3}{n}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(3+\frac{3}{n}i\right)^2\cdot\frac{3}{n}$$

$$=\frac{27}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{2}{n}i+\frac{1}{n^2}i^2\right)$$

$$=\frac{27}{2n}\left\{\sum_{i=0}^{n-1}1+\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}i+\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}i^2\right\}$$

$$=\frac{27}{2n}\left\{n+\frac{2}{n}\cdot\frac{(n-1)n}{2}+\frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right\}$$

$$=\frac{27}{2}\left\{1+\frac{n-1}{n}+\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\right\}$$

$$=\frac{9(2n-1)(7n-1)}{4n^2},$$

此即为曲边梯形面积 S 的近似值. 取极限，有

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{9(2n-1)(7n-1)}{4n^2}=\frac{63}{2}.$$

16.4. 把质量为m的物体从地球表面升高到高度为h的位置，需要花费多大的功？用定积分表示之. [地球吸引物体的力按以下的规律来确定: $f=mg\frac{R^2}{r^2}$, 其中m表示物体的质量, R表示地球的半径, r表示地球中心到物体的距离.]

解 物体从地面升高到h高度, 即r从R增加到$R+h$. 把区间$[R, R+h]$分成n个小区间: $[r_{i-1}, r_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 其中$r_0=R$, $r_n=R+h$, 并记$\Delta r_i=r_i-r_{i-1}$. 则当r从r_{i-1}增加到r_i时, 需花费的功为

$$\Delta A_i \approx f_i \Delta r_i = mg\frac{R^2}{r_i^2}\Delta r_i, \ (i=1,2,\cdots,n)$$

因此, 当r从R增加到$R+h$时, 需花费的功

$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} mg\frac{R^2}{r_i^2}\Delta r_i.$$

按定积分的定义, 有

$$A=\lim_{\|\Delta r\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} mg\frac{R^2}{r_i^2}\Delta r_i=\int_R^{R+h}\frac{mgR^2}{r^2}dr.$$

16.6. 直接应用定积分定义计算下列积分:

(b) $\int_0^1 e^x dx$,

(c) $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$.

解 (b) 等分$[0,1]$成n个小区间$\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$$(i=1,2,\cdots,n)$, 每个小区间的长度都为$\Delta x=\frac{1}{n}$. 于是有

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^i=\frac{1}{n}\frac{e^{\frac{1}{n}}-e^{1+\frac{1}{n}}}{1-e^{\frac{1}{n}}}=\frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}.$$

因 $$\lim_{t\to+\infty} t(e^{\frac{1}{t}}-1)=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{t}}-1}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{t}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{-\frac{1}{t^2}}=1,$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty} n(e^{\frac{1}{n}}-1)=1$. 而 $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}}=1$，所以

$$\int_0^1 e^x dx=\lim_{n\to+\infty}\sigma_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}=e-1.$$

(c) 在[1, 2]中插入坐标为 $q, q^2, \cdots, q^{n-1}$ 的分点，取 $q^n=2$，即 $q=2^{\frac{1}{n}}$，则[1, 2]分成为 n 个小区间 $[q^{i-1}, q^i]$，$(i=1, 2, \cdots, n)$，其长度为 $\Delta x_i=q^i-q^{i-1}=q^{i-1}(q-1)$. 取 $\xi_i=q^{i-1}$，于是有

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^n\frac{1}{\xi_i}\Delta x_i=\sum_{i=1}^n\frac{1}{q^{i-1}}q^{i-1}(q-1)$$

$$=\sum_{i=1}^n(q-1)=n(q-1)=n(2^{\frac{1}{n}}-1).$$

因 $$\lim_{t\to+\infty} t(2^{\frac{1}{t}}-1)=\lim_{t\to+\infty}\frac{2^{\frac{1}{t}}-1}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to+\infty}2^{\frac{1}{t}}\ln2=\ln2,$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty} n(2^{\frac{1}{n}}-1)=\ln2$.

又 $|\Delta x_i|\leqslant2|2^{\frac{1}{n}}-1|$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}(2^{\frac{1}{n}}-1)=0$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}|\Delta x_i|=0$, 即 $\|\Delta x\|\to0$ (当 $n\to\infty$ 时),

所以 $$\int_1^2\frac{1}{x}dx=\lim_{\|\Delta x\|\to0}\sigma_n=\lim_{n\to+\infty}\sigma_n=\ln2.$$

定积分的性质

16.7. 说明(不计算它们的值)下列积分哪一个较大:

(a) $\int_0^1 x^2 dx$ 还是 $\int_0^1 x^3 dx$?

(b) $\int_1^2 x^2dx$ 还是 $\int_1^2 x^3dx$?

解 (a) 因在[0, 1]中 $x^2 \geqslant x^3$, 故 $\int_0^1 x^2dx \geqslant \int_0^1 x^3dx$.

按 16.123 题, 若在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 连续, $f(x) \geqslant 0$, $\int_a^b f(x)dx = 0$, 则在 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv 0$. 亦即若 $f(x) \geqslant 0$, $f(x) \not\equiv 0$, 则 $\int_a^b f(x)dx \neq 0$.

今在[0, 1]中, $x^2 - x^3 \geqslant 0$ 且 $x^2 - x^3 \not\equiv 0$, 故 $\int_0^1 (x^2 - x^3)dx \neq 0$, 即 $\int_0^1 x^2dx \neq \int_0^1 x^3dx$, 因此有

$$\int_0^1 x^2dx > \int_0^1 x^3dx.$$

(b) 因在[1, 2]上 $x^2 \leqslant x^3$, 故 $\int_1^2 x^2dx \leqslant \int_1^2 x^3dx$.

类似(a), 可知 $\int_1^2 x^2dx \neq \int_1^2 x^3dx$, 因此有

$$\int_1^2 x^2dx < \int_1^2 x^3dx.$$

16.8. 估计下列各积分的值:

(b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1 + \sin^2 x)dx$,

(d) $\int_0^2 e^{x^2 - x}dx$.

解 (b) 记 $f(x) = 1 + \sin^2 x$, 先求 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ 中的最大、最小值. $f'(x) = 2\sin x\cos x$, 令 $f'(x) = 0$, 得驻点

$$x = \frac{\pi}{2}, x = \pi;$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2, f(\pi) = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}, f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{3}{2},$$

故在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ 上, $\max f(x) = 2$, $\min f(x) = 1$. 因 $1 \leqslant f(x) \leqslant 2$, 所以

$$\pi \leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1+\sin^2 x)dx \leqslant 2\pi.$$

(d) 记 $f(x)=e^{x^2-x}$. 有$f'(x)=(2x-1)e^{x^2-x}$.

令 $f'(x)=0$, 得$x=\frac{1}{2}$. $f\left(\frac{1}{2}\right)=e^{-\frac{1}{4}}, f(0)=1, f(2)=e^2$.

故在$[0,2]$上, $e^{-\frac{1}{4}} \leqslant f(x) \leqslant e^2$, 所以

$$2e^{-\frac{1}{4}} \leqslant \int_0^2 e^{x^2-x}dx \leqslant 2e^2.$$

16.10. 试计算函数 $y=\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$在区间$[1,8]$上的平均值.

解 平均值 $\bar{y}=\frac{1}{7}\int_1^8 y dx=\frac{1}{7}\int_1^8 \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

把$[1,8]$ n等分, 分点为 $x_i=1+\frac{7}{n}i\ (i=0,1,2,\cdots,n)$.

取 $\xi_i=\left[\frac{1}{3}\left(x_i^{\frac{2}{3}}+(x_i x_{i-1})^{\frac{1}{3}}+x_{i-1}^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{\frac{3}{2}}$, 显然 $x_{i-1}<\xi_i<x_i$. 于是

$$\begin{aligned}
y(\xi_i)&=2\left[\frac{1}{3}\left(x_i^{\frac{2}{3}}+(x_i x_{i-1})^{\frac{1}{3}}+x_{i-1}^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{-1}\\
&=6\left[\left(x_i^{\frac{1}{3}}-x_{i-1}^{\frac{1}{3}}\right)\left(x_i^{\frac{2}{3}}+x_i^{\frac{1}{3}}x_{i-1}^{\frac{1}{3}}+x_{i-1}^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{-1}\left(x_i^{\frac{1}{3}}-x_{i-1}^{\frac{1}{3}}\right)\\
&=6(x_i-x_{i-1})^{-1}\left(x_i^{\frac{1}{3}}-x_{i-1}^{\frac{1}{3}}\right)\\
&=\frac{6}{7}n\left(x_i^{\frac{1}{3}}-x_{i-1}^{\frac{1}{3}}\right), (i=1,2,\cdots,n).
\end{aligned}$$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} y(\xi_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}\frac{6}{7}n\left(x_i^{\frac{1}{3}}-x_{i-1}^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\frac{7}{n}$$

$$=6\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{\frac{1}{3}}-x_{i-1}^{\frac{1}{3}}\right)=6\left(x_n^{\frac{1}{3}}-x_0^{\frac{1}{3}}\right)=6.$$

即 $\int_1^8 ydx=6$. 所以 $\bar{y}=\frac{6}{7}$.

注 类似16.6(c),取 $x_i=q^i(q^n=8)$, $\xi_i=x_i$, 亦可求得结果.

上限(或下限)为变量的定积分

16.12. 试求函数 $y=\int_0^{z^2}\frac{dx}{1+x^3}$ 对 z 的二阶导数当 $z=1$ 时的值.

解 记 $F(u)=\int_0^u\frac{dx}{1+x^3}$, 则 $y=F(z^2)$. 于是

$$\frac{dy}{dz}=F'(z^2)\cdot 2z=\frac{2z}{1+z^6},$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}=\frac{2(1+z^6)-12z^6}{(1+z^6)^2}=\frac{2(1-5z^6)}{(1+z^6)^2},$$

故
$$\left.\frac{d^2y}{dz^2}\right|_{z=1}=-2.$$

16.15. 试求由 $\int_0^y e^tdt+\int_0^x \cos tdt=0$ 所决定的隐函数对于 x 的导数 y'.

解 等式两边对 x 求导, 得

$$e^y\cdot y'+\cos x=0,$$

故
$$y'=-\cos x\cdot e^{-y}.$$

16.16. 当 x 为何值时函数 $I(x)=\int_0^x xe^{-x^2}dx$ 有极值?

解 $I'(x)=xe^{-x^2}$, 令 $I'=0$, 得驻点 $x=0$. 当 x 增大而经过0时, $I'(x)$ 由负变正, 故 $I(x)$ 在 $x=0$ 时有极小值.

16.17. 物体运动的速度与时间的平方成正比. 设从时间 $t=0$ 开始3秒钟后, 物体经过18厘米, 试求距离 s 和时间 t 的函

数关系.

解 设从时间 $t=0$ 开始 t 秒钟后，物体经过 $s(t)$ 厘米，则 $s(t)=\int_0^t v(\tau)d\tau$. 又 $v(t)=kt^2$, 故

$$s(t)=\int_0^t k\tau^2 d\tau=\left[\frac{1}{3}k\tau^3\right]_0^t=\frac{1}{3}kt^3.$$

由 $s(3)=18$, 得 $18=\frac{1}{3}k\cdot 3^3$, $k=2$. 所以

$$s=\frac{2}{3}t^3.$$

16.19. 一曲边梯形是由抛物线 $y=x^2$, 横轴和变动着的但始终平行于纵轴的直线所围成的. 试求曲边梯形面积的增量 ΔS 及微分 dS 当 $x=10$ 且 $\Delta x=0.1$ 时的值. 并求用微分代替增量所发生的绝对误差与相对误差.

解 $S(x)=\int_0^x y(t)dt=\int_0^x t^2 dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^x=\frac{1}{3}x^3$, $(x\geqslant 0)$

$$\Delta S\Big|_{\substack{x=10\\ \Delta x=0.1}}=S(10.1)-S(10)=\frac{1}{3}(10.1^3-10^3)$$

$$=\frac{1}{3}\times 30.301=10.100\dot{3},$$

$$dS\Big|_{\substack{x=10\\ \Delta x=0.1}}=S'(10)\Delta x=x^2\Big|_{x=10}\cdot\Delta x=100\times 0.1=10.$$

绝对误差 $|\Delta S-dS|=0.100\dot{3}$.

相对误差 $\left|\frac{\Delta S-dS}{dS}\right|=0.0100\dot{3}$.

计算定积分(应用牛顿-莱布尼兹公式)

在题 16.20—16.38中, 计算各定积分:

16.20. $\int_1^3 x^3 dx$.

解 $\int_1^3 x^3dx=\frac{1}{4}x^4\Big|_1^3=\frac{1}{4}(81-1)=20.$

16.35. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^3\theta d\theta.$

解 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^3\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}\,\theta(\sec^2\theta-1)\,d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}\,\theta\sec^2\theta d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}\,\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}\,\theta d\,\mathrm{tg}\,\theta+[\ln\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left[\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left(\ln\frac{1}{\sqrt{2}}-0\right)=\frac{1}{2}(1-\ln 2).$$

16.37. $\int_0^{\pi}(1-\sin^3\theta)d\theta.$

解 $\int_0^{\pi}(1-\sin^3\theta)d\theta=\int_0^{\pi}d\theta+\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)d\cos\theta$

$$=\left[\theta+\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi}=\pi-\frac{4}{3}.$$

16.38. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2udu.$

解 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2udu=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2u)du=\frac{1}{2}\left[u+\frac{1}{2}\sin 2u\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\pi-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

16.39. 设 k 为正整数，证明

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx=0 \quad 与 \quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx=0.$$

证 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx=\frac{1}{k}[\sin kx]_{-\pi}^{\pi}=0.$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx=-\frac{1}{k}[\cos kx]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=-\frac{1}{k}[\cos k\pi-\cos(-k\pi)]=0.$$

16.40. 设 k、l 为正整数，且 $k\neq l$，证明

(a) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lx dx=0$

证 (a) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lx dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(l+k)x+\sin(l-k)x]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{l+k}\cos(l+k)x-\frac{1}{l-k}\cos(l-k)x\right]_{-\pi}^{\pi}=0.$$

16.41. 设 k 为正整数，证明

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx dx=\pi \quad 及 \quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx dx=\pi.$$

证 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(1+\cos 2kx)dx$

$$=\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{4k}\sin 2kx\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2kx)dx$$

$$=\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{4k}\sin 2kx\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi.$$

在题 16.42—16.52 中，用分部积分法计算各定积分：

16.42. $\int_0^1 te^t dt.$

解 $\int_0^1 te^t dt=[te^t]_0^1-\int_0^1 e^t dt=e-[e^t]_0^1=e-(e-1)=1.$

16.47. $\int_0^1 x\operatorname{arctg} x dx.$

解 $\int_0^1 x\operatorname{arctg} x dx=\frac{1}{2}\int_0^1\operatorname{arctg} x d(x^2+1)$

$$=\left[\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg}x\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

16.49. $\int_0^\pi x^3\sin x dx$.

解 $\int_0^\pi x^3\sin x dx=-\int_0^\pi x^3 d\cos x=[-x^3\cos x]_0^\pi+3\int_0^\pi x^2\cos x dx$

$$=\pi^3+[3x^2\sin x]_0^\pi-6\int_0^\pi x\sin x dx$$

$$=\pi^3+[6x\cos x]_0^\pi-6\int_0^\pi \cos x dx$$

$$=\pi^3-6\pi-[6\sin x]_0^\pi=\pi^3-6\pi.$$

16.50. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx$.

解 记 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx=I$,

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}d\sin x=[e^{2x}\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x dx$$

$$=e^\pi+2[e^{2x}\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}-4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx=e^\pi-2-4I,$$

故 $5I=e^\pi-2$, 得 $I=\frac{1}{5}(e^\pi-2)$.

在题16.53—16.80中，用换元积分法计算各定积分:

16.53. $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}$.

解 令 $u=11+5x$, 则当 $x=-2$ 时 $u=1$, 当 $x=-1$ 时 $u=6$, 于是

$$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}=\int_1^6\frac{\frac{1}{5}du}{u^3}=-\frac{1}{10}[u^{-2}]_1^6=-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{36}-1\right)=\frac{7}{72}.$$

16.56. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin 2x dx$.

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\sin 2x dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\sin x dx$

$$=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x d\cos x=-\frac{2}{7}\left[\cos^7 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{7}.$$

16.59. $\int_0^1(e^x-1)^4 e^x dx.$

解 $\int_0^1(e^x-1)^4 e^x dx=\int_0^1(e^x-1)^4 d(e^x-1)$

$$=\frac{1}{5}\left[(e^x-1)^5\right]_0^1=\frac{1}{5}(e-1)^5.$$

16.61. $\int_0^1\frac{dx}{1+e^x}.$

解 令 $e^x=u$, 则 $x=\ln u$,

$$\int_0^1\frac{dx}{1+e^x}=\int_1^e\frac{\frac{1}{u}du}{1+u}=\int_1^e\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du=\left[\ln\frac{u}{u+1}\right]_1^e$$

$$=1-\ln(e+1)+\ln 2=\ln\frac{2e}{1+e}.$$

16.66. $\int_0^1\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x}dx.$

解 令 $u=\sqrt{x}$, 则 $x=u^2$,

$$\int_0^1\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x}dx=\int_0^1\frac{2u^4}{1+u^2}du=2\int_0^1\left(u^2-1+\frac{1}{1+u^2}\right)du$$

$$=2\left[\frac{1}{3}u^3-u+\operatorname{arctg}u\right]_0^1=2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}.$$

16.67. $\int_{-1}^1\frac{x}{\sqrt{5-4x}}dx.$

解 令 $u=\sqrt{5-4x}$, 则 $x=\frac{1}{4}(5-u^2)$,

$$\int_{-1}^1\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}=\int_3^1\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{4}(5-u^2)\cdot\left(-\frac{1}{2}u\right)du=-\frac{1}{8}\int_3^1(5-u^2)du$$

$$=-\frac{1}{8}\left[5u-\frac{1}{3}u^3\right]_3^1=\frac{1}{6}.$$

16.70. $\int_1^3\frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$.

解 令 $x=\frac{1}{t}$，则 $t=\frac{1}{x}$，

$$\int_1^3\frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}=-\int_1^{\frac{1}{3}}\frac{dt}{\sqrt{t^2+5t+1}}=\int_{\frac{1}{3}}^1\frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}}}$$

$$=\left[\ln\left(t+\frac{5}{2}+\sqrt{t^2+5t+1}\right)\right]_{\frac{1}{3}}^1$$

$$=\ln\left(\frac{7}{2}+\sqrt{7}\right)-\ln\left(\frac{17}{6}+\frac{5}{3}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{7}{2}+\sqrt{7}\right)-\ln\frac{9}{2}=\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}.$$

16.73. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

解 令 $x=a\sin u$，取 $u=\arcsin\frac{x}{a}$，则

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2u\cos^2u\,du=\frac{1}{4}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2u\,du$$

$$=\frac{1}{8}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4u)\,du=\frac{\pi}{16}a^4.$$

16.75. $\int_1^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$,

解 $\int_1^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\int_1^{e^3}\frac{d(1+\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}}=2\left[\sqrt{1+\ln x}\right]_1^{e^3}=2.$

16.80. $\int_0^{\pi}\sin^6\frac{x}{2}\,dx$.